Capítulo 1

Lógica y Conjunto

La lógica aparece como una necesidad de poder comunicarnos sin las ambigüedades cotidianas de la sociedad, ejemplo de ello lo encontramos en frases de uso común "nos vemos mañana" o tal vez "Que bueno que usted va dictar la asignatura", de otro modo "Me encanta trabajar en este lugar" es decir, no es fácil decidir si dichas afirmaciones son o no validas o ciertas, o simplemente un formalismos de cortesía.

Otro tipo de ambigüedad, aparecen cuando no tenemos claro el tiempo en el cual fue realizada la afirmación para decidir la veracidad, ejemplo de estas afirmaciones las son

i Hay un alumno en esta sala que vive en Quillota.

ii Algunos alumnos de esta sala viven en Quillota.

Donde la respuesta varía a través del tiempo.

Hay otras afirmaciones que con nuestras capacidades no podemos decidir si son verdaderas o falsas hoy, como por ejemplo:

i Voy a terminar esta carrera.

ii La teoría de la evolución es válida

Una ambigüedad más es la referida al universo donde fue realizada la afirmación, por ello es relevante tener claro el universo antes de responder si la afirmaciones es verdadera o falsa

Consideremos el universo de trabajo, el conjunto de los números enteros

a Todo número al cuadrado es un número no negativo

b Hay un número par.

c La división de dos número es un nuevo número.

Las mismas frases, ahora en el conjunto de los números reales:

En el caso de la afirmación (a), no hay dificultad de responder.

Para (b) la noción de número par no tiene sentido en los reales, ya que

i $4 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1$, y ii $3 = 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 2 \cdot 1 + 1$.

En $\mathbb{Q}$ no existen las nociones de números pares ni primos. Pero en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$, existen el concepto de número primo, que son aquellos que son divisibles sólo por si mismo, y el de número par, que son los múltiplos de dos, por ello aceptamos que el cero es un número par.

1.1 Lógica

Ahora iniciaremos las nociones básicas de lógica, enfatizando en las proposiciones, los conectivos, conjunto universo o relativo y los cuantificadores, de modo de eliminar las ambigüedades dichas anteriormente.

Definición 1.1.1 Una **Proposición** es una afirmación que en un contexto explícito, se puede decidir, si ella es verdaderas o falsas. $\Diamond$

Notación Las proposiciones se denotan por: p, q, r, s

Ejemplo 1.1.2

1. p : Hay un alumno que vive en Quillota en la asignatura de matemática que dicto hoy.
2. q : 0 es un número Real.
3. $r : 3 \in \mathbb{R}$

$\square$

El valor de verdad de una proposición es Verdadero o Falso y usamos las siguientes notaciones:

$p \equiv V$, para decir, que el valor de verdad de la proposición p es Verdadero.

$p \equiv F$, para decir, que el valor de verdad de la proposición p es Falso

1.1.1 Conectivos

Un conectivo es un símbolo que se utilizan para formar a partir de dos proposiciones una nueva proposición, llamada proposición compuesta y el valor de verdad de ella depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman y el conectivo usado.

Los siguiente símbolos son algunos conectivos habituales:

$$\vee, \quad \wedge, \quad \Rightarrow, \quad \Leftrightarrow, \quad \underline{\vee}.$$

1. La **disyunción**, cuyo símbolo es: $\vee$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción de dos proposiciones es verdadera solamente cuando al menos una de las proposiciones que la forman es verdadera. La proposición $p \vee q$ se lee "p o q"

2. La **conjunción**, cuyo símbolo es: $\wedge$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

   La conjunción de dos proposiciones es verdadera solamente cuando ambas proposiciones que la forman son verdadera. La proposición $p \wedge q$ se lee "p y q"

3. La **implicación**, cuyo símbolo es: $\Rightarrow$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

   La proposición $p \Rightarrow q$ se lee "p implica q" o "si p entonces q" y es falsa solamente cuando la primera proposición (antecedente) es verdadera y la segunda proposición (consecuente) es falsa.

4. La **equivalencia**, cuyo símbolo es: $\Leftrightarrow$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

   La proposición $p \Leftrightarrow q$ se lee "p es equivalente a q" o "p si y sólo si q" y es verdadera solamente cuando ambas proposiciones que la forman tienen el mismo valor de verdad.

5. La **disyunción exclusiva**, cuyo símbolo es $\underline{\vee}$

p	q	$p\underline{\vee}q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   La proposición $p\underline{\vee}q$ se lee "p o exclusivo q" y es falsa cuando ambas proposiciones que la forman tiene el mismo valor de verdad.

Observación: Una tabla de verdad, es un arreglo donde se colocan todos la posibles combinaciones de valores de verdad. En general cuando hay n proposiciones distintas, la tabla contiene 2^n combinaciones posibles de valores de verdad.

Ejemplo 1.1.3 Hacer una tabla de verdad para la proposición

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$$

$\square$

Solución 1.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Ejemplo 1.1.4 Hacer una tabla de valores para la proposición

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

$\square$

Solución 2.

p	q	$p \Rightarrow q$	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Observación: La proposición "$p \Rightarrow q$", en la literatura científica o matemáticas es frecuente encontrar otras manera en que se leen estos símbolos.

q si p
q siempre que p
p es condición suficiente de q
q es condición necesaria de p

En una frase concreta, como por ejemplo "si arrojo una piedra al agua entonces hay círculos concéntricos en el agua" se puede transcribir de la siguiente manera "hay círculos concéntricos en el agua si arrojo una piedra al agua" o "hay círculos concéntricos en el agua siempre que arrojo una piedra al agua".

Negación:[$\sim$;].

Sea p es una proposición, la negación de p se denota por: $\sim p$ o bien $\overline{p}$ y se lee "no p", y su valor de verdad es el contrario de la proposición original:

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Es importante destacar que $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$.

Ejemplo 1.1.5 Determinar el valor de verdad de la proposición $(1 = 2) \Rightarrow (3 + 1 = 2)$. $\square$

Solución 3. La proposición $(1 = 2)$ es falsa y la proposición $(3 + 1 = 2)$ también es falsa luego la proposición compuesta es verdadera. El anterior razonamiento lo podemos resumir usando algunos símbolos del siguiente modo.

