Capítulo 3

Funciones

3.1. Introducción

La idea de función está presente en la vida diaria, cuando nos referimos a la noción de correspondencia. Por ejemplo cuando decimos:

A cada rectángulo le corresponde su área.

A cada persona la corresponde su peso.

A cada persona le corresponde su cédula de identidad.

En éstos ejemplos se pueden distinguir dos conjuntos A y B. En el primer ejemplo A denota el conjunto de rectángulos y B el conjunto de los números reales positivos. Es decir, a cada rectángulo x en A le corresponde un real positivo y en B que es su área. Los ejemplos anteriores tienen la particularidad de que dado x que pertenece a A le corresponde un único y que pertenece a B.

Considerando el primer ejemplo, también podemos decir que el área del rectágulo depende de sus lados, aquí podemos distinguir el concepto de dependencia, donde una de las variables, el área del rectángulo, depende de las otras, sus lados.

Con éstos ejemplos ya comenzamos a distinguir el concepto de función.

3.1.1. Relaciones

Una relación asocia elementos de un conjunto de partida A, a algún o algunos elementos del conjunto de llegada B, es decir, que dados dos conjuntos, una relación $\Re$ entre A y B o bien que va desde A hasta B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Se denota como $(x, y) \in \Re$ o bien $x\Re y$.

Definición 32 (Relación) *Una relación de números reales es un subconjunto de* $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 88 *Los siguiente conjuntos son relaciones reales*

1. $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$
2. $\mathcal{P}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x + 1\}$
3. $\mathcal{P}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2y + 3\}$

4. $\mathcal{E}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}$

5. $\mathcal{E}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 1\}$

6. $\mathcal{H}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

7. $\mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1\}$

8. $\mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$

Sea $\Re$ una relación entre A y B, se define el dominio de $\Re$ al conjunto de todas las preimágenes de B y se denota como $Dom\Re$. Entonces

$$Dom\Re = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(x\Re y)\}$$

Un subconjunto de B formado por las imágenes de los elementos de A se llama recorrido, se denota $Rec\Re$ y se define como:

$$Rec\Re = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(x\Re y)\}$$

Ejemplo 89 *Sean $A = \{0, 2, 4\}$ y $B = \{a, b\}$ los conjuntos que siguen son relaciones entre A y B.*

1. $\Re_1 = \{(0, a), (2, a), (4, a)\}$

2. $\Re_2 = \{(0, a), (0, b), (2, a)\}$

3. $\Re_3 = A \times B$.

Una relación también se puede representar en el plano cartesiano marcando los puntos en el plano, como por ejemplo

$$\Re = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 16\},$$

la cual describe una circunferencia de radio 4 y de centro $(0, 0)$.

Definición 33 (Relación inversa) *Sea $\Re \subseteq A \times B$ una relación, diremos que $\Re^{-1}$ es la relación inversa de $\Re$ que va desde B a A y se denota como:*

$$\Re^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in \Re\}$$

De la definición se deduce que :

$$(y, x) \in \Re^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in \Re$$

Ejemplo 90 *Sea $\Re = \{(1, 1), (3, 2), (4, 4), (1, 2)\}$ luego la relación inversa de $\Re$ es:*

$$\Re^{-1} = \{(1, 1), (2, 3), (4, 4), (2, 1)\}.$$

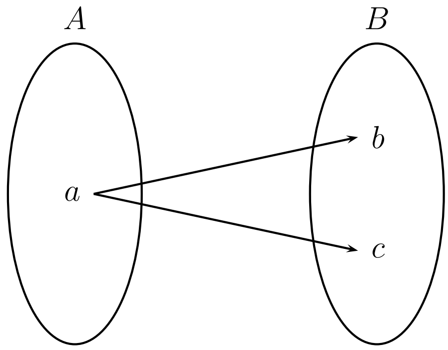
3.2. Función

Una función f es un caso particular de una relación y se define como una correspondencia que va desde un conjunto A a un conjunto de llegada B, no vacíos, en que a cada elemento x en A se le asigna un único elemento y en B.

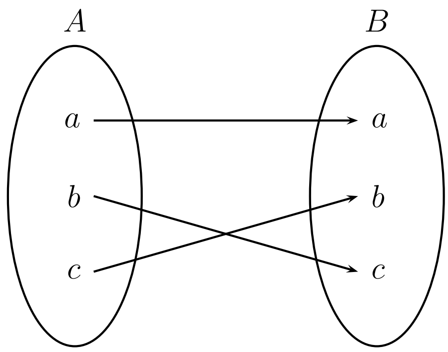
Definición 34 (Función) *se dice que f es una función real si y sólo si i) f una relación real y ii)* $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x, y), (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$

Observación: En el caso general se dice que f es una función de A en B si y sólo si f es una relación entre A y B y $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(xfy)$

Es decir, no es función cuando el elemento tiene más de una imágen en el conjunto de llegada. Podemos graficar esta situación, donde f no es función, con el siguiente diagrama



En cambio el siguiente diagrama representa una función.



Ejemplo 91 *Determinar si la siguiente relación es una función*

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

Solución: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{L}$

Luego tenemos que

$$2a + 3b = 1 \quad \wedge \quad 2a + 3c = 1$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} 2a+3b &= 2a+3c \\ 3b &= 3c \\ b &= c \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{L}$ es función

Ejemplo 92 *Determinar si la siguiente relación es una función*

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x + 1\}$$

Solución: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{P}$. Luego tenemos que

$$b^2 = 4a + 1 \quad \wedge \quad c^2 = 4a + 1$$

Reemplazando tenemos

$$b^2 = c^2$$

$$b = c \quad \vee \quad b = -c$$

podemos tomar el par $(1, 5)$ y $(1, -5)$ ambos puntos pertenece a $\mathcal{P}$ pero $5 \neq -5$, luego $\mathcal{P}$ no es una función.

Ejemplo 93 *Determinar si la siguiente relación es una función*

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

Solución: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{H}$. Luego tenemos que $a \in \mathbb{R}_0^+, b, c \in \mathbb{R}^-$ además

$$b^2 - 3a^2 = 1 \quad \wedge \quad c^2 - 3a^2 = 1$$

Reemplazando tenemos

$$b^2 - 3a^2 = c^2 - 3a^2$$

$$b^2 = c^2$$

$$b = c \quad \vee \quad b = -c$$

pero $b < 0$ y $c < 0$, luego es imposible que $b = -c$ por lo tanto tenemos que

$$b = c.$$

Así $\mathcal{H}$ es una función.

Ejercicio 94 *Determine si los siguientes conjunto son funciones*

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 2\ \}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4\ \}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \wedge y \geq 3\ \}$

4. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1 \}$

5. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1 \wedge y \leq 1 \}$

Observación: Tenga presente que una función es un conjunto, luego la igual de funciones es una igual de conjuntos.

Definición 35 (Dominio y Recorrido de una Función) *Sea f una función real.*
Se define el Dominio de f igual a

$$Dom f = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists y \in \mathbb{R})((x,y) \in f)\}.$$

Se define el recorrido de f igual a

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R})((x,y) \in f)\}$$

A continuación revisaremos los ejemplos anteriores.

Ejemplo 95 *Determinar dominio y recorrido de la siguiente función*

$$\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

Solución: Sea $x \in Dom(\mathcal{L})$, luego existe $y \in \mathbb{R}$ tales que $(x,y) \in \mathcal{L}$, es decir,

$$2x + 3y = 1.$$

Despejando obtenemos que

$$y = \frac{1-2x}{3}.$$

De lo anterior tenemos que:
Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $y = \frac{1-2x}{3} \in \mathbb{R}$ tal que

$$2(x) + 3\frac{1-2x}{3} = 1,$$

de lo cual, $(x, \frac{1-2x}{3}) \in \mathcal{L}$.
Luego

$$Dom\mathcal{L} = \mathbb{R}$$

Para el recorrido tenemos que un desarrollo similar, dado por $y \in \mathbb{R}$, luego $x = \frac{1-3y}{2}$ el cual es un número real, por lo tanto tenemos que el recorrido es:

$$Rec\mathcal{L} = \mathbb{R}$$

Ejemplo 96 *Determinar dominio y Recorrido de la siguiente función*

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

Solución: Sea $x \in Dom(f) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, luego existe $y \in \mathbb{R}^-$ tales que $(x, y) \in f$, es decir,

$$y^2 - 3x^2 = 1.$$

Despejando obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & 1 + 3x^2. \\ y^2 & = & 1 + 3x^2. \\ |y| & = & \sqrt{1 + 3x^2} \\ y & = & -\sqrt{1 + 3x^2}, \quad y < 0 \end{array}$$

De lo anterior tenemos que:
Dado $x \in \mathbb{R}_0^+$ existe $y = -\sqrt{1 + 3x^2} \in \mathbb{R}^-$ tal que

$$(-\sqrt{1 + 3x^2})^2 - 3(x)^2 = 1,$$

es decir, $(x, -\sqrt{1 + 3x^2}) \in f$.
Luego

$$Domf = \mathbb{R}_0^+$$

Para el recorrido tenemos que un desarrollo similar, dado por $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} y^2 - 3x^2 & = & 1 \\ 3x^2 & = & y^2 - 1 \quad (*) \\ |x| & = & \sqrt{\dfrac{y^2 - 1}{3}} \\ x & = & \sqrt{\dfrac{y^2 - 1}{3}}, \quad x \geq 0 \end{array}$$

luego tenemos una sola restricción $(*)$, dada por $y^2 - 1 \geq 0$, por lo tanto $|y| \geq 1$ con lo cual $y \leq -1$. Así tenemos $x = \sqrt{\frac{y^2-1}{3}}$ es un número real, por lo tanto tenemos que el recorrido es:

$$Recf =]\infty, -1]$$

Ejemplo 97 *Dada la relación* $f = \{(x, y) \in U \mid y(x - 4) = 2x + 5\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Determine el dominio máximo y el recorrido de la función.*

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $(x, y) \in f$, por lo tanto tenemos

$$y(x - 4) = 2x + 5$$

Cuando $x \neq 4$ tenemos que existe un único valor de $y = \dfrac{2x + 5}{x - 4}$

Para $x = 4$, reemplazando y tenemos que $0 = 13$, lo que es una contradicción, luego el dominio de f es $Domf = \mathbb{R} - \{4\}$

Sea $y \in Recf$, luego $y = f(x)$, con $x \in \mathbb{R} - \{4\}$

$$\begin{aligned} y = & \ \frac{2x+5}{x-4} \quad /(x-4) \\ y(x-4) = & \ 2x+5 \\ yx - 4y = & \ 2x+5 \\ yx - 2x = & \ 5+4y \\ x(y-2) = & \ 5+4y \end{aligned}$$

Para $y = 2$, reemplazamos y entonces queda $0 = 13$ y ésta igualdad no es cierta.
Por lo anterior tenemos que $y - 2 \neq 0$, podemos despejar y nos queda:

$$x(y-2) = 5 + 4y / \cdot \frac{1}{y-2}$$

Por lo tanto

$$x = \frac{5+4y}{y-2}.$$

Ahora veremos que

$$\frac{5+4y}{y-2} \neq 4$$

es decir,

$$5 + 4y \neq 4y - 8$$

en efecto,

$$5 \neq -8$$

Luego el recorrido de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$

Ejemplo 98 *Dada la relación* $f = \{(x,y) \in U \mid y = \sqrt{x}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. *Determine el dominio máximo y el recorrido de la función.*

Solución: Ya que $f = \{(x,y) \in U \mid y = \sqrt{x}\}$, la expresión $y = \sqrt{x}$ está bien definida solamente cuando $x \in \mathbb{R}_0^+$.
Luego

$$Dom(f) = \mathbb{R}_0^+$$

Sea $y \in Recf$,

$$\begin{aligned} y = & \ f(x) \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ y = & \ \sqrt{x} \setminus ()^2 \quad y \geq 0 \\ y^2 = & \ x \end{aligned}$$

sabemos que $y^2 \geq 0$ es siempre verdadero.
Por lo tanto el recorrido de f es $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$

Ejemplo 99 *Determine el dominio máximo y recorrido de* $f = \{(x,y) \in U \mid y = \frac{x^2-1}{x-1}\}$.

