

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - ESCOLA DE  
ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DELET  
ENG04073 - SISTEMAS DE CONTROLE ELETROELETRÔNICOS**

**Regulador de Temperatura com Aquecedor  
Ôhmico  
PV2 - Modelagem e Identificação do Sistema**

**Alisson Claudino de Jesus  
Lucas Curcio Sessegolo  
Gabriel Luis de Oliveira**

**Porto Alegre, 8 de novembro de 2017.**

## 1. Introdução

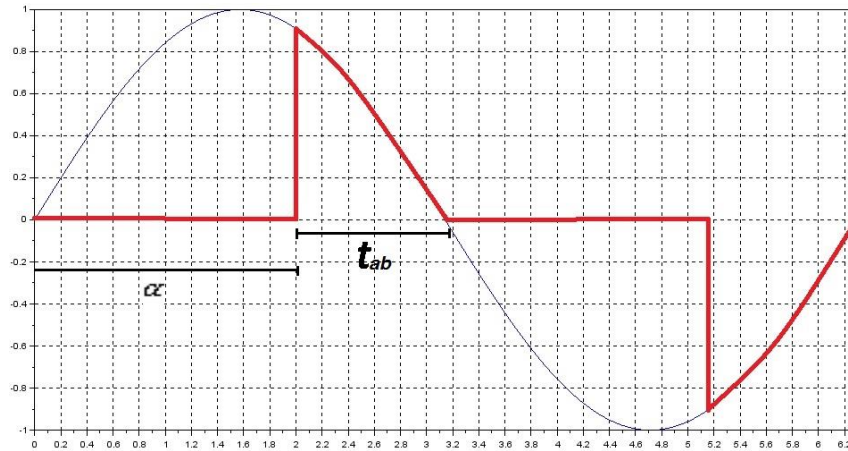
Para a execução de qualquer projeto é preciso conhecer o sistema com o qual se está lidando. Com a finalidade de se implementar um controlador de temperatura, realizamos a modelagem matemática da planta e identificamos os parâmetros da função de transferência de malha aberta através de ensaios com diferentes potências de entrada no aquecedor ôhmico. Assim, esperamos obter um modelo que corresponda da melhor forma possível à realidade para a futura implementação de um controlador.

O sistema em malha aberta contém duas etapas: o aquecedor, que tem certa potência que resulta no aumento de temperatura, e o controle de potência, que opera filtrando o sinal de rede que alimenta o aquecedor de forma que este só seja transmitido por um determinado tempo, sendo este a grandeza manipulada pelo controlador. O objetivo da modelagem é encontrar a função de transferência que relaciona este tempo de abertura à temperatura.

## 2. Modelagem

### 2.1 Controle de Potência

Como iremos manipular a alimentação do aquecedor ôhmico através de acionamento via TRIAC, recortando o sinal sinusoidal da rede, precisamos levar em consideração qual a potência fornecida pelo aquecedor em função do ângulo de disparo ou tempo de abertura. A figura abaixo mostra o comportamento ideal do componente exposto ao sinal  $f(t) = \sin(t)$ , evidenciando o ângulo de corte  $\alpha$  e o tempo de abertura  $t_{ab}$ .



A potência fornecida para o aquecedor é:

$$p = \frac{V_{rms}^2}{R} \quad (1)$$

Onde  $V_{rms}$  é a tensão eficaz da linha e  $R$  a resistência do dispositivo ôhmico.

Calculando a tensão eficaz do sinal “cortado”, temos:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{2}{2\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi} A^2 \sin^2(\omega t) d(\omega t)}$$

Podemos reescrever a expressão acima através da identidade trigonométrica, obtendo:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{A^2}{\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right] d(\omega t)} = \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} \left[ \alpha + \frac{\sin(2\pi)}{2} - \frac{\sin(2\pi - 2\alpha)}{2} \right]}$$