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{1=2} & \Rightarrow & \underbrace{3+1=2} & & \\ \equiv & & \equiv & & \\ (F & \Rightarrow & F) & \equiv V \end{array}$$

Ejemplo 1.1.6 Realizar la tabla de verdad para la siguiente proposición :

$$((p \vee q) \wedge \bar{p}) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

$\square$

Solución 4.

p	q	$p \vee q$	$\bar{p}$	$(p \vee q) \wedge \bar{p}$	$q \Rightarrow p$	$((p \vee q) \wedge \bar{p}) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V

Recuerde: Si son p, q, r tres proposiciones entonces

a) pq no es una proposición

b) $p \cdot q$ no es una proposición

c) $p \wedge \vee q$ no es una proposición

d) $p \wedge qr$ no es una proposición

Una **proposición compuesta** se construye usando una proposición un conectivo y otra proposición.

Observación: La siguiente expresión algebraica $2 + 3 \cdot 5 = 17$ no es ambigua, ya que el producto se realiza primero y después la adición y si deseamos el otro valor lo denotamos por $(2 + 3) \cdot 5 = 25$, los paréntesis siempre entregan un orden a desarrollar. Así también para la proposición $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, para determinar el valor de verdad de ella, primero determinamos el valor de verdad de $(p \Rightarrow q)$ y luego consideramos el conectivo $\Rightarrow$ con la proposición r.

Ejemplo 1.1.7 Considere las proposiciones p, q, r, analizaremos que sucede con la proposición compuesta: $(p \wedge q) \Rightarrow r$ y la proposición; $p \wedge (q \Rightarrow r)$. $\square$

Solución 5. Veamos primero:

p	q	$p \wedge q$	r	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V
F	F	F	F	V

Ahora:

p	q	r	$q \Rightarrow$	$p \wedge (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

Como podemos observar las tablas de verdad de las proposiciones $(p \wedge q) \Rightarrow r$ y $p \wedge (q \Rightarrow r)$ no son iguales, es decir, no son equivalentes las proposiciones

Es importante notar entonces que los paréntesis y no los podemos omitir.

Definición 1.1.8 Sea p una proposición compuesta:

a) Se dice que p es una **Tautología** si y sólo si es verdadera siempre (independiente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman).

b) Se dice que p es una **Contradicción** si y sólo si p es siempre falsa.

c) Se dice que p es una **Contingencia** si y sólo si p no es tautología ni tampoco es contradicción.

$\Diamond$

Ejemplo 1.1.9 Consideremos la siguiente proposición compuesta:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p$$

Determine su tabla de verdad. $\square$

Solución 6. Esta esta dada por:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

con lo cual la proposición $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p$ es una tautología.

Ejercicios

Calcular la tabla de verdad para las proposiciones:$(p \vee q) \vee r$ y $p \vee (q \vee r)$.

1.1.2 Tautologías Básicas

1 **Asociatividad:** Se cumple que:

i $p \vee q \vee r \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$.

ii $p \wedge q \wedge r \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$.

2 **Conmutatividad:** Se tiene lo siguiente:

i $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.

ii $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$.

3 **Negación:**

i $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$

ii $(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$.

iii $(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$.

4 **Transformaciones o Traducciones:**

i $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$,además:

ii $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

5 **Absorción:**

i $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.

ii $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$.

6 **Leyes de idempotencia:**

i $(p \vee p) \Rightarrow p$.

ii $(p \wedge p) \Rightarrow p$.

7 **Leyes complementarias:**

i $(p \vee V) \Leftrightarrow V$

ii $(p \wedge V) \Leftrightarrow p$

iii $(p \vee F) \Leftrightarrow p$

iv $(p \wedge F) \Leftrightarrow F$

v $(p \vee \overline{p}) \Leftrightarrow V$

vi $(p \wedge \overline{p}) \Leftrightarrow F$

8 **Distributividad:**

i $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

ii $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

Observación Usando las tautología anteriores podemos escribir de modo distinto la negación y la proposición, para ello consideremos lo siguiente proposición con $x \in \mathbb{Z}$ fijo:

i s : Si x^2 es par entonces x es par, luego s es una proposición compuesta y esta formada por:

$p : x^2$es par y $q : x$ es par, así, es decir,

$$s \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

ii Veamos ahora como se puede reescribir la negación de la proposición $s : (p \Rightarrow q)$, para ello tenemos las siguientes equivalencia

$$(\overline{p \Rightarrow q}) \Leftrightarrow (\overline{\overline{p} \vee q}) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}),$$

Luego tenemos que $\overline{s}$, se lee

a) x^2 es par $\wedge$ x no es par.

b) x^2 es par $\wedge$ x impar.

Cuando se desea demostrar la proposición s, y se demuestra que la negación es falsa, este proceso es llamado demostración por el **absurdo.**

iii Ahora veremos otras formas como leer la proposición s, para ello notemos las siguientes proposiciones equivalente:

$$s \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

a Si x^2 es par entonces x es par.

b x^2 es par implica que x es par.

c Si x no es par entonces x^2 no es par.

d Si x es impar entonces x^2 es impar.

Ejercicios

Simplifique las siguientes expresiones:

a $[p \wedge (\overline{p} \vee (q \Rightarrow r))] \vee (r \vee p)$

b $[p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)] \wedge \sim [q \vee (p \Rightarrow \overline{r})]$

Observación: El conectivo $\underline{\vee}$ se puede escribir empleando los tres "conectivos" primarios $\vee, \wedge$ y $\sim$.

Ejercicios

Sean p, q proposiciones. Se define la proposición compuesta:

$$(p \downarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

Comprobar

a $\overline{p} \equiv p \downarrow p$.

b $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

c $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$.

Ejercicios

Simplificar las siguientes proposiciones

i. $[\overline{p} \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$

ii. $[(\overline{p \wedge q}) \wedge r] \vee [p \wedge (\overline{q \wedge r})]$

Ejercicios

Encuentre el valor de verdad de p, q y r en:

$$(p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \overline{r})$$

si esta es falsa.