Solución: El dominio de f es:

$$\begin{array}{rl} Dom(f) = & \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \text{ está definida}\} \\ Dom(f) = & \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} \\ Dom(f) = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} \\ Dom(f) = & \mathbb{R} - \{1\}. \end{array}$$

Sea $y \in Recf$, con $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ luego tenemos que

$$\begin{array}{rl} y = & f(x) \\ y = & \frac{x^2-1}{x-1} \\ y = & \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \\ y = & (x+1) \\ y - 1 = & x \end{array}$$

Falta analizar que $y - 1 = x \neq 1$, es decir,

$$\begin{array}{rrl} & y - 1 \neq & 1 \\ \text{luego} & y \neq & 2 \end{array}$$

Por lo tanto el recorrido de la función es: $\mathbb{R} - \{2\}$.

Notación: Sea f una función real, luego podemos escribir la función usando la siguiente notación

$$\begin{array}{rccl} f: & \text{Dominio de } f & \longrightarrow & \text{Conjunto de llegada} \\ & \text{variable} & \longmapsto & \text{imagen única asociada} \end{array}$$

Donde *"Conjunto de llegada"* es un subconjunto de los Número Reales y contiene el recorrido.

Supongamos que $A = Domf$ y $Recf \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $f(x)$ es la imágen de x bajo la función f. Luego la función la denotamos por:

$$\begin{array}{rl} f: & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) = y \end{array}$$

En los ejemplos usaremos los ejercicios anteriores.

El ejemplo 95 podemos escribirlo usando la notación:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & :\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1-2x}{3} \end{array}$$

El ejemplo 96 podemos escribirlo usando la notación:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{H}: & :\mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow &]-\infty, -1] \\ & x & \longmapsto & -\sqrt{1+3x^2} \end{array}$$

El ejemplo 97 en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x+5}{x-4} \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & :\mathbb{R}-\{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x+5}{x-4} \end{array}$$

El ejemplo 98 en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

El ejemplo 99 en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2-1}{x-1} \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

Definición 36 (Igualdad de Funciones) *Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ se dice que $f = g$ si y sólo si se cumple que:*

$$(A = C) \wedge (B = D)$$

$$(\forall x \in A)(f(x) = g(x))$$

o bien, dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y conjunto de llegada B, y para cada elemento del dominio idénticas imágenes.

Observación: la condición de igual en los conjunto de llegada no es necesaria para efecto de la igual de los conjuntos que define la relación o gráfica, pero es necesarios para otros efectos.

Ejemplo 100 *Sean* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ *y* $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x}{x} \end{array}$
En este caso tenemos que $f \neq g$ ya que $Domf \neq Domg$.

3.2.1. Ejercicios Resueltos

Ejemplo 101 *Sea* $\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & [1,9[\\ & x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{|x|-2} - 1 \end{array}$
Determine el dominio de la función.

Solución:
Para determinar el dominio de la función, primero debemos restringirla, es decir, determinar para qué valores de x la imagen son números reales.

$$\begin{array}{rcl} |x|-2 & \geq & 0/+2 \\ |x| & \geq & 2 \\ x \geq 2 & \vee & x \leq -2 \end{array}$$

entonces

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

Luego como la función tiene como conjunto de llegada el intervalo $[1, 9[$, debemos encontrar los valores de x para los cuales la imagen está en este conjunto.

$$\begin{array}{rl} y \in [1,9[& \Leftrightarrow 1 \leq y < 9 \\ \sqrt{|x|-2} - 1 \in [1,9[& \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{|x|-2} - 1 < 9 / + 1 \\ & \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{|x|-2} < 10 / ()^2 \\ & \Leftrightarrow 4 \leq |x| - 2 < 100 / + 2 \\ & \Leftrightarrow 6 \leq |x| < 102 \\ & \Leftrightarrow (-6 \leq x \leq 6) \wedge (-103 < x < 102) \end{array}$$

Luego

$$x \in]-102, -6] \cup [6, 102[$$

Entonces podemos determinar el dominio de f

$$Dom(f) = (]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[) \cap (]-102, -6] \cup [6, 102[)$$

Por lo tanto

$$Dom(f) =]-102, -6] \cup [6, 102[$$

Ejemplo 102 *Sea* $\begin{array}{rccl} f: &]-\infty, -2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1. \end{array}$

Determine el recorrido de f.

Solución: Sea $x \in]-\infty, -2[$ e $y \in Rec f$, luego

$$\begin{array}{rll} y = & f(x) & \\ y = & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1 & / - 1 \\ y - 1 = & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} & /()^2,\ y - 1 \geq 0 \\ (y-1)^2 = & \frac{1}{|x|-1} & \\ |x| - 1 = & \frac{1}{(y-1)^2} & / + 1,\ y \neq 1 \\ |x| = & \frac{1}{(y-1)^2} + 1 & \end{array}$$

Como $x \in]-\infty, -2[$, tenemos que $|x| = -x$ y nos queda

$$\begin{array}{rll} -x = & \frac{1}{(y-1)^2} + 1 & / \cdot (-1) \\ x = & -1 - \frac{1}{(y-1)^2} & \end{array}$$

por otro lado tenemos que $x \leq -2$ entonces

$$\begin{array}{rll} -1 - \frac{-1}{(y-1)^2} \leq -2 & \Leftrightarrow \frac{-1}{(y-1)^2} \leq -1 & / \cdot (-1) \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{(y-1)^2} \geq 1 & \\ & \Leftrightarrow 1 \geq (y-1)^2 & / \sqrt{} \\ & \Leftrightarrow 1 \geq |y-1| & \\ & \Leftrightarrow -1 \leq y-1 \leq 1 & \\ & \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2 & \end{array}$$

También debemos considerar las restricciones, luego el recorrido de la función nos queda:

$$Recf = [0,2] \cap]1, +\infty[=]1, 2]$$

Ejemplo 103 *Sea $f(x) = 1 - x - x^2$ una función real. Determine el dominio máximo y su recorrido de f.*

Solución: Como la expresión $f(x) = 1 - x - x^2$, siempre podemos evaluar , luego

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

Ahora, para encontrar el recorrido de f. Sea $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ y & = & 1 - x - x^2 \\ x^2 + x + (y-1) & = & 0 \end{array}$$

Una ecuación de segundo grado y su discriminante es $1 - 4(y-1) \geq 0$, luego aplicando la formula de segundo grado tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5-4y}}{2}$$

Entonces

$$\begin{array}{rl} 5 - 4y & \geq 0 \\ \frac{5}{4} & \geq y \end{array}$$

Luego

$$Rec(f) =]-\infty, \frac{5}{4}]$$

Ejemplo 104 *Sea*

$$\begin{array}{rccl} f: & A \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2+x & si & x \leq 1 \\ x^2+1 & si & x > 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Determinar el dominio y recorrido de la función.

Solución: El dominio máximo de ésta función es $\mathbb{R}$.

Como f es una función definida en tramos, para determinar el recorrido consideraremos primero el tramo en que la función está definida para todos los $x \leq 1$ y la llamaremos f_1, es decir

$$\begin{array}{rccc} f_1 &]-\infty,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2+x \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que existe $x \leq 1$, tal que

$$\begin{array}{rl} & y = 2+x \\ & y-2 = x \\ \text{como} \ \ x \leq 1, & y-2 \leq 1 \\ & y \leq 3 \end{array}$$

Por lo tanto

$$Rec(f_1) =]-\infty, 3]$$

Ahora veremos que pasa con el recorrido cuando $x > 1$. Llamaremos f_2 al segundo tramo de la función, es decir,

$$\begin{array}{rccc} f_2 &]1,\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que existe $x > 1$, tal que

$$\begin{array}{rl} y = & x^2+1 \\ y-1 = & x^2 / \sqrt{\ }, \quad y-1 \geq 0 \\ \sqrt{y-1} = & |x| \\ \text{como} \ \ x > 1 & \\ \sqrt{y-1} & = x \\ \sqrt{y-1} & > 1 / ()^2 \\ y-1 & > 1 \\ y & > 2 \end{array}$$

$$Rec(f_2) =]-\infty, 2[$$

El recorrido de la función f es el $Rec(f_1) \cup Rec(f_2)$

$$Rec(f) =]-\infty, 3]$$

3.2.2. Representación Gráfica

La gráfica de una función $f : A \longrightarrow B$ se define como el conjunto de pares ordenados siguiente:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B \mid y = f(x), x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

La representación gráfica de f se llama curva y se consigue marcando los puntos del conjunto en el plano.

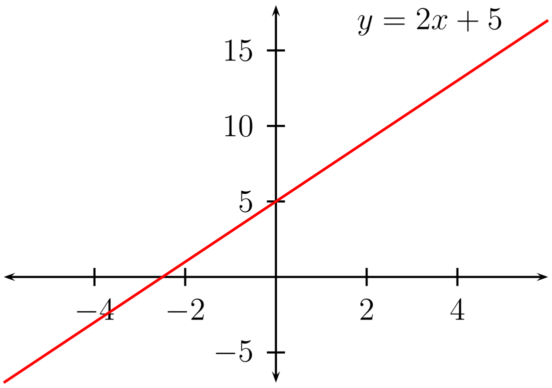
De lo anterior tenemos en el eje X los elementos del dominio y en el eje Y los elementos del conjunto de llegada.