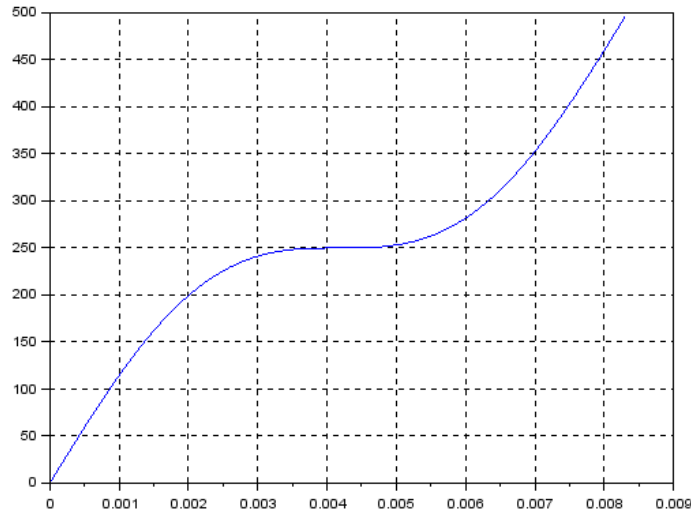
Aplicando na equação (1):

$$p = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{A^2}{2\pi R} \left[ \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right]$$

Como  $\alpha$  está relacionado com  $t_{ab}$  da forma  $\alpha = 2\pi f t_{ab}$ , e com  $p_0 = \frac{A^2}{R}$  a potência nominal informada pelo fabricante, temos:

$$p(t_{ab}) = p_0 \left[ 2f t_{ab} + \frac{\sin(4\pi f t_{ab})}{2\pi} \right] \quad (2)$$

A potência em função do tempo de abertura, considerando a frequência da rede de 60Hz e a potência nominal de 500W:



Como claramente se trata de uma relação não-linear, torna-se necessário realizar uma linearização. Observamos nos ensaios (ver seção “Identificação”) que as potências que mantinham a água em temperaturas permanentes na faixa desejada eram por volta de 90W, a linearização será em torno deste ponto, que corresponde a um tempo de abertura de aproximadamente 0,00077s.

Fazendo a expansão em série de Taylor, da primeira derivada, do termo não linear da última expressão, temos:

$$f(t_{ab}) = \frac{\sin(4\pi f t_{ab})}{2\pi} \cong \frac{\sin(4\pi f 0.00077)}{2\pi} + 2f \cos(4\pi f 0.00077)(t_{ab} - 0.00077)$$

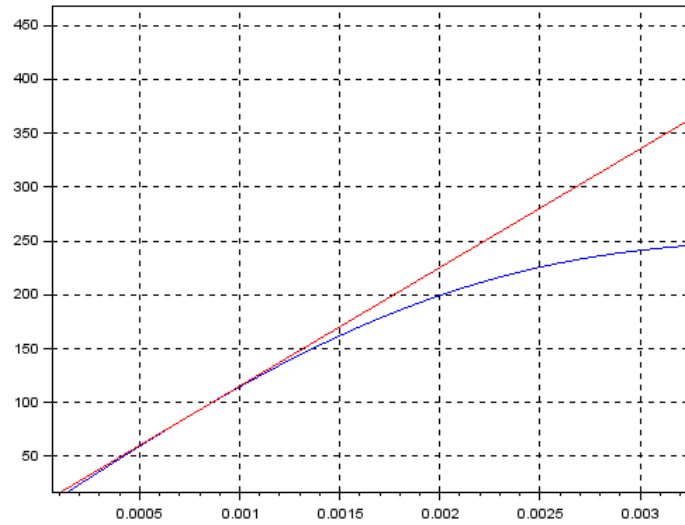
Substituindo na equação (2):

$$p(t_{ab}) \cong 500 \left[ 2f t_{ab} + \frac{\sin(4\pi f 0.00077)}{2\pi} + 2f \cos(4\pi f 0.00077)(t_{ab} - 0.00077) \right]$$

Ou seja:

$$p(t_{ab}) \cong 110169.13 t_{ab} + 5.018 \quad (3)$$

Portanto, a aproximação é um polinômio de primeira ordem. As duas equações são ilustradas a seguir, a real em azul e a aproximação em torno de 90W em vermelho:



A partir disso, podemos definir uma faixa de operação para a potência fornecida, de modo que o tempo de disparo do TRIAC seja diretamente proporcional a potência do aquecedor ôhmico.