Ejercicios

Encuentre el valor de verdad de la siguiente proposición y encuentre una proposición más simple equivalente a esta:

$$[p \wedge (\overline{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge q] \Rightarrow r.$$

1.1.3 Cuantificadores

Sea U una agrupación de objetos llamado universo. Una **Función Proposicional** en U es una expresión o frase que contiene una o más variables que al ser reemplazadas por elementos de U se transforma en una proposición.

Ejemplo 1.1.10 Sea $U = \{$ los alumnos de este curso $\}$ y la función proposicional$p(x)$: x vive en Valparaíso.Al reemplazamos algunos nombres de sus compañeros, obtenemos proposiciones, como por ejemplo

i p(María José): María José vive en Valparaíso.

ii p(Eliana): Eliana vive en Valparaíso.

Que para algunas personas es verdadera y para otras es falsa la proposición □

Ejemplo 1.1.11 Sea $U = \mathbb{Z}$, $q(x) : x$ es un número primo.
Reemplazado algunos números enteros, obtenemos las siguientes proposiciones cuyo valor de verdad lo podemos determinar, para ello veamos algunos casos.

i $q(3)$: 3 es un número primo; $q(3) \equiv V$.

ii $q(4)$: 4 es un número primo; $q(4) \equiv F$.

□

Los cuantificadores son símbolo, ($\forall, \exists, \exists!$), que convierten o traducen una función proposicional en una proposición del siguiente modo.

Definición 1.1.12 Sea $p(x)$ una función proposicional en la variable x en U.

1 **Cuantificador Universal**

$(\forall x \in U)(p(x))$, se lee : "para todo x en U, $p(x)$ " es una proposición y es verdadera cuando reemplazamos **todos** los elementos de U en $p(x)$ y siempre es verdadera la proposición obtenida, en caso contrario es falsa.

2 **Cuantificador Existencial**

$(\exists x \in U)(p(x))$, se lee : "existe x en U, $p(x)$ ", es una proposición y es verdadera cuando encontramos **un elemento** en U tal que al reemplazarlo obtenemos que la proposición es verdadera y es falsa cuando reemplazamos todos los elementos de U y siempre la proposición es falsa.

3 **Cuantificador Existencial con Unicidad**

$(\exists! x \in U)(p(x))$, se lee : " existe un único x en U, $p(x)$ ", es una proposición y es verdadera cuando encontramos **sólo un** elemento que al reemplazarlo es verdadera y en todos los otros elementos la proposición es falso.

◊

Observación: Debemos tener presente que en algunos caso es posible reemplazar todos los elementos del universo, pero en general no, por lo cual debemos hacer uso de propiedades que nos permitan argumentar a favor o en contra de la afirmación.

También es importante enfatizar en la lectura de las proposiciones, para ello veamos los siguientes ejemplos

i La proposición $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 0)$, se lee "para todo x en los números reales, se tiene que x^2 es positivo", proposición falsa, ya que para $x = 0$ no se cumple

ii La proposición $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 > 1)$, se lee "existe x un números reales, tal que x^2 es mayor que 1", proposición verdadera, ya que para $x = 0$ se cumple

Ejemplo 1.1.13 Consideremos al conjunto universo como $U = \{\text{alumnos de esta clase}\}$, y la función proposicional es $q(x) : x$ vive en Valparaíso (María José, Eduardo vive en Valparaíso y Eliana vive en Quillota). Luego

i $(\forall x \in U)(q(x)) \equiv F$, pues basta tomar a $x =$ Eliana.

ii $(\exists x \in U)(q(x)) \equiv V$, pues basta tomar a $x =$ Eduardo.

iii $(\exists! x \in U)(q(x)) \equiv F$, pues aparte de María José, existe Eduardo.

$\square$

Observación: En conjunto universo $U = \{$los alumnos de esta clase$\}$, podemos construir las siguientes funciones proposiciones:

$$q(x) : (\forall y \in U)(x \text{ pololea con } y),$$

$$p(x) : (\exists! y \in U)(x \text{ pololea con } y).$$

Lo anterior es debido a que, por ejemplo:

$$q(Eliana) : (\forall y \in U)(\text{ Eliana pololea con } y)$$

es una proposición, ya que definimos

$$r(y) = \text{ Eliana pololea con } y,$$

es una función proposicional, y con ello,

$$(\forall y \in U)(r(y)),$$

es una proposición.

Luego: $q(Eliana) : ((\forall y \in U)(\text{Eliana pololea con } y)) \equiv F$, pues $y =$ María José

Además: $p(Eliana) : ((\exists! y \in U)(\text{Eliana pololea con } y)) \equiv F$, pues no existe el pololo de Eliana en la clases. (declaración personal).

En General tenemos que a partir de una función proposicional de dos variables $p(x, y)$, podemos fabricar funciones proposicionales de una variable, de la siguiente manera.

$$\begin{array}{ll} l(x) : (\forall y \in U)(p(x,y)) & \text{(en una variable, en x)} \\ r(x) : (\exists y \in U)(p(x,y)) & \text{(en una variable, en x)} \\ s(y) : (\forall x \in U)(p(x,y)) & \text{(en una variable, en y)} \\ t(y) : (\exists x \in U)(p(x,y)) & \text{(en una variable, en y)} \end{array}$$

Con ellas podemos fabricamos las siguientes proposiciones:

i $(\forall x \in U)((\forall y \in U)(p(x, y))$,

ii $(\exists x \in U)((\forall y \in U)(p(x, y))$,

iii $(\exists y \in U)((\exists x \in U)(p(x, y))$,

iv $(\forall y \in U)((\forall y \in U)(p(x, y))$.

Observación: El valor de verdad depende del orden de los cuantificadores.

i $(\exists x \in U)(\forall y \in U)(x \text{ es hijo de } y)$,

ii $(\forall y \in U)(\exists x \in U)(x \text{ es hijo de } y)$.

La proposiciones anteriores no tienen el mismo sentido. En (1) afirma que, existe una persona que es hijo de todas las personas, y en (2) afirma que, todas las personas tiene un hijo.

Veamos el valor de verdad de las siguientes proposiciones

i $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x+y=0)$,

ii $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x+y=0)$.

La proposiciones anteriores no tienen el mismo valor de verdad. La proposición (i) es falso, ya dado $x=a, y=1-a$, luego $a+1-a=1\neq 0$. La proposición (ii) es verdadera, ya que $y=a, x=-a$ tenemos $-a+a=0$.