Observación: Se dice que x es un cero de f, si y sólo si $f(x) = 0$. Geométricamete los ceros de una función son los puntos en que la gráfica corta al eje X.

Ejemplo 105 *Para $f(x) = 2x+2$, decimos que -1 es un cero de $f(x)$ y por lo tanto el punto $(-1, 0)$ es la intersección con el eje X*

Ejemplo 106 *Graficar la función $f(x) = 2x + 5$.*

Para graficar podemos hacer una tabla en donde representemos a la variable dependiente asignándole valores a la variable independiente y así podemos representar algunos puntos en el plano y conociendo la curva podremos trazarla, en este caso se trata de una recta luego nos bastan dos puntos, ellos son $(0, 5), (1, 7) \in f$.



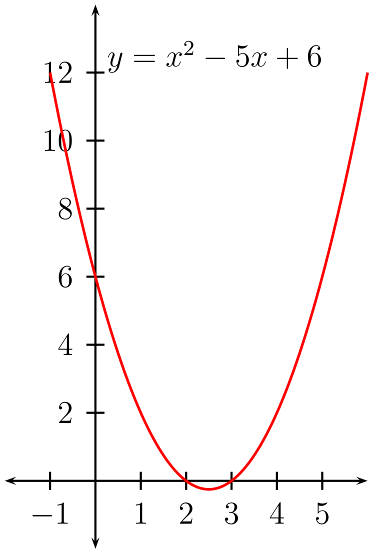
También podemos determinar el dominio y el recorrido de ésta función usando la gráfica

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x+5 \end{array}$$

Ejemplo 107 *Graficar la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.*

Para graficar, usamos el hecho que $y = x^2 - 5x + 6$ es una parábola, que podemos reescribir como $(x - \frac{5}{2})^2 = 4\frac{1}{4}(y + \frac{1}{4})$, cuyo vértice esta en $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, para tener una mejor grafica tomemos algunos puntos que pertenece a la parábola, para ello

x	y
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2



Usando la grafica podemos constatar que el dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $[-\frac{1}{4}, \infty[$. Revicemos el recorrido para ello consideremos la ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 - y = & \; 0 \\ x = & \; \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6-y)}}{2} \\ x = & \; \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24 + 4y}}{2} \\ x = & \; \frac{5 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2} \end{aligned}$$

Luego la única restrición es el discriminante es no negativo, luego

$$\begin{aligned} 1 + 4y & \geq 0 \\ 4y & \geq -1 \\ y & \geq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto el recorrido de f es $[-\frac{1}{4}, \infty[$.

3.3. Modelación

Modelar matemáticamente una situación de la vida cotidiana se refiere a identificar un problema con una expresión matemática concreta, ya que teniendo esta expresión podemos obtener más información sobre la situación en casos más generales.

Esta expresión matemática puede expresarse mediante un enunciado o mediante una ecuación. En el siguiente ejemplo encontramos una situación la cual se puede modelar con una función.

Ejemplo 108 *Cuando hablamos del impuesto a la venta de ciertos artículos, nos referimos a una situacíon de la vida diaria la cual podemos modelar de la siguiente forma ; si a x le asignamos el valor del artículo y a T el impuesto a la venta el cual es de un 19 % sobre el valor de x y si T y x están dados en pesos, entonces podemos expresar T en función de x de la siguiente manera:*

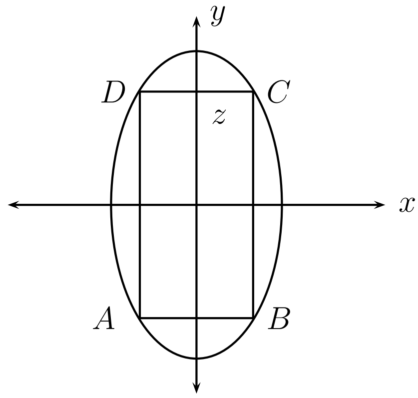
$$T(x) = \frac{19}{100} \cdot x$$

con $x > 0$

Es decir, si tenemos un artículo cuyo valor es de \$200 el impuesto a la venta se puede calcular usando la expresión matemática encontrada:

$$T(200) = \frac{19}{100} \cdot 200 = 38$$

Ejemplo 109 *Considere un rectangulo ABCD con sus lados paralelos a los ejes, inscrito en la elipse* $9x^2 + 4y^2 = 36$*. Sea* z *la distancia entre un lado vertical del rectángulo y el eje* y*.*



Determine el área del rectángulo en función de z *, expresando claramente el dominio.*

Solución: El área del rectángulo, es el producto de las longitudes de los lados, para ello sean

$$|\overline{AB}| = 2z \wedge |\overline{BC}| = 2y$$

Luego el área del rectángulo en función de z y de y es la siguiente:

$$A = 2z \cdot 2y = 4zy$$

Como el punto C pertenece a la elipse entonces satisface la ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$, despejamos y

$$\begin{aligned} 9z^2 + 4y^2 &= 36 \\ 4y^2 &= 36 - 9z^2 && /(\tfrac{1}{4}) \\ y^2 &= \tfrac{36}{4} - \tfrac{9}{4}z^2 / \sqrt{} && \tfrac{36}{4} - \tfrac{9}{4}z^2 > 0 \\ |y| &= \sqrt{\tfrac{36}{4} - \tfrac{9}{4}z^2} \\ |y| &= \tfrac{1}{2}\sqrt{36 - 9z^2} \\ |y| &= \tfrac{1}{2}\sqrt{9(4 - z^2)} \end{aligned}$$

Como y es una distancia entonces el valor absoluto es positivo

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2}$$

donde $4 - z^2 > 0$.

Por lo tanto, el área en función de z queda determinada como sigue

$$A(z) = 4z \cdot \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2}$$

$$A(z) = 6z\sqrt{4 - z^2}$$

Ahora veremos cual es el dominio.

$$\begin{array}{rll} 4 - z^2 & \geq 0 & \\ 4 & \geq z^2 & /\sqrt{} \\ 2 & \geq |z| & \end{array}$$

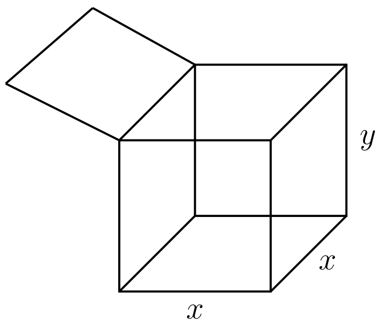
$$-2 \leq z \leq 2$$

Como z es una distancia entonces

$$DomA(z) =]0, 2[.$$

Los extremos no se incluye, ya que las linea, no forma un rectángulo

Ejemplo 110 *Se desea construir una caja con tapa de base cuadrada con área no mayor de 100 cm^2 como la de la figura, de volumen 252 cm^3. Si el costo de la tapa es \$2 por cm^2, la base \$5 por cm^2 y el de los lados es de \$3 por cm^2, exprese el costo c como función de x y el dominio de $f(c)$*



Solución:

$$V = 252cm^3 \Longrightarrow x^2y = 252$$

El costo de la tapa es de \$2 por cm^2. La tapa tiene x^2cm^2, por lo tanto el costo de la tapa es $\$2x^2$.

El costo de la base es de \$5 por cm^2. La base tiene x^2cm^2, por lo tanto el costo de la base es $\$5x^2$.

El costo de los lados es de \$3 por cm^2. Cada lado tiene $xycm^2$,por lo tanto el costo de la base es de $\$12xy$.

El costo total de la caja es:

$$c = 2x^2 + 5x^2 + 12xy$$

pero $y = \frac{252}{x^2}$
Entonces la función queda determinada como

$$c(x) = 7x^2 + 12x \cdot \frac{252}{x^2}$$

$$c(x) = 7x^2 + \frac{3024}{x}$$

donde el dominio de $f(c)$ es $]0, 10[$

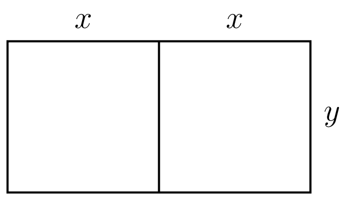
3.3.1. Ejercicios Propuestos

1. Si el radio basal r de un cono circular recto aumenta en un $x\,\%$, mientras que su altura h disminuye en un $20\,\%$ formule una función en términos de x que permita obtener en qué porcentaje varían:

   a) El área basal del cono.
   b) Si el radio aumenta en $15\,\%$ ¿en qué porcentaje varían el área basal y el volumen del cono?.

2. Una caja rectangular con la parte superior abierta tiene un volumen de $10m^3$. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material de la base tiene un costo de 10 dólares por m^2, el material de las caras laterales tiene un costo de 6 dólares por m^2. Expresar el costo de los materiales en función del ancho de la base.

3. En una parcela, se desea encerrar dos porciones de terreno de igual área (como en la figura) con una malla de longitud L. Expresar el área de la parcela en función de x.



4. El área de una piscina rectangular con bordes es de $18cm^2$. Si el borde superior e inferior miden $\frac{1}{3}m$ y los bordes laterales miden $\frac{1}{4}m$. Expresar el área comprendida entre los bordes en función de uno de los lados de la piscina.

5. La asistencia media en un cine en el que la entrada vale \$1200 es de 100 personas. El empresario cree que cada vez que se reduce el precio en \$80, el número de espectadores aumenta en 20.

    a) Determine la recaudación R en función del precio p.
    b) ¿Qué precio y número de espectadores producirán la mayor asistencia?.
    c) ¿Cuál es la recaudacion máxima por sesión?.

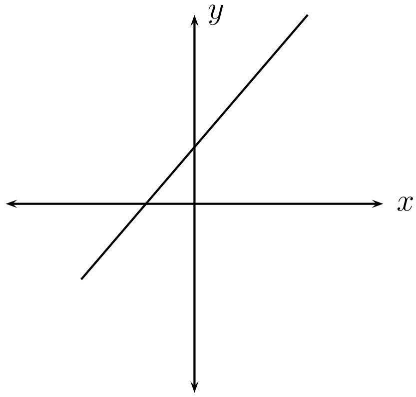
3.4. Tipos de Funciones

Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow B$ una función real.
Podemos clasificar algunas funciones reales como sigue a continuación:

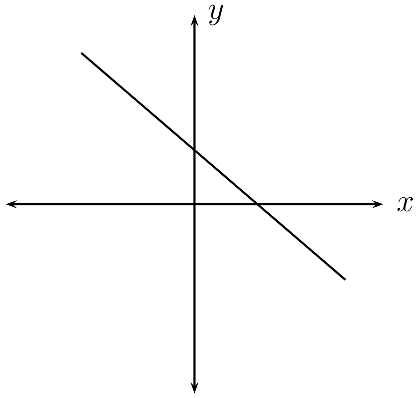
Funciones Lineales

Son funciones de la forma $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & mx+b \end{array}$ con $m, b \in \mathbb{R}$.