Variando 60W em relação ao ponto central da curva (90W), atingimos uma faixa linear razoável. Portanto, o modelo será preciso na faixa de 30W a 150W. Mesmo que potências maiores que as da faixa sejam utilizadas, é de se esperar que elas ocorram quando a água está começando a aquecer e a precisão não é tão necessária como quando a temperatura está próxima do regime permanente.

Partindo da equação (3), a função de transferência da potência relacionando a potência ao tempo de abertura, denominada  $G_1(s)$ , é:

$$\Delta p \cong 110169.13 \Delta t_{ab}$$

$$G_1(s) = \frac{P(s)}{T_{ab}(s)} = 110169.13 \quad (4)$$

## 2.2 Aquecedor

Da Primeira Lei da Termodinâmica:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (5)$$

Onde

$\Delta U$  é a variação da energia interna, que em termos de temperatura pode ser aproximada como  $\Delta U = C \Delta T$ , sendo  $C$  uma constante denominada a capacidade térmica do recipiente. Essa suposição será detalhada na seção “Suposições e Limites do Modelo”.

$\Delta Q$  é a energia fornecida na forma de calor.

$\Delta W$  é o trabalho realizado, no caso da planta,  $dW = 0$ .

Considerando variações infinitesimais destas quantidades e tomando a derivada no tempo da equação (5), obtém-se:

$$C \frac{dT(t)}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (6)$$

A derivada em função do tempo da energia fornecida,  $\frac{dQ(t)}{dt}$ , é a potência absorvida pela planta, que se divide em duas parcelas: a potência do atuador e outra, subtraindo dessa, referente à energia perdida para o ambiente pela planta.

$$C \frac{dT(t)}{dt} = p(t) - p_A(t) \quad (7)$$

Essa última se deve a três fenômenos físicos, condução, convecção e irradiação. Como será exposto na seção “Suposições e Limites do Modelo”, é razoável utilizar a Lei do Resfriamento de Newton, segundo a qual a potência transmitida é proporcional à diferença entre a temperatura da planta e a do ambiente, isto é,  $p_A(t) = k_T[T(t) - T_A(t)]$ , sendo  $k_T$  a constante de perdas do recipiente. A equação (7) então pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} C \frac{dT(t)}{dt} &= p(t) - k_T[T(t) - T_A(t)] \\ C \frac{dT(t)}{dt} + k_T T(t) &= p(t) + k_T T_A(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Esta é a equação diferencial que rege a temperatura na planta. Aplicando a transformada de Laplace em (8):

$$\begin{aligned} T(s)(Cs + k_T) &= P(s) + k_T T_A(s) \\ T(s) &= \frac{1}{Cs + k_T} P(s) + \frac{k_T}{Cs + k_T} T_A(s) \end{aligned} \quad (9)$$

Percebe-se que o modelo assim tem um distúrbio intrínseco causado pela perda de energia calorífica para o ambiente. Torna-se então interessante realizar uma mudança de variáveis de forma que  $p(t) = p'(t) - k_T T_A(t)$ , assim  $P(s) = P'(s) - k_T T_A(s)$ . Da equação (9):

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{Cs + k_T} (P'(s) - k_T T_A(s)) + \frac{k_T}{Cs + k_T} T_A(s) \\ T(s) &= \frac{1}{Cs + k_T} P'(s) \\ G_2(s) &= \frac{T(s)}{P'(s)} = \frac{1}{Cs + k_T} = \frac{\frac{1}{k_T}}{\frac{C}{k_T}s + 1} \end{aligned} \quad (10)$$

Tal mudança de variáveis é justificada pelo fato de que os parâmetros  $\frac{C}{k_T}$  e  $\frac{1}{k_T}$  são identificados experimentalmente, e assumindo que a temperatura ambiente é constante ao

longo do experimento, então  $p(t) = p'(t) - k_T T_A$ , logo  $\Delta p(t) = \Delta p'(t)$  e os métodos trabalhados em aula para identificar  $G(s)$  são válidos.

A planta então pode ser modelada como um sistema de primeira ordem, com a constante de tempo  $\tau = \frac{C}{k_T}$  e ganho  $\bar{K} = \frac{1}{k_T}$ .