Ejemplo 1.1.14 Sean $A=\{-1,0,1\}$ y $B=\{1/2,1/3\}$. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1 $[\forall x \in A][(\forall y \in B)(x^2+y^2>1)]$

2 $[\forall x \in A][(\exists y \in B)(x^2+y^2>1)]$

3 $[\exists x \in A][(\forall y \in B)(x^2+y^2>1)]$

4 $[\forall y \in B)][(\exists x \in A)(x^2+y^2>1)]$

□

Solución. (1) La proposición $[\forall x \in A][(\forall y \in B)(x^2+y^2>1)]$, se puede transformar en

$$(\forall x \in A)(q(x))$$

donde

$$q(x) : (\forall y \in B)(x^2+y^2>1)$$

$x=-1$, entonces

$$\begin{aligned} q(-1) &: (\forall y \in B)(1+y^2>1) \\ q(-1) &: (\forall y \in B)(y^2>0) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{array}{rrl} & (\forall y \in B)(y^2>0) & \\ y=\frac{1}{2} & \frac{1}{4}>0\equiv & V \\ y=\frac{1}{3} & \frac{1}{9}>0\equiv & V \end{array}$$

por lo tanto $q(-1)\equiv \quad V$

Si $x=0$, entonces

$$\begin{aligned} q(0) &: (\forall y \in B)(0+y^2>1) \\ q(0) &: (\forall y \in B)(y^2>1) \end{aligned}$$

luego

$$y=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4}>1\equiv \quad F$$

Luego es falsa la proposición $q(0)$, por lo tanto

$$[\forall x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)] \text{ es falsa.}$$

(2) La proposición

$$[\forall x \in A][(\exists y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$$

se puede transformar en

$$(\forall x \in A)(r(x)),$$

con

$$r(x) : (\exists y \in B)(x^2 + y^2 > 1)$$

$x = -1$, entonces $r(-1) : (\exists y \in B)(1 + y^2 > 1)$, es decir,

$$r(-1) : (\exists y \in B)(y^2 > 0)$$

Evaluando

$$y = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} > 0 \equiv V$$

luego $r(-1)$ es V

Ahora en $x = 0$, entonces

$$\begin{array}{ll} r(0) : & (\exists y \in B)(0 + y^2 > 1) \\ & (\exists y \in B)(y^2 > 1) \\ y = \frac{1}{2} & \quad \frac{1}{4} > 1 \equiv F \\ y = \frac{1}{3} & \quad \frac{1}{9} > 1 \equiv F \end{array}$$

luego $r(0)$ es falsa, por tanto

$$[\forall x \in A][(\exists y \in B)(x^2 + y^2 > 1)] \text{ es falsa.}$$

(3) La proposición $[\exists x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$ la transformamos en

$$(\exists x \in A)(s(x)),$$

donde $s(x) : (\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$.

Si analizamos para $x = -1$, tenemos que:

$$\begin{array}{lll} s(-1) : & (\forall y \in B)(1 + y^2 > 1) & \\ & \quad (\forall y \in B)(y^2 > 0) & \\ y = \frac{1}{2} & \quad \frac{1}{4} > 0 \equiv & V \\ y = \frac{1}{3} & \quad \frac{1}{9} > 0 \equiv & V. \end{array}$$

Luego $s(-1)$ es verdadera, y así

$$[\exists x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)] \text{ es verdadera.}$$

(4) La proposición $[\forall y \in B)][(\exists x \in A)(x^2 + y^2 > 1)]$ la transformamos en

$$(\forall y \in B)(s(y)),$$

donde $s(y)) : (\exists x \in A)(x^2 + y^2 > 1)$

$y = 1/2$, entonces

$$\begin{array}{lr} s(\frac{1}{2}) : & (\exists x \in A)(x^2 + \frac{1}{4} > 1) \\ & (\exists x \in A)(x^2 > \frac{3}{4}) \\ x = -1 \quad , & 1 > \frac{3}{4} \equiv V. \end{array}$$

Luego $s(1/2)$ es verdadera, pues se encontró x

$y = 1/3$, entonces

$$\begin{array}{ll} s(\frac{1}{3}) & (\exists x \in A)(x^2 + \frac{1}{9} > 1) \\ & (\exists x \in A)(x^2 > \frac{8}{9}) \\ x = 1 & \quad 1 > \frac{8}{9} \equiv V. \end{array}$$

Luego $s(1/3)$ es verdadera, pues se encontró x.

Por lo tanto

$$[\forall y \in B)][(\exists x \in A)(x^2 + y^2 > 1)] \text{ es verdadera.}$$

1.1.4 Negación

La negación de proposiciones que contienen cuantificadores podemos señalar lo siguiente:

1. $\overline{(\forall x \in A)(p(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\overline{p(x)})$.
2. $\overline{(\exists x \in A)(p(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\overline{p(x)})$.
3. $\overline{(\forall x \in A)(\forall y \in B)(p(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in B)(\overline{p(x)})$.
4. $\overline{(\forall x \in A)(\exists y \in B)(p(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\forall y \in B)(\overline{p(x)})$.

Ejemplo 1.1.15 Traducir las siguientes proposiciones

1. $\overline{(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 + x > 0)}$, luego

$$\begin{aligned} \overline{(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 + x > 0)} &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})\overline{(x^2 + x > 0)} \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})(x^2 + x \leq 0). \end{aligned}$$

2. $\overline{(\forall x \in A)(x^2 + 3x \neq 0)}$, donde

$$\overline{(\forall x \in A)(x^2 + 3x \neq 0)} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(x^2 + 3x = 0).$$

3. $\overline{(\forall x \in A)(x^2 > 1 \Rightarrow x = 2)}$, luego

$$\overline{(\forall x \in A)(x^2 > 1 \Rightarrow x = 2)} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(x^2 > 1 \wedge x \neq 2).$$

□

1.2 Conjunto

Sea U una agrupación de objetos y $p(x)$ una función proposicional en U, se define:

$$A = \{x \in U \mid p(x)\}.$$

A es un conjunto y esta formado por todos los elementos de U que al ser reemplazados en la función proposicional $p(x)$ el valor de verdad de la proposición es verdadero.