Si $y = f(x)$ entonces tenemos la ecuación $y = mx + b$ y su gráfica corresponde a una recta de pendiente m. La inclinación o pendiente de la recta depende del valor de m.
Si $m > 0$ y $b \neq 0$ su gráfica es la siguiente:



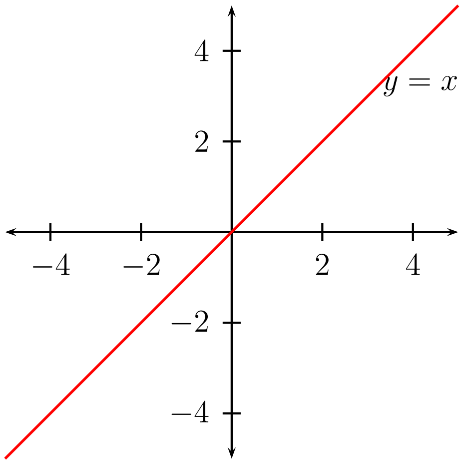
Si $m < 0$ y $b \neq 0$ se grafica como sigue:



Si $m = 1$ y $b = 0$, entonces llamaremos a esta función Identidad y se define como:

$$\begin{array}{rccl} Id: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & Id(x) = x \end{array}$$

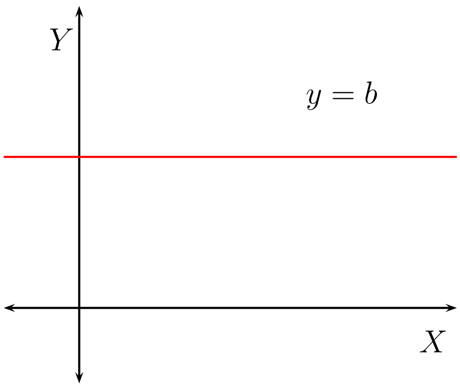
Su gráfica :



Si $m = 0$ y $b \neq 0$,entonces la función se llama función constante b y se denota por

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & b \end{array}$$

Gráficamente:



pendiente igual a 0

Funciones Cuadráticas:

Son funciones de la forma

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

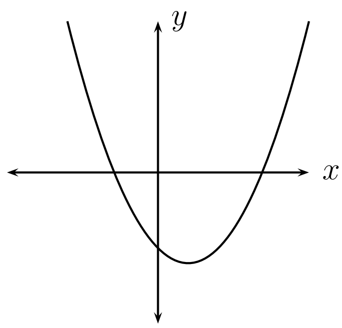
con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
Si $y = f(x)$ entonces $y = ax^2 + bx + c$, luego la gráfica de la función corresponde a una parábola.

Para conocer la gráfica de una parábola es útil calcular su vértice

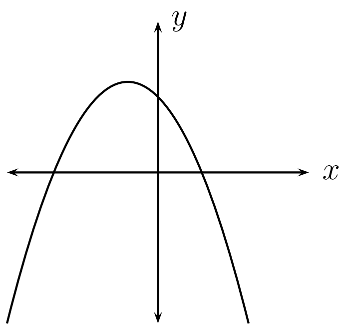
$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a} \right)$$

donde $\triangle = b^2 - 4ac$ es el discriminante de la ecuación de segundo grado y las intersecciones con el eje X, si existen. Lo cual depende del discriminante, su nombre se debe a que discrimina si la ecuación tiene o no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Cuando $a > 0$ su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia arriba.



Cuando $a < 0$ su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia abajo.

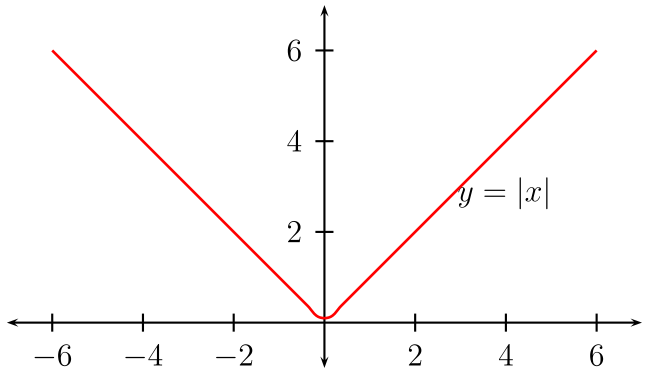


Función Valor Absoluto:

Esta función se define como:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

La gráfica de la función es la siguiente:

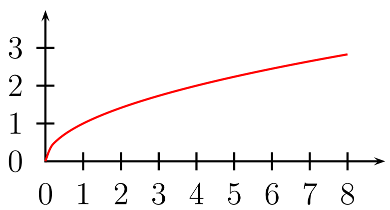


Función Raíz Cuadrada:

Esta función se define como:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

La gráfica de la función es la siguiente:

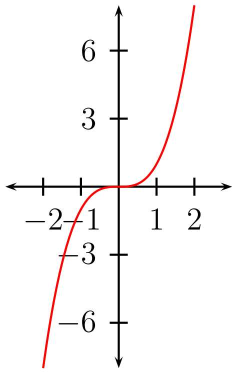


Función Cúbica:

Esta función se define como :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

Gráficamente:



Función Parte Entera:

Dado un número real α, se puede descomponer en una suma separando su parte entera

$$[\alpha] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq \alpha\}$$

luego la parte decimal se define

$$d(\alpha) = \alpha - [\alpha]$$

o bien

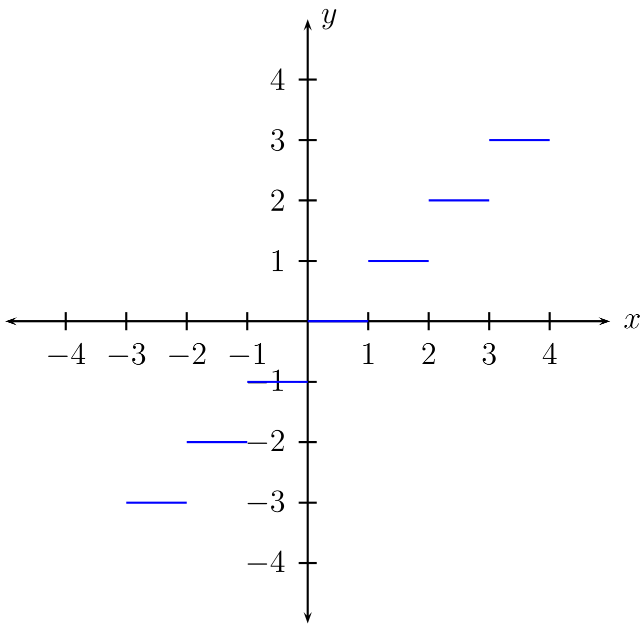
$$\alpha = [\alpha] + d(\alpha)$$

donde $[\alpha]$ es un número entero y $d(\alpha)$ un número decimal, $0 \leq d(\alpha) < 1$.

Luego la función parte entera se define como:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Su gráfica:



3.4.1. Álgebra de Funciones

Definición 37 *Sean f y g funciones y sea $D = Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$ entonces se pueden definir nuevas funciones.*

1.- La suma de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f+g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

2.- La diferencia de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f-g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-g(x) \end{array}$$

3.- El producto de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f\cdot g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array}$$

4.- El producto por una escalar se define como:

$$\begin{array}{rccc} \alpha f: & Dom(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{array}$$

5.- Si $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \neq \phi$ entonces cuociente de f con g se define por

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & D' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

6.- Sean A, B, C subconjuntos de números reales y sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ dos funciones tales que

$$A' = \{x \in A \mid f(x) \in C\} \neq \phi.$$

Entonces se define la compuesta de f y g dada por:

$$\begin{array}{rccc} (g\circ f): & A' & \longrightarrow & D \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Claramente tenemos que $A' = Dom(g \circ f)$

Observación: Un caso particular donde ésta definición se cumple, es cuando tenemos que $B \subseteq C$ o $Rec(f) \subseteq C$, entonces $Dom(g \circ f) = Dom(f) = A'$

Ejemplo 111 *Sean*

$$\begin{array}{rccc} f: & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$$

Encontrar la suma, la resta, el producto y el cuociente de f con g.

Solución: El dominio de f es $Dom(f) = [-2, 2]$ y el de g es $Dom(g) = \mathbb{R}$.

Luego
$$Dom(f) \cap Dom(g) = [-2, 2] \neq \phi$$

La suma de f y g

$$\begin{array}{rrcl} (f+g): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} + (3x+1) \end{array}$$

La diferencia

$$\begin{array}{rrcl} (f-g): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} - (3x+1) \end{array}$$

El producto

$$\begin{array}{rrcl} (fg): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} \cdot (3x+1) \end{array}$$

El cuociente

$$\begin{array}{rrcl} \left(\dfrac{f}{g}\right): & [-2,2] - \{\frac{-1}{3}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} \end{array}$$

Ejemplo 112 *Sea*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Encontrar $f \circ f$, $f \circ f \circ f$

Solución: Sabemos que $Recf \subseteq Domf$, luego $Dom(f \circ f) = Domf$, calculemos ahora la imagen.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

luego tenemos

$$\begin{array}{rccl} f \circ f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

La otra compuesta la obtenemos

$$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(x) = \frac{1}{x}$$

así tenemos

$$\begin{array}{rccl} f \circ f \circ f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Ejemplo 113 *Sean f y g funciones dadas por*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x-2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x + \sqrt{x} \end{array}$$

Determinar $g \circ f$ *y* $f \circ g$.