Na dedução deste modelo se assumiu que a temperatura e sua variação é uniforme em toda a planta, o que é o caso apenas quando a distribuição espacial da temperatura no recipiente atinge regime permanente, como será detalhado abaixo em “Suposições e Limites do Modelo”. Uma forma de modelar a equação da termodinâmica que rege esta distribuição é através de um atraso  $l$  na equação (10):

$$G_2(s) = \frac{1}{Cs + k_T} e^{-ls} = \frac{\frac{1}{k_T}}{\frac{C}{k_T}s + 1} e^{-ls} \quad (11)$$

### 3. Suposições e Limites do Modelo

Foram feitas quatro suposições: que toda a energia fornecida à planta ou se converte em aumento de temperatura ou é perdida para o ambiente, que o sistema dissipa calor pela Lei do Resfriamento de Newton, isto é, diretamente proporcional à diferença de temperatura, que a distribuição de temperatura é uniforme por toda a planta e que durante o ensaio para identificar os parâmetros a temperatura ambiente permanece constante.

A primeira suposição foi expressa na hipótese de que  $\Delta U = C\Delta T$ , o que levou à equação (5). Nem toda variação de energia interna se converte em aumento de temperatura, pois se o líquido sofre uma mudança de fase então esta consome toda a energia absorvida e a temperatura permanece constante. Assim, o modelo só é válido enquanto a substância se manter no estado líquido, que para o caso da água estabelece a faixa de operação entre 0°C e 100°C. Como o atuador é um aquecedor e incapaz de absorver calor, o valor mínimo desta faixa é na verdade a temperatura ambiente.

Além disso,  $C$  depende do calor específico do líquido e de sua massa, o que implica no modelo identificado ser válido apenas para a substância e a massa utilizados no ensaio de identificação, no caso, 950mL de água.

A segunda suposição, de que a potência dissipada segue a Lei do Resfriamento de Newton, ou seja, é proporcional à diferença entre a temperatura da planta e a do ambiente, deu origem à equação (8). Na realidade, dos três principais mecanismos de dissipação de calor, apenas a condução pode ser expressa desta maneira, como atestado na Lei de Fourier.

Perdas convectivas são muito difíceis de modelar, pois envolvem transporte de massa. Se observa, no entanto, que para variações não muito grandes de temperatura as perdas podem ser bem aproximadas como diretamente proporcionais à diferença de temperatura.

As perdas por irradiação são mais bem definidas, segundo a Lei de Stefan-Boltzmann a energia irradiada por um corpo é proporcional à temperatura na quarta potência, isto é:

$$p_A(t) = A\varepsilon\sigma(T(t)^4 - T_A(t)^4)$$

Onde  $A$  é a área da planta,  $\varepsilon$  sua emissividade e  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann. Apesar de ser uma equação não linear, dependendo da diferença das temperaturas na quarta potência, é razoável supor que para temperaturas não muito elevadas e variações pequenas, como na faixa de operação estipulada, a irradiação não seja o mecanismo de difusão dominante e, ainda por cima, que pode ser aproximada como linear.

Realizar uma linearização como vista em aula considerando separadamente os três meios de dissipação de calor, em especial levando em conta a Lei de Stefan-Boltzmann, não necessariamente implicaria em um modelo muito melhor visto que as perdas convectivas não são bem definidas. Além do mais, a literatura consultada é unânime em afirmar que o modelo linear utilizado se aplica bem para controle de temperatura de pequenos volumes de água em estado líquido.

Ainda assim, devido a essas não linearidades na dissipação de energia, optamos por restringir a faixa de operação para entre 52°C e 100°C e além disso realizar os ensaios de identificação buscando atingir as temperaturas entre 70°C e 100°C, as quais normalmente se aquece água para fins de consumo, de forma a garantir máxima precisão próximo delas.

Assumimos que a distribuição da temperatura ao longo das coordenadas espaciais era uniforme para modelar o sistema e então adicionamos um atraso para compensar pela demora real desta distribuição em atingir regime permanente. Como se trata de um fluido é certo que a temperatura não será homogênea por todo o recipiente, afinal é esta heterogeneidade que causa a convecção, mas mesmo que toda a difusão do calor se desse por condução ainda assim a distribuição da temperatura seria regida pela Equação do Calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u = 0$$

Em que  $u$  é a temperatura em função das coordenadas espaciais e do tempo e  $\alpha$  a difusividade térmica. Como o volume de água aquecido na planta é pequeno, não são esperadas diferenças grandes de temperatura no interior do recipiente e é razoável supor que um atraso no modelo obtido considerando distribuição uniforme é suficiente para simular este efeito e permitiria o uso das técnicas estudadas até então para projetar o controlador.