De otro modo se tiene que

$$a \in A \Leftrightarrow p(a) \equiv V$$

Ejemplo 1.2.1 Determinar por extensión los siguientes conjuntos

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x-2) = 0\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x+1)(x-3) = 0\}$

□

Solución. 1) Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x-2) = 0\}$, luego

$$(x+1)(x-2) = 0,$$

de este producto y haciendo uso de las propiedades de $\mathbb{Z}$ tenemos:

$$\begin{array}{l} x+1 = 0 \quad \vee \quad x-2 = 0 \\ x = -1 \quad \vee \quad x = 2. \end{array}$$

Resumiendo

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x-2) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid (x=-1) \vee (x=2)\} \\ &= \{-1, 2\}, \end{aligned}$$

donde la solución es $A = \{-1, 2\}$.

2) Sea $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x+1)(x-3) = 0\}$, pero

$$\begin{array}{l} (2x+1)(x-3) = 0 \\ 2x+1 = 0 \quad \vee \quad x-3 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 3. \end{array}$$

notemos que hemos resuelto la ecuación en $\mathbb{R}$, pero como el universo es $\mathbb{Z}$, entonces la solución es $B = \{3\}$.

1.2.1 Nociones Básica de Conjunto

En adelante consideremos lo siguiente conjuntos

$$\begin{array}{l} A = \{x \in U \mid p(x)\} \\ B = \{x \in U \mid q(x)\}. \end{array}$$

Igualdad

$$A = B \text{ si y sólo si } (\forall x \in U)(p(x) \Leftrightarrow q(x)).$$

Subconjunto

$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } (\forall x \in U)(p(x) \Longrightarrow q(x)).$$

Unión

$$A \cup B = \{x \in U \mid p(x) \vee q(x)\}.$$

Donde la unión de dos conjuntos esta formada por los elementos que están en A o en B

Intersección

$$A \cap B = \{x \in U \mid p(x) \wedge q(x)\}.$$

Donde la intersección de dos conjuntos esta formada por los elementos que están tanto en A como en B.

Diferencia

$$A - B = \{x \in U \mid p(x) \wedge \overline{q(x)}\}.$$

Es decir la diferencia de A con B son los elementos que están en A pero que no están en B.

Diferencia Simétrica

$$A \triangle B = \{x \in U \mid p(x) \underline{\vee} q(x)\}.$$

La que podemos traducir como: Los elementos que están en A pero no en B, y además no están en A pero están en B.

Conjunto Potencia

El conjunto potencia de A esta dado por

$$\mathcal{P}(A) = \{B \subseteq U \mid B \subseteq A\},$$

el conjunto potencia de A esta formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplo 1.2.2 Sea $A = \{1, 2\}$, luego el conjunto $\mathcal{P}(A)$ es:

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

□

Complemento

El complemento de A es el conjunto

$$\overline{A} = \{x \in U \mid \overline{p(x)}\}$$

Notación A complemento se denota como:

$$\overline{A} = A^c = A'.$$

Ejemplo 1.2.3 Sea $A = \{1, 2, 3\}$, luego A^c esta dado por:

$$A^c = U - A.$$

□

Cardinal de un conjunto

Sea A un conjunto, el cardinal de A es el número de objetos que contiene. Si la cantidad objetos es un número natural decimos que el conjunto es finito, en caso contrario decimos que el conjunto es infinito.

En general se usan los siguientes símbolos para denotar el cardinal de un conjunto para referirnos al cardinal del conjunto A

$$\#(A), \quad | A | .$$

Ejemplo 1.2.4 Algunos ejemplo de cardinalidad

1 $\#(\phi) = 0$.

2 $\#(\{\{\phi\}\}) = 1$.

3 $\#(\{\{3\}\}) = 1$.

4 $\#(\{\{1, 2\}\}) = 1$.

5 $\#(\{\{1\}, \{2\}\}) = 2$

□

Ejemplo 1.2.5 Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{Z})(x + 2y = 0)\}$, Determinar A^c □

Solución. Sea x pertenece a $\mathbb{N}$ entonces x puede ser un número par o impar, analicemos los dos casos:

1^{er} caso: x es impar, luego

$$x = 2n + 1,$$

donde

$$p(2n + 1) : (\exists y \in \mathbb{Z})(2n + 1 + 2y = 0),$$

y dado que $y \in \mathbb{Z}$, obtenemos que

$$2n + 2y = -1 \quad \equiv \quad F.$$

2^{do} caso: x es par, luego $x = 2n$, donde

$$p(2n) : (\exists y \in \mathbb{Z})(2n + 2y = 0),$$

de donde obtenemos que $y = -n$ y esto equivale a ser verdadero.

Luego $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}$, y por lo tanto

$$A^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar }\}.$$

Producto Cartesiano

Sean A, B conjuntos, se define el producto cartesiano

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Los elementos de este conjunto se llama pares ordenados, si (x, y) es un par ordenado x es la primera coordenada o abscisa e y es la segunda coordenada u ordenada.

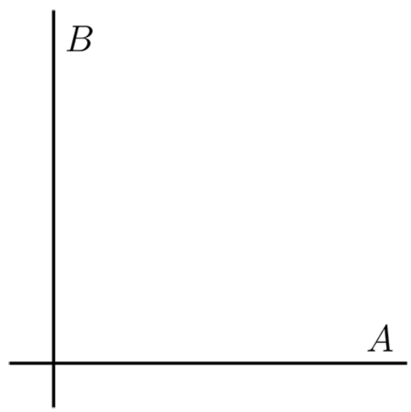
Igualdad

Dos elementos $(a, b), (c, d) \in A \times B$ son iguales si su abscisa y ordenada son iguales, es decir,

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \quad \wedge \quad b = d$$

Representación Gráfica.

En el eje horizontal se marca los elementos del conjunto A y en el eje vertical los elementos del conjunto B



La acción de graficar un subconjunto de $A \times B$ es: marcar los elementos que están en el subconjunto.