Solución: Primero veremos el dominio de la función

$$\begin{array}{rcl}
Dom(g \circ f) & = & \{x \in Dom f \ \mid \ f(x) \in Dom g\} \\
Dom(g \circ f) & = & \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ x - 2 \in \mathbb{R}^+\} \\
Dom(g \circ f) & = & \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ x - 2 > 0\} \\
Dom(g \circ f) & = &]2, +\infty[
\end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl}
(g \circ f)(x) & = & g(f(x)) \\
 & = & g(x - 2) \\
 & = & 5(x - 2) + \sqrt{x - 2} \\
 & = & 5x - 10 + \sqrt{x - 2}
\end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl}
g \circ f : &]2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\
 & x & \longmapsto & 5x - 10 + \sqrt{x - 2}
\end{array}$$

Ahora veremos el dominio de la otra función

$$\begin{array}{rcl}
Dom(f \circ g) & = & \{x \in Dom g \ \mid \ g(x) \in Dom f\} \\
Dom(f \circ g) & = & \{x \in \mathbb{R}^+ \ \mid \ 5x + \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\
Dom(f \circ g) & = & \mathbb{R}^+
\end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl}
(f \circ g)(x) & = & f(g(x)) \\
 & = & f(5x + \sqrt{x}) \\
 & = & 5x + \sqrt{x} - 2
\end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl}
f \circ g : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\
 & x & \longmapsto & 5x + \sqrt{x} - 2
\end{array}$$

Ejemplo 114 *Sean f y g funciones dadas por*

$$\begin{array}{rccl}
f : & [1, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & 5 - \sqrt{x - 1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccl}
g : & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\
 & x & \longmapsto & \sqrt{x} + 2
\end{array}$$

Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución: Primero veremos el dominio de la función

$$\begin{array}{rcl}
Dom(g \circ f) & = & \{x \in Dom f \ \mid \ f(x) \in Dom g\} \\
Dom(g \circ f) & = & \{x \in [1, \infty[\ \mid \ 5 - \sqrt{x - 1} \in \mathbb{R}_0^+\} \\
Dom(g \circ f) & = & \{x \in [1, \infty[\ \mid \ 5 - \sqrt{x - 1} \geq 0\} \\
Dom(g \circ f) & = & \{x \in [1, \infty[\ \mid \ 5 \geq \sqrt{x - 1}\} \\
Dom(g \circ f) & = & \{x \in [1, \infty[\ \mid \ 26 \geq x\} \\
Dom(g \circ f) & = & [1, 26]
\end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl}(g \circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g(5-\sqrt{x-1}) \\ & = & \sqrt{5-\sqrt{x-1}}+2\end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & [1,26] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{5-\sqrt{x-1}}+2\end{array}$$

Ahora veremos el dominio de la otra función

$$\begin{array}{rcl} Dom(f \circ g) & = & \{x \in Domg \ \mid \ g(x) \in Domf\} \\ Dom(f \circ g) & = & \{x \in \mathbb{R}_0^+ \ \mid \ \sqrt{x}+2 \in [1,\infty[\} \\ Dom(f \circ g) & = & \{x \in \mathbb{R}_0^+ \ \mid \ \sqrt{x}+2 \geq 1\} \\ Dom(f \circ g) & = & \{x \in \mathbb{R}_0^+ \ \mid \ \sqrt{x} \geq -1\} \\ Dom(f \circ g) & = & \mathbb{R}_0^+ \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl}(f \circ g)(x) & = & f(g(x)) \\ & = & f(\sqrt{x}+2) \\ & = & 5-\sqrt{\sqrt{x}+2-1}\end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} f \circ g: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5-\sqrt{\sqrt{x}+1}\end{array}$$

Ejemplo 115 *Sean f y g dos funciones definidas como:*

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 3x+4 & si & x \in [0,2[\\ x+1 & si & x \in [2,4] \end{array}\right.\end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & [2,12] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & g(x) = \left\{\begin{array}{ccc} x^2 & si & x \in [2,5[\\ 4 & si & x \in [5,12] \end{array}\right.\end{array}$$

Determine $(g \circ f)$

Solución: Primero veremos su dominio

$$\begin{array}{rcl} Dom(g \circ f) & = & \{x \in Domf \ \mid \ f(x) \in Domg\} \\ Dom(g \circ f) & = & \{x \in [0,4] \ \mid \ f(x) \in [2,12]\} \end{array}$$

Para el primer caso $x \in [0,2[$ tenemos

$$\begin{aligned} 2 \leq f(x) \leq 12 \\ 2 \leq 3x+4 \leq 12 \\ -2 \leq 3x \leq 8 \\ -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{8}{3} \end{aligned}$$

lo cual ocurre siempre.

Para el segundo caso $x \in [2,4]$ tenemos

$$\begin{aligned} 2 \leq f(x) \leq 12 \\ 2 \leq x+1 \leq 12 \\ 1 \leq x \leq 11 \end{aligned}$$

lo cual ocurre siempre. Luego

$$Dom(g \circ f = [0,4].$$

Calculemos la imagen de la compuesta.

Primer caso: Sea $x \in [0,2[$

$$(g \circ f)(x) = g(3x+4)$$

Caso A) $3x+4 < 5 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

$$g(3x+4) = (3x+4)^2$$

lo cual queda definida en el intervalo $[0, \frac{1}{3}[$.

Caso B) $3x+4 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

$$g(3x+4) = 4$$

definida en el intervalo de $[\frac{1}{3}, 2[$

Segundo caso: Sea $x \in [2,4]$

$$(g \circ f)(x) = g(x+1)$$

Caso A) $x+1 < 5 \Leftrightarrow x < 4$

$$g(x+1) = (x+1)^2$$

definida en el intervalo $[2,4[$

Caso B) $x+1 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 4$ luego $x = 4$

$$g(f(4)) = g(5) = 4$$

$$(g \circ f)(x) = \left\{ \begin{array}{cl} (3x+4)^2 & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 4 & \frac{1}{3} \leq x < 2 \text{ o } x = 4 \\ (x+1)^2 & 2 \leq x < 4 \end{array} \right.$$

Ejemplo 116 *Sean f y g dos funciones definidas como:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{x-1} & si & x > 1 \\ x^3 & si & x \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & g(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x > 0 \\ 2x+1 & si & x \leq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine $(g \circ f)$

Solución: Primero veremos su dominio

$$\begin{array}{rcl} Dom(g \circ f) & = & \{x \in Domf \ \mid \ f(x) \in Domg\} \\ Dom(g \circ f) & = & \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ f(x) \in \mathbb{R}\} \\ Dom(g \circ f) & = & \mathbb{R} \end{array}$$

Veremos a continución la imagen.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Para el primer caso $x > 1$ tenemos

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x-1})$$

pero tenemos que $\sqrt{x-1} > 0$, luego se tiene que:

$$g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x - 1$$

En el segundo caso tenemos que $x < 1$ luego

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3)$$

Debemos analizar

Caso A) $x^3 > 0 \Longleftrightarrow x \in]0, 1]$, luego tenemos que

$$g(x^3) = (x^3)^2 = x^6$$

Caso B) $x^3 \leq 0 \Longleftrightarrow x \in] - \infty, 0]$, luego tenemos que

$$g(x^3) = 2x^3 + 1$$

Así tenemos

$$(g \circ f)(x) \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} x-1 & si & x > 1 \\ x^6 & si & x \in]0,1] \\ 2x^3+1 & si & x \leq 0 \end{array} \right.$$

Ejercicios Propuestos

1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine el conjunto A igual al dominio màximo de f y el recorrido para ese dominio.

   a) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$
   b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
   c) $f(x) = x^2 + x - 1$
   d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$
   e) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{|x|-1}}$
   f) $f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^2}$

2. Dadas las siguientes funciones $\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{|x|}{x^2} \end{array}$ y $\begin{array}{rrcl} g: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array}$

   Determine:

   a) $Dom(g \circ f)$
   b) $(g \circ f)(x)$

3. Dadas las siguientes funciones

   $\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{|x|}{x^2} \end{array}$ y $g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & si \quad |x| \leq 1 \\ x^2+1 & si \quad |x| > 1 \end{cases}$ Determine $(g \circ f)$

4. Exprese la función $f(x) = \sqrt[5]{(x+x^4)^2}$ como la composición de tres funciones.

5. Encuentre una función $h(x)$ de manera que $(g \circ h)(x) = x$ siendo $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

6. Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ encontrar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

7. Sean f y g funciones tales que $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$
   Sea
   $$A(h) = \frac{f(x+h) - (f \circ g)(x+h)}{(f \cdot g)(x+h) - \frac{f(x+h)}{g(x+h)}}$$

   a) Calcule $A(h)$ en función de h y x.
   b) Calcule $A(1)$ y $A(-1)$.
   c) Graficar la función
   $$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x-1| + |2x+3| \end{array}$$

8. Graficar $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

9. Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x \geq 1 \\ x^2 - 1 & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x+3 & ; \quad x < 2 \\ 2x^2 + x - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Encontrar $(g \circ f)(x)$

3.4.2. Funciones Crecientes y Decrecientes

Definición 38 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función real.*
Se dice que:
a) f es creciente en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b))$$

b)f es decreciente en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b))$$

c)f es estrictamente creciente en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$$

d)f es estrictamente decreciente en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) > f(b))$$

Ejemplo 117 *La función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, pues*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)(x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y})$$

Ejemplo 118 *La función $f(x) = mx + b$ es estrictamente decreciente si $m < 0$. Sean $u, v \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que:*

$$\begin{aligned} u < v \Longrightarrow \quad mu &> mv \\ mu + b &> mv + b \\ f(u) &> f(v) \end{aligned}$$

Análogamente si $m > 0$ entonces f es creciente.

Ejemplo 119 *La función $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ y la función $-x^2$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$*

Proposición 45 *Si f y g son funciones estrictamente crecientes tales que $Rec(f) \subset Dom(g)$ entonces $g \circ f$ es una función estrictamente creciente definida en $Dom(f)$.*

Demostración: Por definición anterior sabemos que si $Rec(f) \subseteq Dom(g)$ entonces $Dom(g \circ f) = Dom(f)$. Luego sean $x, y \in Dom(g \circ f)$ tales que $x < y$ entonces como f es estrictamente creciente se tiene que

$$f(x) < f(y)$$

y como g también es estrictamente creciente se tiene

$$g(f(x)) < g(f(y))$$

luego

$$x < y \Rightarrow (g \circ f)(x) < (g \circ f)(y)$$

$\square$

Definición 39 (Funciones Monótonas) *Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice monótona si sólo si es creciente o decreciente en el dominio de f*

3.4.3. Funciones Biyectivas

Definición 40 *Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice que es inyectiva si y sólo si*

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Es decir, f es inyectiva si y sólo si todo $y \in Rec(f)$ tiene una y sólo una preimágen en el $Dom(f)$.

Ejemplo 120 *Sean a y b en $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y f definida por:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax + b \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva.

Solución:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x) = f(y) & \Longrightarrow & ax + b & = & ay + b \\ & \Longrightarrow & ax & = & ay \\ & \Longrightarrow & x & = & y \end{array}$$

Luego f es inyectiva.

Ejemplo 121 *Sea f una función definida por:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} - \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{3x+2}{x-2} \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva.

Solución:

Sean $x, y \in \mathbb{R} - \{2\}$ tales que

$$\begin{array}{rrcl} f(x) = f(y) & \Longrightarrow \quad \dfrac{3x+2}{x-2} & = & \dfrac{3y+2}{y-2} \\ & \Longrightarrow \quad (3x+2)(y-2) & = & (3y+2)(x-2) \\ & \Longrightarrow \quad 3xy+2y-6x-4 & = & 3xy+2x-6y-4 \\ & \Longrightarrow \quad 2y-6x & = & 2x-6y \\ & \Longrightarrow \quad 8y & = & 8x \\ & \Longrightarrow \quad y & = & x \end{array}$$

Luego f es inyectiva.