Uma consequência esperada desta escolha é que o parâmetro  $l$ , referente a esse atraso, deve mudar conforme a posição do sensor em relação ao atuador. Buscamos mantê-lo em uma meia distância entre as paredes do recipiente e o atuador, já que mantê-lo muito próximo ou muito distante poderia acentuar erros causados pela distribuição não uniforme.

Por fim, a última suposição feita foi a de que a temperatura ambiente se manteve constante durante os ensaios feitos para obter os parâmetros, e de fato foi o caso. Apesar de terem longa duração, os experimentos foram inteiramente realizados em ambiente fechado.

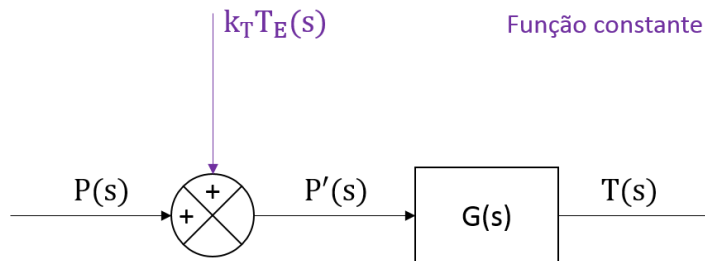
A mudança de variáveis traz uma consequência interessante para o sistema em malha aberta. Como  $P'(s)$  foi arbitrado como a potência do atuador mais uma parcela fixa da potência dissipada para o ambiente durante o ensaio que identificou os parâmetros, o distúrbio causado pela temperatura ambiente durante a operação em outros momentos será obtido em função da diferença entre essa temperatura e aquela do ensaio original, daqui em diante denominada  $T_E$ .

$$p'(t) = p(t) + k_T T_A(t) = p(t) + k_T T_E + k_T [T_A(t) - T_E]$$

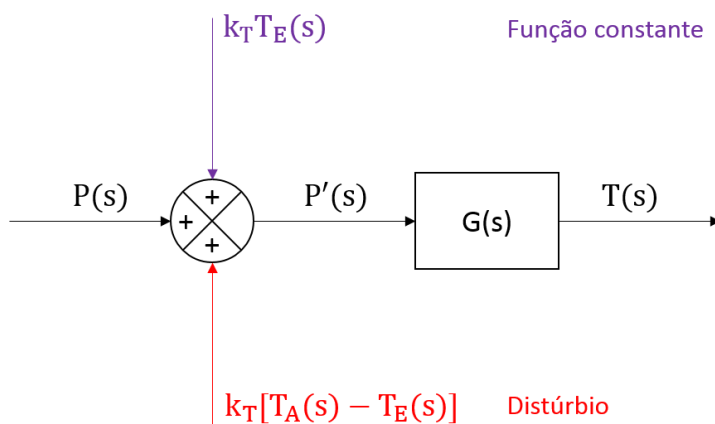
$$P'(s) = P(s) + k_T T_E(s) + k_T [T_A(s) - T_E(s)]$$

No diagrama de blocos:

Temperatura **constante e igual** à do ensaio



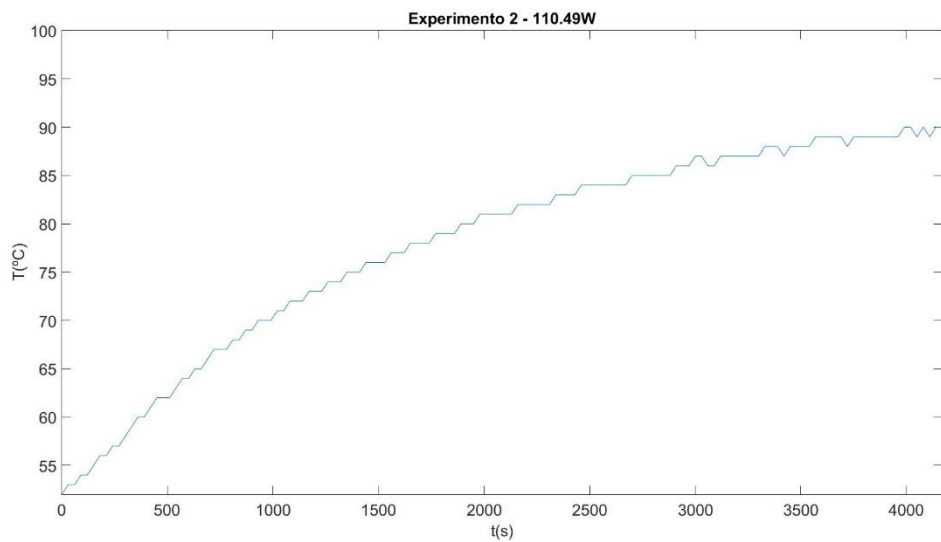
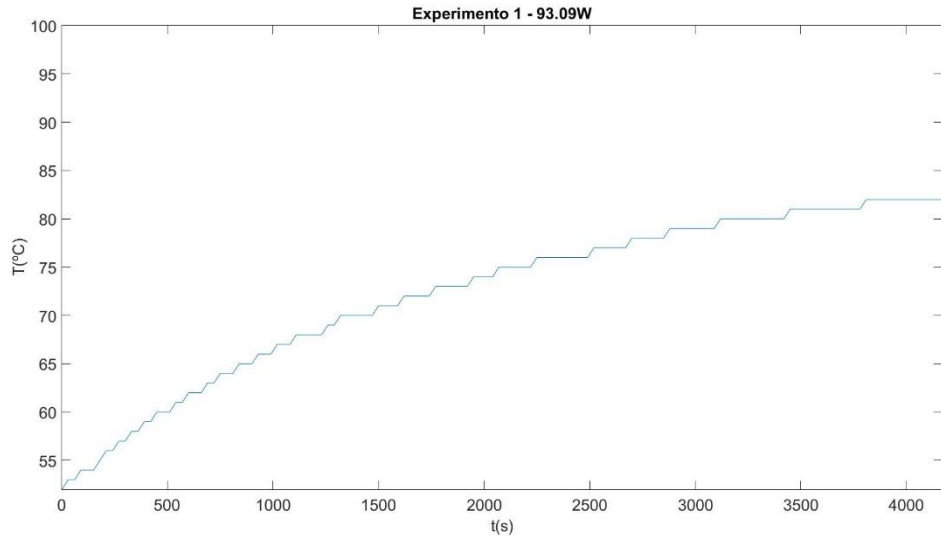
Temperatura ambiente **diferente** daquela do ensaio



#### 4. Identificação

Foram realizados dois ensaios na planta para identificar os parâmetros  $\tau$ ,  $\bar{K}$  e  $l$ . Com um transformador variável ("variac") para controlar a potência de entrada com precisão, foi aplicado um salto inicial de potência de 34.38W, até que a temperatura se estabilizasse em 52°C, para então se aplicar um segundo salto, a partir do qual foi medida a resposta transiente, com uma taxa de amostragem de 30s. O sensor tinha precisão de 1°C. Foram realizados dois ensaios, de onde se obteve:



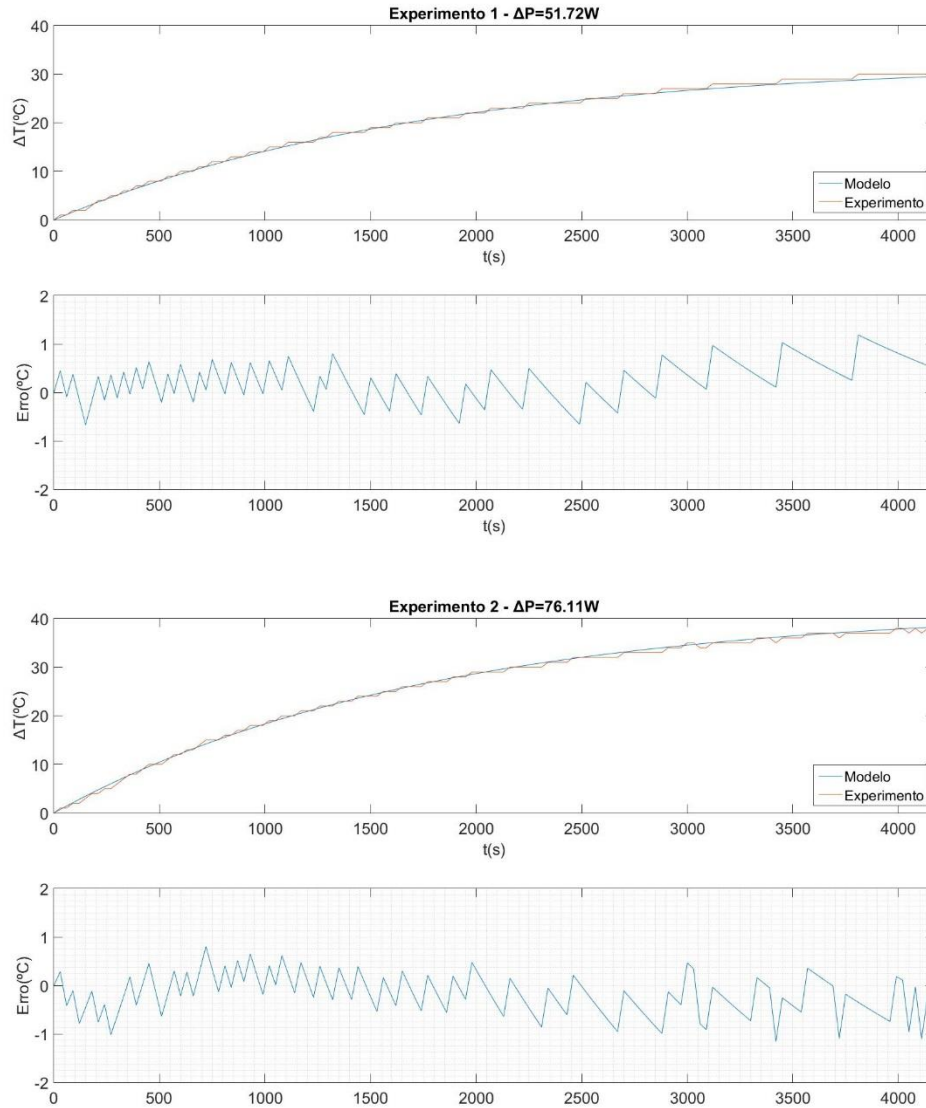


Percebe-se que de fato o sistema se comporta como um de primeira ordem e que não há atraso aparente. Apesar da duração de mais de uma hora, durante o tratamento dos dados percebemos que o sistema não havia atingido o regime permanente, ainda assim foi possível utilizar ferramentas computacionais para obter a curva que mais se adequa aos resultados observados.

Pondo os dados em termos da variação da temperatura e de potência, a seguinte função foi a que melhor se encaixou nos dados:

$$G_2(s) = \frac{T(s)}{P'(s)} = \frac{0.55371}{1753.1s + 1} \quad (12)$$

De nota que algoritmo também buscou o melhor valor para  $l$ , o atraso, mas este acabou sendo zero. A constante de tempo foi estimada como 1753.1 segundos, ou 29.2 minutos.



Como evidenciado pelos gráficos acima, o modelo identificado se adequa bem às curvas obtidas.

Juntando  $G_2$  a  $G_1$ , das equações (4) e (12), obtemos o modelo final do sistema em malha aberta.

$$G(s) = \frac{P(s)}{T_{ab}(s)} \cdot \frac{T(s)}{P(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) = 110169.13 \cdot \frac{0.55371}{1753.1s + 1} = \frac{61001.7}{1753.1s + 1}$$

Se  $t_a$  for expresso em milissegundos:

$$G(s) = \frac{T(s)}{T_{ab}(s)} = \frac{61}{1753.1s + 1}$$

## 5. Bibliografia

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. 9ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

OGATA, Katsuhiku. **Engenharia de Controle Moderno**. 5ª edição. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

BAZANELLA, Alexandre Sanfelice; SILVA JUNIOR, João Manoel Gomes da. **Sistemas de controle: princípios e métodos de projeto**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2014.