Observación: En el cálculo aritmético y/o en el álgebra los paréntesis en general, después de hacer el desarrollo se van omitiendo, en teoría de conjunto tenemos algunos paréntesis que no podemos omitir o cambiar por otros, por ejemplo tenga presente que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ igualdad de conjunto, pero $(1, 2) \neq (2, 1)$, como pares ordenados.

1.2.2 Propiedades de Conjuntos

1. Asociatividad

   a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *b)* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

2. Conmutatividad

   a) $A \cup B = B \cup A$ *b)* $A \cap B = B \cap A$.

3. Distributividad

   a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *b)* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Leyes de Absorción

$$a)\quad A\cup(A\cap B)=A \qquad b)\quad A\cap(A\cup B)=A$$

5. Leyes de Morgan

$$a)\quad (A\cup B)^c=A^c\cap B^c \qquad b)\quad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

6. Identidad

$$\begin{array}{llll} a) & A\cup\phi = A & b) & A\cap U=A\\ c) & A\cup U = U & d) & A\cap\phi=\phi. \end{array}$$

7. Complemento

$$\begin{array}{llll} a) & A\cup A^c = U & b) & A\cap A^c=\phi.\\ c) & (A^c)^c = A & d) & U^c=\phi,\quad \phi^c=U. \end{array}$$

8. Idempotencia

$$a)\quad A\cup A=A \qquad b)\quad A\cap A=A.$$

9. Cardinalidad

   Sean A y B dos conjuntos finitos, en donde $\#(A)=n$ y $\#(B)=m$, entonces:

   1. $\#(\mathcal{P}(A))=2^n$.
   2. $\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$.
   3. $\#(A\times B)=\#(A)\cdot\#(B)$.

10. Producto Cartesiano

    1. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
    2. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

Ejemplo 1.2.6 Simplifique las siguientes expresiones

1. $A\cup(A-B)$.
2. $((B\cup A^c)^c\cup A)\cap C$.

$\square$

Solución. 1.

$$\begin{aligned} A\cup(A-B) &= A\cup(A\cap B^c) \quad \text{(por leyes de absorción)}\\ &= A. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} ((B\cup A^c)^c\cup A)\cap C &= ((B^c\cap A)\cup A)\cap C \quad \text{(esto por las leyes de morgan)}\\ &= A\cap C \quad \text{(por leyes de absorción)}. \end{aligned}$$

1.3 Guía Ejercicios

Lógica

1. Construir una tabla de verdad para las siguientes proposiciones.

   i. $[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)] \Rightarrow [p \Leftrightarrow q]$

   ii. $\overline{(p \Rightarrow (p \vee q))} \Rightarrow (p \wedge \bar{q})$

   iii. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \bar{r})] \vee (p \Rightarrow r)$

2. Determinar para que valores de verdad de p, q la proposición $[(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$ es falsa

3. Sabiendo que el valor de verdad de q es falso, determinar el valor de verdad de p (en cada caso) para que cada una de las siguientes proposiciones sea falsa.

   i. $p \Rightarrow (q \wedge p)$

   ii. $(p \vee \bar{q}) \Rightarrow (p \wedge q)$

   iii. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q})$

   iv. $p \Rightarrow (q \wedge \bar{p})$

   v. $[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q$

4. Sean p, q proposiciones tales que el valor de verdad de la proposición $(p \Rightarrow q)$ es Falso.

   Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

   i. $[(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$

   ii. $[p \wedge \bar{q}] \vee [p \Rightarrow (q \wedge p)]$

   iii. $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge p)]$

   iv. $[(\bar{p} \vee q) \wedge p] \Rightarrow [\bar{p} \wedge \overline{(q \vee p)}]$

5. Sean p, q, r proposiciones tales que el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow r$ es Falsa.

   Determinar el valor de verdad de

   $$[(p \vee r) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow [r \wedge (p \vee q)]$$

6. Sean p, q, r proposiciones tales que el valor de verdad de la proposición $p \Rightarrow (q \vee r)$ es Falsa.

   Determinar el valor de verdad de

   $$[(q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \Rightarrow q)] \vee \bar{s}]$$

7. Sean p, q, r proposiciones tales que el valor de verdad de la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge (r \vee \bar{q})$ es Verdadera.

   Determinar el valor de verdad de

   $$(r \Leftrightarrow q)$$

8. Sabiendo que la proposición $(p \wedge s) \Rightarrow (q \wedge \bar{s})$ es Falso, entonces el valor de verdad de las siguientes proposiciones es:

   i. $((p \wedge q) \Rightarrow s)$

   ii. $(q \wedge r) \vee s$

   iii. $(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{s}$

   iv. $\bar{p} \Rightarrow (q \Rightarrow \bar{s})$

9. Sabiendo que la proposición $(q \wedge r) \Rightarrow (p \vee s)$ es Falsa, entonces el valor de verdad de las siguientes proposiciones es

   i. $(((p \vee q) \wedge s) \Rightarrow \overline{r})$

   ii. $((p \vee q) \wedge (s \Rightarrow \overline{r}))$

   iii. $(p \vee (q \wedge (s \Rightarrow \overline{r})))$

10. Sabiendo que la proposición $(p \vee r) \wedge (q \wedge r)$ es Verdadera, entonces el valor de verdad de las siguientes proposiciones es:

    i. $((p \vee q) \Rightarrow r)$

    ii. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$

    iii. $q \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

11. Sean p, q, r proposiciones. Simplificar las siguientes proposiciones

    i. $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge (q \vee r))$

    ii. $[(p \vee q) \wedge r] \vee [p \wedge (q \Rightarrow p)]$

    iii. $[p \vee (p \wedge q)] \wedge [(p \vee r) \wedge (q \vee p)]$

    iv. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow [\bar{p} \Rightarrow \bar{q})]$

    v. $[\overline{(p \vee \bar{q})} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})] \Rightarrow [\bar{p} \wedge \bar{q}]$

    vi. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow (p \vee q))] \Rightarrow p$

    vii. $(\overline{(p \vee \bar{q})} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})) \Rightarrow \overline{(p \wedge q)}$

    viii. $(\overline{(p \vee \bar{r})} \wedge \bar{r}) \vee ((p \wedge q) \vee \bar{q})$