Ejemplo 122 *Sea f una función definida por:*

$$\begin{array}{rcl} f: \ [1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+2x-2 \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva.

Solución:

Sean $x, y \in [1, \infty[$ tales que

$$\begin{array}{rrcl} f(x) = f(y) & \Longrightarrow \quad x^2+2x-2 & = & y^2+2y-2 \\ & \Longrightarrow \quad x^2-y^2+2x-2y & = & 0 \\ & \Longrightarrow \quad (x+y)(x-y)+2(x-y) & = & 0 \\ & \Longrightarrow \quad (x-y)(x+y+2) & = & 0 \\ & \Longrightarrow \quad x-y=0 & \vee & x+y+2=0 \\ & \Longrightarrow \quad x=y & \vee & x+y=-2 \end{array}$$

Como $x, y \geq 1$, luego $x+y \geq 2$, por lo tanto, $x+y=-2$ es falso, así tenemos que $x=y$, con lo cual f es inyectiva.

Ejemplo 123 *Sea la función*

$$\begin{array}{rcl} f: \ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x > 2 \\ x+2 & si & x \leq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine si f es inyectiva.

Solución:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$.

Primer caso: $x, y \in]2, \infty[$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & y^2 \\ |x| & = & |y| \\ x & = & y \end{array}$$

Segundo caso: $x, y \in]-\infty, 2]$

$$\begin{array}{rcl} x+2 & = & y+2 \\ x & = & y \end{array}$$

Tercero Caso: $x \in]2, \infty[, y \in]-\infty, 2]$, para este caso, veremos si es posible que $f(x) = f(y)$, para ello calculemos el recorrido.

$$u = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{u} = x$$

donde $u \geq 0 \wedge \sqrt{u} > 2$, por lo tanto $u > 4$.
así tenemos que $f(x) > 4$,

$$v = y + 2 \Leftrightarrow v - 2 = y$$

donde $v - 2 \leq 2$, por lo tanto $v \leq 4$, con lo cual $f(y) \leq 4$.
Es decir, $4 < f(x) = f(y) \leq 4$. que es imposible. Con lo cual f es inyectiva

Ejemplo 124 *Sea la función*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{x-1} & si & x > 1 \\ x^3 & si & x \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine si f es inyectiva.

Solución:
Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$.
Primer caso: $x, y \in]1, \infty[$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x-1} & = & \sqrt{y-1} \\ x-1 & = & y-1 \\ x & = & y \end{array}$$

Segundo caso: $x, y \in]-\infty, 1]$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 \\ x & = & y \end{array}$$

Tercero Caso: $x \in]1, \infty[, y \in]-\infty, 1]$, para este caso, veremos si es posible que $f(x) = f(y)$, para ello calculemos el recorrido.

$$u = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow u^2 + 1 = x$$

donde $u \geq 0 \wedge u^2 + 1 > 1$, por lo tanto $u > 0$.
así tenemos que $f(x) > 0$,

$$v = y^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{v} = y$$

donde $\sqrt[3]{v} \leq 1$, por lo tanto $v \leq 1$, con lo cual $f(y) \leq 1$.
Es decir, hay elementos en común en los recorridos, por ejemplo $u = v = \frac{1}{2}$. Así tenemos que $x = \frac{5}{4}, y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Con lo cual f no es inyectiva

Proposición 46 *Si f es una función estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente, entonces f es inyectiva.*

Demostración: Supongamos que f es una función estrictamente creciente, es decir:

$$(\forall a, b \in Dom(f))(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$$

y supongamos que f no es inyectiva, por lo tanto existirán $a, b \in Dom(f)$ tales que

$$f(a) = f(b) \wedge a \neq b$$

donde

$$a > b \vee a < b (\Rightarrow\Leftarrow)$$

La demostración es análoga si f es estrictamente decreciente. □

Definición 41 *Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice epiyectiva o sobreyectiva si y sólo si $Rec(f) = B$.*

Definición 42 *Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*

Proposición 47 *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones. Entonces:*
i) f y g son inyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es inyectiva.
ii) f y g son sobreyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración :

Primer caso i:

Sean f y g dos funciones inyectivas y $x_1, x_2 \in Dom(g \circ f) = A$ tal que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) &= (g \circ f)(x_2) \\ g(f(x_1)) &= (g(f(x_2))) \\ f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

como f y g son inyectivas.

Segundo caso ii:

Sean f y g dos funciones epiyectivas luego el $Recf = B$ y $Recg = C$

Sea $x \in C$ como g es sobreyectiva $\exists y \in B$ tal que $g(y) = x$, luego como f es sobreyectiva $\exists z \in A$ tal que $f(z) = y$. Entonces

$$\begin{aligned} (g \circ f)(z) &= g(f(z)) \\ (g \circ f)(z) &= g(y) \\ (g \circ f)(z) &= x \\ Rec(g \circ f) &= C \end{aligned}$$

□

Por lo tanto $g \circ f$ es sobreyectiva.

Ejemplo 125 *Dada la función g definida por*

$$\begin{aligned} g: \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = \tfrac{x}{x^2+5} \end{aligned}$$

Determinar si g es inyectiva y en caso de que no lo sea redefinir la función para que sea inyectiva.

Solución: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) = g(b)$ entonces tenemos que

$$\begin{array}{rcl} g(a) & = & g(b) \\ \frac{a}{a^2+5} & = & \frac{b}{b^2+5} \\ a(b^2+5) & = & b(a^2+5) \\ ab^2+5a & = & ba^2+5b \\ ab^2-ba^2 & = & 5b-5a \\ ab(b-a) & = & 5(b-a) \\ ab(b-a)-5(b-a) & = & 0 \\ (b-a)(ab-5) & = & 0 \\ a=b & \vee & ab-5=0 \end{array}$$

Por lo tanto g no es inyectiva.
Luego podemos redefinir el dominio de g para que sea inyectiva.
Entonces debemos verificar que se cumpla que:

$$a = b \wedge ab \neq 5$$

$$\begin{array}{lrcl} & a=b & \wedge & (ab>5 \vee ab<5) \\ \Longrightarrow & (a=b \wedge ab>5) & \vee & (a=b \wedge ab<5) \\ \Longrightarrow & a^2>5 & \vee & a^2<5 \\ \Longrightarrow & |a|>\sqrt{5} & \vee & |a|<\sqrt{5} \\ \Longrightarrow & (a>\sqrt{5} \vee a<-\sqrt{5}) & \vee & (-\sqrt{5}<a \wedge a<\sqrt{5}) \\ \Longrightarrow & a \in]-\infty,-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5},\infty[& \vee & a \in]-\sqrt{5},\sqrt{5}[\end{array}$$

Pero $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$ pertenecen al dominio de inyectividad. Así tenemos

$$\begin{array}{rrcl} g_1: & [-\sqrt{5},\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g_2: &]-\infty,-\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g_3: & [\sqrt{5},\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+5} \end{array}$$

Ejemplo 126 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x > 0 \\ x^2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Determinar si f es biyectiva.

Solución:

1. Verificar si f es inyectiva.

   Si $x, y > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ -x &= -y \\ x &= y \end{aligned}$$

   Si $x, y \leq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x^2 &= y^2 \\ x &= y \end{aligned}$$

   Ahora si $x > 0, y \leq 0$ y $f(x) = f(y)$ se tiene que $-x = y^2$ lo cual es una contradicción, pues $-x < 0, y^2 \geq 0$ luego no puede ser que $f(x) = f(y)$, es decir que si $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$.

   Por lo tanto podemos concluir que f es inyectiva.

2. Verificar si f es sobreyectiva.

   Lo veremos en dos etapas:

   a) Si $x > 0$ se tiene que $f(x) = y = -x$ luego $x = -y \in \mathbb{R}$ y como $x > 0$ entonces $-y > 0$ luego $y < 0$.

   b) Si $x \leq 0$ se tiene que $f(x) = y = x^2 \in \mathbb{R}$ y $|x| = \sqrt{y} \in \mathbb{R} \quad \forall y \geq 0$ y como $x \leq 0$ entonces $x = -\sqrt{y} \leq 0$ así la única condición para y es que $y \geq 0$. Luego

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = \mathbb{R}$$

   Por lo tanto f es sobreyectiva.
   En consecuencia podemos concluir que f es biyectiva.

3.4.4. Función Inversa

Definición 43 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, diremos que f es invertible si y sólo si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $(f \circ g)(b) = b, \forall b \in B \wedge (g \circ f)(a) = a, \forall a \in A$.*

La función g se llama función inversa de f y se denota por f^{-1}.

Proposición 48 *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones invertibles entonces*

i) $g \circ f$ es una función invertible

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

ii) f^{-1} es una función invertible.

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Demostración :

Primer Caso:

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)(x) &= (f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g(f(x)))\\ &= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))))\\ &= f^{-1}(Id(f(x))\\ &= f^{-1}(f(x))\\ &= Id(x)\\ &= x\end{aligned}$$

Segundo Caso:

$$\begin{aligned}(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})(x) &= (g\circ f)\circ(f^{-1}(g^{-1}(x)))\\ &= g(f(f^{-1}(g^{-1}(x))))\\ &= g(Id(g^{-1}(x)))\\ &= g(g^{-1}(x))\\ &= Id(x)\\ &= x\end{aligned}$$

Luego $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

Supongamos que existe h tal que

$$\begin{aligned}h\circ(f^{-1}) &= Id\\ h\circ(f^{-1}) &= Id/\circ(f^{-1})^{-1}\\ h &= (f^{-1})^{-1}\\ h &= f\end{aligned}$$

Luego

$$h = f = (f^{-1})^{-1}$$

□

Proposición 49 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función entonces*

$$f \text{ es invertible } \Longleftrightarrow f \text{ es biyectiva.}$$

En este caso, su inversa está definida por

$$\begin{aligned}f^{-1}:\ B &\longrightarrow A\\ y &\longmapsto f^{-1}(y)\end{aligned}$$

donde

$$(\forall x\in A)(\forall y\in B)(f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x))$$

Demostración :

$\Rightarrow$) Supongamos que f^{-1} existe, entonces se cumple que $Dom(f^{-1}) = B$ y si $x = y$, entonces $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$.

Ahora el $Dom(f^{-1}) = B$ si y sólo si el recorrido de f es igual a B, es decir, f es sobreyectiva.

Demostraremos que f es inyectiva y para esto se debe cumplir que

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Sean $a, b \in A$ tal que $f(a) = f(b)$ por la primera hipótesis f^{-1} es función. Luego

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(f(a)) & = & f^{-1}(f(b)) \\ a & = & b \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

$\Leftarrow$) Supongamos que f es biyectiva y sea $f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in f\}$ la relación inversa, por ser f epiyectiva tenemos que $Dom(f^{-1}) = B$, entonces debemos demostrar que si $(x, w) \in f^{-1}$ y $(x, t) \in f^{-1}$ entonces $w = t$.