12. Dadas las proposiciones p, q, r. Simplificar las siguientes proposiciones

    i. $[(p \vee q) \Longrightarrow r] \Longrightarrow (\overline{q} \wedge r)$

    ii. $((p \Longrightarrow q) \vee r) \Longrightarrow (q \vee \overline{p})$

    iii. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)]$

    iv. $[(q \Rightarrow p) \wedge p] \Rightarrow \left[q \vee \overline{(\overline{p} \Rightarrow q)}\right]$

    v. $[(q \Rightarrow p) \wedge \overline{p}] \Rightarrow \left[q \vee \overline{(\overline{p} \Rightarrow q)}\right]$

vi. $r \Rightarrow [(r \vee \overline{p}) \wedge (\overline{p} \Rightarrow (q \wedge \overline{r}))]$

vii. $(q \vee \overline{r}) \wedge [(p \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge q) \vee (q \wedge \overline{r} \wedge p)] \wedge (q \vee r)$

viii. $(q \vee \overline{r}) \wedge [(p \wedge r) \vee (p \wedge \overline{r} \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge q)] \wedge (q \vee r)$

13. Se define el conectivo $*$ por $p * q \equiv ((q \vee p) \Rightarrow (q \wedge p))$ entonces la proposición $p * q$ es Falsa, en cual(es) caso(s)

    i. $p \equiv V, q \equiv V$

    ii. $p \equiv V, q \equiv F$

    iii. $p \equiv F, q \equiv V$

    iv. $p \equiv F, q \equiv F$

14. La proposición $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]$ es equivalente a cual de las siguientes proposición

    i. $\overline{p}$

    ii. $\overline{q}$

    iii. V

    iv. F

    v. Ninguna de las anteriores

15. Completar la siguiente afirmación con una de las alternativas

    La proposición $[(p \vee q) \Rightarrow q] \Rightarrow [\overline{p} \vee q]$ es:

    i. equivalente a $\overline{p} \vee q$

    ii. una tautología

    iii. una contradicción

    iv. equivalente a q

    v. Ninguna de las anteriores

16. Se define el conectivo $\bigtriangledown$ por $(p \bigtriangledown q) \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (\overline{p} \vee q)]$

    Determinar en que caso la proposición $(p \bigtriangledown q)$ es falsa

17. Se define la proposición $(p \circledcirc q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow \overline{q})$. Simplificar

$$\overline{q} \circledcirc (\overline{p} \circledcirc q)$$

18. Dada la proposición $(p \circledcirc q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow \overline{q})$. Simplificar

$$(\overline{p} \circledcirc q) \circledcirc \overline{q}$$

19. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow q)$. Simplifique cada una de las siguientes proposiciones

i. $(p \downarrow (p \Rightarrow q))$

ii. $\left(p \Rightarrow \overline{(p \downarrow q)}\right)$

20. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $((r \Rightarrow s) \downarrow r)$

ii. $(s \vee (r \downarrow \overline{s}))$

21. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \overline{q})$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $(r \downarrow (s \Rightarrow r))$

ii. $(s \vee (r \downarrow \overline{s}))$

iii. $((p \Rightarrow q) \downarrow p)$

iv. $(p \vee (q \downarrow \overline{p}))$

22. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $\left(p \downarrow \overline{(p \Rightarrow q)}\right)$

ii. $\left(p \Rightarrow \overline{(p \downarrow q)}\right)$

23. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$. Simplifique cada una de las siguientes proposiciones

i. $\left(q \downarrow \overline{(q \Rightarrow p)}\right)$

ii. $\left(p \Rightarrow \overline{(q \downarrow p)}\right)$

24. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p \vee q})$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $(p \downarrow (q \vee \overline{p}))$

ii. $((p \downarrow q) \Rightarrow p)$

25. Dada la nueva proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \wedge p)$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $((\overline{r} \vee s) \downarrow r)$

ii. $(r \vee \overline{s}) \downarrow r$

iii. $s \vee (\overline{s} \downarrow (\overline{s} \wedge r))$

iv. $\overline{s} \vee [\overline{s} \downarrow (s \wedge r)]$

26. Dada la proposición $p * q \equiv [p \Rightarrow (p \wedge q)]$

Simplificar

i. $(p * q) \Rightarrow (p * p)$

ii. $(p * \bar{q}) \wedge (q * q)$

iii. $(p \Rightarrow (p * q)) \Rightarrow (\bar{p} * \bar{q})$

iv. $(p * p) \Rightarrow [p * (q \Rightarrow p)]$

27. Sabiendo que la proposición $p \Rightarrow (q \vee r)$ es Falsa, entonces. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $((p \wedge q) \Rightarrow r)$

ii. $(p \vee r) \wedge q$

iii. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

iv. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

28. Si q es una proposición falsa. Determine en cada caso el valor de verdad de la proposición p para que cada proposición sea verdadera.

i. $(p \vee q) \wedge \overline{q}$

ii. $(q \vee p) \Rightarrow (\overline{q} \wedge p)$

29. Marcar la(s) alternativa(s) correcta(s). Si la proposición $p * q \equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)]$ entonces la proposición $p * q$ es Falsa cuando

i. $p \equiv V, q \equiv V$

ii. $p \equiv V, q \equiv F$

iii. $p \equiv F, q \equiv V$

iv. $p \equiv F, q \equiv F$

30. Marcar la(s) alternativa(s) correcta(s). La proposición $[(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$ es equivalente a la proposición

i. p

ii. $p \Rightarrow q$

iii. $q \Rightarrow p$

iv. q

v. Ninguna de las anteriores

31. Marcar la(s) alternativa(s) correcta(s). La proposición $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{[\overline{p} \wedge (\overline{q} \Rightarrow p)]}$ es:

i. equivalente a $\overline{p} \vee q$

ii. una tautología

iii. una contradicción

iv. una proposición que depende del valor de p

32. Marcar la(s) alternativa(s) correcta(s). Dada la proposición

$$(p \bigtriangledown q) \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \wedge \overline{q})]$$

entonces la proposición $(q \bigtriangledown p)$es verdadera cuando

    i. $p \equiv V \ q \equiv V$
    ii. $p \equiv V \ q \equiv F$
    iii. $p \equiv F \ q \equiv V$
    iv. $p \equiv F \ q \equiv F$