Como $(x, w) \in f^{-1}$ y $(x, t) \in f^{-1}$ entonces $(w, x) \in f$ y $(t, x) \in f$. Es decir,

$$f(w) = x = f(t)$$

luego como f es inyectiva se tiene que

$$w = t$$

$\square$

Observación: Sea $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ una función invertible y sea $f^{-1} : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ su función inversa, entonces $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ son curvas simétricas con respecto a la diagonal $y = x$.

Ejemplo 127 *Sea*

$$\begin{array}{rrl} f: & A \longrightarrow & B \\ & x \longmapsto & \sqrt{x^3 - 1} \end{array}.$$

Determine el dominio máximo de f y el recorrido de modo que sea biyectiva y luego determine f^{-1}.

Solución: La función tiene como dominio el intervalo $[1, \infty[$ pues

$$\begin{array}{rcll} x^3 - 1 & \geq & 0 & \\ x^3 & \geq & 1 & /\sqrt[3]{} \\ x & \geq & 1 & \end{array}$$

Su recorrido queda determinado por

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x^3 - 1} & = & y & /()^2, y \geq 0 \\ x^3 - 1 & = & y^2 & \\ x^3 & = & y^2 + 1 & /\sqrt[3]{} \\ x & = & \sqrt[3]{y^2 + 1} & \end{array}$$

Entonces el recorrido de f es el intervalo $[0, \infty[$.

Ahora debemos verificar si f es inyectiva, para ésto se debe cumplir que

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Sean $a, b \in Dom f$ tal que $f(a) = f(b)$ luego

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{a^3-1} & = & \sqrt{b^3-1} & /()^2 \\ a^3-1 & = & b^3-1 & /+1 \\ a^3 & = & b^3 & /\sqrt[3]{} \\ a & = & b & \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

A continuación veremos si f es sobreyectiva

$$\begin{array}{rcll} \sqrt[3]{y^2+1} & \geq & 1 & /()^3 \\ y^2+1 & \geq & 1 & \\ y^2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Luego f es sobreyectiva.

Entonces podemos concluir que f es biyectiva y que existe la inversa de f y queda determinada como

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & [0,\infty[& \longrightarrow & [1,\infty[\\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \end{array}$$

Ejemplo 128 *Sea la función*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x > 2 \\ x+2 & si & x \leq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine la inversa de f.

Solución: Por ejemplo 123 tenemos demostrado que f es biyectiva.

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{x} & si & x > 4 \\ x-2 & si & x \leq 4 \end{array} \right. \end{array}$$

Definición 44 (Función Periódica de Período p) *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $p > 0$ diremos que f es una función periódica de período p el cual es el menor número positivo que cumple*

$$f(x+p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Observación: Con ésta propiedad tenemos que:

$$f(0+p) = f(0) = f(p)$$

$$f(2p) = f(p+p) = f(p)$$

$$f(0) = f(-p+p) = f(-p)$$

Definición 45 (Funciones Pares e impares) *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, tal que siempre que x esté en el dominio A entonces $-x$ también está en A*

1. *f es par si y sólo si $f(-x) = f(x) \forall x \in A$*

2. *f es impar si y sólo si $f(-x) = -f(x) \forall x \in A$*

Ejemplo 129 *Sea $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 8$. Demostrar que f es una función par.*

Solución: Sea $x \in Dom f$ tal que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^4 - 3(-x)^2 + 8 \\ &= 4x^4 - 3x^2 + 8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Luego es una función par.

Ejemplo 130 *Sea $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x$. Demostrar que f es una función impar.*

Solución: Sea $x \in Dom f$ tal que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 + 2(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 - 2x \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Luego es una función impar.

Ejercicios Resueltos

1. Sea $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x} \end{array}$

   a) Determinar si f es inyectiva.

   b) Determinar si f es sobreyectiva.

   Solución: Verificaremos que f sea inyectiva

   $$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

   Sean $a, b \in Dom f$ tal que

   $$\begin{array}{rcll} f(a) & = & f(b) & \\ \frac{a-1}{a} & = & \frac{b-1}{b} & \\ ba - b & = & ab - a & / - ab \\ -b & = & -a & / \cdot (-1) \\ b & = & a & \end{array}$$

   Por lo tanto f es inyectiva.

   Verificar si f sobreyectiva. Esto sucede si y sólo si

   $$Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Sea $y \in Recf$, luego existe $x \in Domf$ tal que

$$\begin{array}{rcl} y &=& f(x) \\ y &=& \frac{x-1}{x} \\ xy - x &=& -1 \\ x(y-1) &=& -1 \\ x &=& \frac{-1}{y-1} \end{array}$$

Así tenemos que

$$Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Por lo tanto f es sobreyectiva.

2. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones y $h = g \circ f$. Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces h también lo es.

   Demostración: Sean $a, b \in Dom(h)$ tal que $h(a) = h(b)$

$$\begin{array}{rcl} h(a) &=& h(b) \\ (g \circ f)(a) &=& (g \circ f)(b) \\ g(f(a)) &=& g(f(b)) \\ f(a) &=& f(b) \\ a &=& b \end{array}$$

   Por lo tanto h es inyectiva.

   $\square$

3. Sea

$$\begin{array}{rcl} f : A &\longrightarrow& B \\ x &\longmapsto& \frac{1}{\sqrt{1-x}} \end{array}$$

   Determine f^{-1}.

   Solución: El dominio de f es el intervalo $]-\infty, 1[$ pues

$$\begin{array}{rcl} 1 - x &>& 0 \\ 1 &>& x \end{array}$$

   El recorrido de f es

$$\begin{array}{rcll} y &=& \frac{1}{\sqrt{1-x}} & /()^2, y > 0 \\ y^2 &=& \frac{1}{1-x} & \\ y^2 - y^2x &=& 1 & \\ \frac{y^2-1}{y^2} &=& x & , y \neq 0 \end{array}$$

$$Rec(f) =]0, +\infty[$$

   Veremos si f es inyectiva.

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(b) \\
\frac{1}{\sqrt{1-a}} &= \frac{1}{\sqrt{1-b}} \\
\sqrt{1-b} &= \sqrt{1-a} \quad /()^2 \\
1-b &= 1-a \qquad /-1 \\
b &= a
\end{aligned}$$

Veremos si f es sobreyectiva.

El recorrido ya está calculado y es $Recf =]0,+\infty[$

Luego decimos que f es epiyectiva y en consecuencia f es biyectiva.

Entonces existe la inversa de f y se define por:

$$\begin{aligned}
f^{-1} :]0,+\infty[&\longrightarrow]-\infty,1[\\
x &\longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{x^2}
\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Para cada una de las siguientes funciones. Determine el dominio y el recorrido y determine si son inyectivas y sobreyectivas. Si no lo son, redefinalos para que sean funciones biyectivas.

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$

   b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1+|x|}}$

   c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

   d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

   e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}+1}$

2. Demuestre que

$$\begin{aligned}
f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto x^3
\end{aligned}$$

   es una función inyectiva

3. Sea

$$\begin{aligned}
f :]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

   Verificar si f es biyectiva.

4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x & , si \quad -1 \le x \le 0 \\ x^3 & , si \quad 0 < x \le 2 \end{cases}$$

   a) ¿Es f inyectiva?. Justifique.
   b) Encuentre $f^{-1}(x)$.
   c) Grafique $y = f^{-1}(x)$.

5. Sea $f(x) = \frac{5x+3}{x-4}$

   a) Determine si f es una función biyectiva. Justifique.

   b) Si es biyectiva, calcule $f^{-1}(x)$.

6. Sea $f(x) = x^2 + x + 3$.Determine el dominio y recorrido de manera que f sea una función biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.

7. Sea
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 2 + \sqrt{x} & , si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$
   Determine un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que f sea biyectiva.

8. Sean $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 3x \end{array}$ y $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x + 1 \end{array}$

   a) Demuestre que g es biyectiva.
   b) Encuentre una función h indicando su dominio tal que $g \circ h = f$.
   c)¿Es f biyectiva?.Si no lo es restrigir f de modo que sea biyectiva y encontrar f^{-1}.

3.5. Funciones Exponenciales

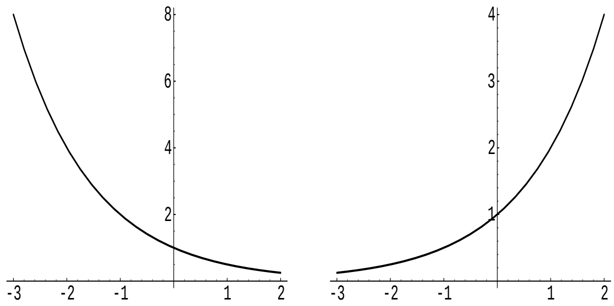
Teorema 50 *Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ entonces existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*
$$f(x) = a^x$$
y cumple con las siguientes propiedades.

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $a^0 = 1$
2. $a^{(x+y)} = a^x a^y$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $a^{\alpha x} = (a^x)^\alpha = (a^\alpha)^x$
5. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
6. $(ab)^x = a^x b^x$
7. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$
8. Si $0 < a < 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función decreciente.
9. Si $a > 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función creciente

Definición 46 *Esta función se llama función exponencial en base a y se denota por* $\exp_a$

Su gráfica es la siguiente:



$0 < a < 1$ $\qquad\qquad$ $a > 1$

Ejemplo 131 *1.* $(3^3)(3^4) = 3^{3+4} = 3^7$

2. $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

3. $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

4. $(3^x)^4 = 3^{4x}$

5. $(\frac{1}{3})^{-x} = (3^{-1})^{-x} = 3^x$

3.5.1. Funciones Logaritmicas

Teorema 51 *Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ entonces la función exponencial en base a es biyectiva, por lo tanto existe la función inversa.*

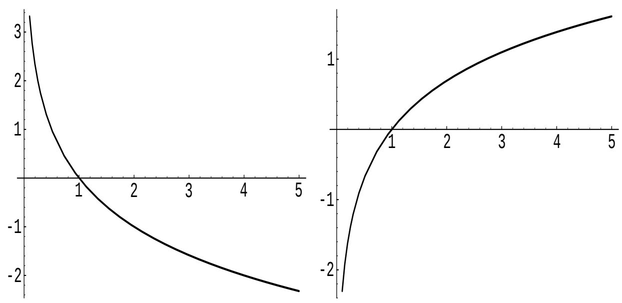
Definición 47 *La función inversa de la exponencial en base a se llama función logarítmo en base a y la denotaremos como $\log_a$ Es decir:*

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow \exp_a(y) = x$$

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ podemos definir la función como:

$$\begin{aligned} \log_a : \ & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \log_a(x) = y \end{aligned}$$

Graficamente :



$0 < a < 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $a > 1$

Propiedades
Sean $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x, y \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$ entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$
4. $\log_a(1) = 0$
5. $\log_a(a^r) = r$
6. $\log_a(x) = \log_a(y) \Longleftrightarrow x = y$

Demostración:
Sea $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$ entonces $a^u = x$ y $a^v = y$
Para (1) tenemos que

$$\log_a(xy) = \log_a(a^u a^v) = \log_a a^{u+v} = u + v$$

Luego

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

En (2)

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(a^u a^{-v}) = \log_a a^{u-v} = u - v$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

En (3)

$$\log_a x^r = \log_a(a^u)^r = \log_a a^{ru} = ru$$

$$\log_a x^r = r\log_a x$$

□

Las propiedades siguientes quedan como tarea para el lector.

Ejemplo 132 *1.* $\log_{10} 10^3 = 3$ *pues* $10^3 = 1000$

2. $\log_2 1 = 0$ *pues* $2^0 = 1$

3. $\log_{10} x^2 y = 2\log_{10} x + \log_{10} y$

4. $\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$

Teorema 52 *(Cambio de base) Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demostración:

Sea $u = \log_a x, v = \log_b x$, entonces $a^u = x$ y $b^v = x$ así tenemos que

$$\begin{array}{rcl} a^u & = & b^v \\ \log_a a^u & = & \log_a b^v \\ u & = & v \log_a b \\ \log_a x & = & \log_b x \log_a b \\ \log_b x & = & \dfrac{\log_a x}{\log_a b} \end{array}$$

□

En consecuencia de las características de la función exponencial se deducen las siguientes propiedades para la función logarítmica.

a) Tienen logaritmo real solamente los números positivos. Los logaritmos de los números negativos no existen en el sistema de números reales.

b) El logaritmo de cero no está definido.

Ejemplo 133 *1. Si $y = \log_2 8$. Encontrar y.*

$$2^y = 8$$

$$y = 3$$

2. Si $\log_a \frac{1}{16} = 4$. Encontrar a.

$$a^4 = \frac{1}{16}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

3. Si $\log_a x = -2$. Encontrar x.

$$3^{-2} = y$$

$$\frac{1}{9} = y$$

3.5.2. Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Una ecuación que contiene una o más funciones logarítmicas de una o más incógnitas se llama ecuación logarítmica. Análogamente para las ecuaciones exponenciales.

Ejemplo 134 *Resolver la ecuación*

$$\log(x-2)+\log(x+1)+1=\log 40$$

Solución: Primeros veremos su restricciones, para ello,

$$x-2>0 \wedge x+1>0$$

Entonces $R=[2,+\infty[$

Luego la ecuación se resuelve usando la siguiente propiedades

$$\begin{array}{rcl}
\log(x-2)+\log(x+1)+1 &=& \log 40 \\
\log(x-2)+\log(x+1)+\log 10 &=& \log 40 \\
\log(x-2)(x+1)10 &=& \log 40 \\
(x-2)(x+1)10 &=& 40 \\
(x-2)(x+1) &=& 4 \\
x^2-x-6 &=& 0 \\
(x+2)(x-3) &=& 0 \\
x=-2 &\vee& x=3
\end{array}$$

pero $x=-2$, por restricción no es solución de la ecuación. Por lo tanto la solución es $\{3\}$

Ejemplo 135 *Resolver la ecuación*

$$\log 2+\log(4^{x-2}+9)=1+\log(2^{x-2}+1)$$

Solución: Veamos la restricciones

$$4^{x-2}+9>0 \wedge 2^{x-2}+1>0$$

Entonces $R=\mathbb{R}$.

Luego resolviendo la ecuación nos queda

$$\begin{array}{rcl}
\log 2+\log(4^{x-2}+9) &=& 1+\log(2^{x-2}+1) \\
\log 2(4^{x-2}+9) &=& \log 10(2^{x-2}+1) \\
2(4^{x-2}+9) &=& 10(2^{x-2}+1) \\
2^{2x}-20\cdot 2^x+64 &=& 0
\end{array}$$

Sea $u=2^x$ reemplazando obtenemos la ecuación cuadrática.

$$\begin{array}{rcl}
u^2-20u+64 &=& 0 \\
(u-16)(u-4) &=& 0 \\
u=16 &\vee& u=4 \\
2^x=16 &\vee& 2^x=4 \\
x=4 &\vee& x=2
\end{array}$$

Luego la solución de la ecuación es $\{2,4\}$

3.5.3. Inecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Ejemplo 136 *Resuelva la siguiente inecuación*

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2-4) > -2$$

Solución: El conjunto restricción para la inecuación cumple con:

$$\begin{array}{rcl} x^2-4>0 & \wedge & \log_5(x^2-4)>0 \\ x^2>4 & \wedge & x^2-4>1 \\ |x|>2 & \wedge & |x|>\sqrt{5} \end{array}$$

Luego $x \in]-\infty,-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5},+\infty[= R$
Resolviendo la inecuación ahora tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2-4) & > & -2 \\ \log_5(x^2-4) & < & (\frac{1}{3})^{-2} \\ x^2-4 & < & 5^9 \\ |x| & < & \sqrt{5^9+4} \\ -\sqrt{5^9+4} & < x < & \sqrt{5^9+4} \end{array}$$

Luego el conjunto solución es:

$$S=]-\sqrt{5^9+4},\sqrt{5^9+4}[\cap]-\sqrt{5^9+4},-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5},\sqrt{5^9+4}[$$

Ejemplo 137 *Resolver la inecuación*

$$\log_{3x}(9x)+\log_3(x^3)\leq 2$$

Solución: El conjunto restricción de la inecuación es $\mathbb{R}^+ - \{\frac{1}{3}\}$

$$\begin{array}{rcl} \log_{3x}(9x)+\log_3(x^3) & \leq & 2 \\ \frac{\log_3(9x)}{\log_3(3x)}+\log_3(x^3) & \leq & 2 \\ \frac{\log_3 9+\log_3 x}{\log_3 3+\log_3 x}+3\log_3(x) & \leq & 2 \end{array}$$

Sea $u=\log_3 x$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \frac{2+u}{1+u}+3u & \leq & 2 \\ \frac{2u+3u^2}{1+u} & \leq & 0 \\ \frac{u(2+3u)}{1+u} & \leq & 0 \\ u\leq -1 & \vee & -\frac{2}{3}\leq u\leq 0 \\ \log_3 x\leq -1 & \vee & -\frac{2}{3}\leq \log_3 x\leq 0 \\ x\leq 3^{-1} & \vee & 3^{-\frac{2}{3}}\leq x\leq 1 \end{array}$$

Pero $x>0$ y $x\neq\frac{1}{3}$ entonces

$$0<x<\frac{1}{3} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}\leq x\leq 1$$

El conjunto solución es

$$S =]0, \frac{1}{3}[\cup [\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}, 1]$$

Ejemplo 138

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) \leq 2$$

Solución: Primero veremos la Restricciones

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(x+1)(x-1) > 0$$

Por lo tanto

$$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[= R$$

Veremos los elementos que la satisface

$$\begin{array}{rrl} & \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) & \leq 2 \\ \iff & x^2-1 & \geq \frac{1}{4} \\ & x^2 - \frac{5}{4} & \geq 0 \\ & (x-\frac{\sqrt{5}}{2})(x+\frac{\sqrt{5}}{2}) & \geq 0 \end{array}$$

$$x \in]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty[= S_1$$

Luego la solución de la inecuación es:

$$S = R \cap S_1$$

$$x \in \left]-\infty, \frac{-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

Observación: Si $a \in]0,1[$ entonces $\log_a(x) \geq b \iff x \leq a^b$

Ejercicios Propuestos

1. Exprese como un solo logarítmo.

   a) $\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\log\frac{1}{2} - \log 15$

   b) $1 + \log_3 a + \frac{1}{2}\log_3 a^3 - 4\log_3 a^6$

   c) $2\log y - \frac{1}{4}\log(c-x) + \frac{1}{2}\log(x-2y+c)$

2. Resolver las siguientes ecuaciones.

   a) $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 = 0$

   b) $2^{2x+1} + 2^{x+3} = 10$

   c) $5^{2x+2} + 1 = (10+5^x)5^x$

d) $\dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{1}{3}$

e) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \left(\dfrac{27}{8}\right)^{(x-1)} = \dfrac{\log 4}{\log 8}$

f) $\log x^5 + \log^2 x + 6 = 0$

g) $(\log_2 x)(\log_2 x + 1) = 2$

h) $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$

i) $3\log_5 x - \log_5 32 = 2\log_{25}(\frac{x}{2})$

j) $\log_5(5^x - 7) - \log_{25} 324 = 2 - x$

k) $\log\sqrt{7-x}) = \log\sqrt{\log(100)+10} - \log\sqrt{x+1}$

l) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4(|x|-1) = 2$

m) $\log_{1/3}(x) + \log_9(x) = 1$

n) $\log_x(5x^2)(\log_5 x)^2 = 1$

3. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $a^{x^2}a^x = a^{3x+1}$ con $a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$

b) $a^{x^2+2x} = a^{6x-3}$ con $a \in]1,\infty[$

c) $b^{5x-6} = b^{x^2}$ con $b \in]0,1[$

d) $\dfrac{\log_2 x}{(\log_2 a)^2} - \dfrac{2\log_a x}{\log_{1/2} a} = (\log_{\sqrt[3]{a}} x)(\log_a x)$ con $a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$

e) $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + (\log_{2x} 2)(\log_{1/2} 2x) = 0$

4. Resolver las siguientes inecuaciones.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \leq 2$

b) $\log_3(x^2 - 3x - 4) < 1$

c) $\log_{\frac{x}{3}}(x(4-x)) \leq 1$

d) $\log_4 x + \log_4(x+1) < \log_4(2x+6)$

e) $\log_{1/2} x + \log_{1/2}(2x) > 1$

f) $\dfrac{\log_2(x - \frac{1}{2})}{\log_2 x} < 2$

g) $\log_9(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)) < 0$

h) $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 \leq 0$

i) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(x+1)) > 1$

j) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4(|x|-1) < 2$

k) $\log_x(3x-5) < 2$

l) $\log_x(3x+5) \leq 2$

m) $\log_{x+3}(x^2-x) < 2$

5. Hallar la función inversa de

$$y = \log_b x - \log_b(1+x), b > 0$$

6. Demostrar que

$$\log_b(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) = -\log_b(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})$$

7. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \log_{12} x \left(\dfrac{1}{\log_x 2} + \log_2 y \right) & = & \log_2 x \\ \log_2 x \log_3(x+y) & = & 3\log_3 x \end{array}\right|$$