33. Se define los conectivos $\square$ y $\triangle$ de la forma

$$\begin{array}{ll} (p\square q) & \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow \bar{q}) \\ (r\triangle s) & \Longleftrightarrow (\bar{r} \vee s) \end{array}$$

Determine, sin usar tabla de verdad, si la siguiente proposición es o no una tautología

$$\left(p \wedge \overline{(\bar{p}\triangle r)}\right) \vee \left[\overline{(\bar{p}\triangle q)} \wedge \overline{(\bar{s}\square p)}\right]$$

34. Sean p, q proposiciones. Se define una nueva proposición: $p \ddagger q$ de acuerdo a la siguiente tabla

p	q	$p \ddagger q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

    i. Verifique que $(p \ddagger q) \Leftrightarrow (\overline{p \Rightarrow q})$ es tautología.
    ii. Simplificar al máximo $(p \ddagger q) \ddagger p$

Cuantificadores

1. Sea $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

   Determinar el valor de verdad de

    1. $(\forall x \in M)(x^2 + 1 \geq 1)$
    2. $(\exists x \in M)(x^2 - 9x + 20 \geq 0)$

2. Sean $A = \{1, -1, 0\}$ y $B = \{2, \frac{-1}{2}, 1\}$.

   Determinar el valor de verdad de

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x + xy = y \vee xy + y = 1)$$

3. Sea $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $(\exists x \in A)(x \text{ es par} \Rightarrow x^2 = 2)$

ii. $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x + y^2 = 1)$

4. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justifique.

   i. $(\forall x \in A)(x + 2 > 0)$;

   ii. $(\exists x \in A)(x^2 - 2x < 0)$;

   iii. $(\exists x \in A)(2x - 2 < 0 \Rightarrow x = 2)$;

   iv. $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(x^2 - y^2 > 0)$;

   v. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(xy \geq 1 \Rightarrow x = 4y)$;

5. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

   i. $(\forall x \in A)(3 - x^2 > 0)$;

   ii. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;

   iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(xy \geq 0 \Rightarrow x^2 y = 1)$;

   iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(xy \geq 0 \Rightarrow x^2 y = 1)$;

6. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   i. $(\forall x \in A)(x^2 - 3x + 2 \leq 4)$;

   ii. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;

   iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;

   iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;

7. Sean $A = \{-2, -1, 1\}$, $B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justifique.

   i. $(\forall x \in A)(x(x - 3) \leq 2)$;

   ii. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;

   iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x^{-1} + y \geq 0 \Rightarrow x + y^{-1} \geq 0)$;

   iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x^{-1} + y \geq 0 \Rightarrow x + y^{-1} \geq 0)$;

8. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{\frac{1}{2}, -1, -2\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   i. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x - y \geq 0 \Rightarrow x + y > 0)$;

   ii. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x - y \geq 0 \Rightarrow x + y > 0)$;

9. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   i. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;
   ii. $(\forall x \in A)(x^2 - 3x + 2 \leq 4)$;
   iii. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;
   iv. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;

10. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

    i. $(\forall x \in A)(x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$;
    ii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x \cdot y < 0 \vee x > y)$;
    iii. $(\forall y \in A)(\exists x \in B)(x \cdot y < 0 \vee x > y)$;
    iv. $(\exists x \in A)(x^2 < 4) \Rightarrow (\forall x \in A)(x = 2)$;

11. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{-2 - 1, 0\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

    i. $(\forall x \in A)(x^2 = -1 \Rightarrow x = 1)$;
    ii. $(\exists x \in B)(3x = 0 \vee x^2 = -3)$;
    iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(xy = -2 \vee xy - 5y = 0)$;
    iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(xy = -2 \vee xy - 5y = 0)$;

12. Sean $A = \{-2, -1, 1\}$, $B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique

    i. $(\forall x \in A)(x(x - 3) \leq 2)$;
    ii. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x^{-1} + y \geq 0 \Rightarrow x + y^{-1} \geq 0)$;
    iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x^{-1} + y \geq 0 \Rightarrow x + y^{-1} \geq 0)$;

13. Sean $A = \{0, 1, 2\}, B = \{-1, \frac{1}{3}\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas justifique adecuadamente

    i. $(\forall x \in A)(x^2 - 2x + 1 > 0)$;
    ii. $(\exists x \in A)(x^2 - 2x < 0)$;
    iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x + y \geq 0 \Rightarrow x > 9y)$;
    iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x + y \geq 0 \Rightarrow x > 9y)$;

14. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{-2 - 1, 0\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

i. $(\forall x \in A)(x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$;
ii. $(\exists x \in B)(3x = 0 \vee x^2 = -1)$;
iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(xy = -2 \vee xy - 5y = 0)$;
iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(xy = -2 \vee xy - 5y = 0)$;

15. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, -3\}, B = \{-1, 1\}$.

    Determinar el valor de verdad de

    i. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\left(\left(\frac{x}{y} \leq 1\right) \wedge \left(\frac{y^2}{x} < 1\right)\right)$
    ii. $(\exists y \in B)(\forall x \in A)\left(\left(\frac{x}{y} \leq 1\right) \wedge \left(\frac{y^2}{x} < 1\right)\right)$

16. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}, B = \{-1, 1\}$.

    Determinar el valor de verdad de

    i. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\left(\left(\frac{x}{y} \leq 1\right) \vee \left(\frac{y^2}{x} < 1\right)\right)$
    ii. $(\exists y \in B)(\forall x \in A)\left(\left(\frac{x}{y} \leq 1\right) \vee \left(\frac{y^2}{x} < 1\right)\right)$

17. Sean $A = \{-1, 1, -2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, -2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

    i. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 1\right)$
    ii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 1\right)$.

18. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

    i. $(\forall x \in A)(x^2 - 3x + 2 \leq 4)$;
    ii. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;
    iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;
    iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;

19. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{\frac{1}{2}, -1, -2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

    i. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x - y \geq 0 \Rightarrow x + y > 0)$;
    ii. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x - y \geq 0 \Rightarrow x + y > 0)$;

20. Sean $A = \{-1, 1, -2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\}$.
    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas
    a. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)\,(xy \geq 0 \Rightarrow y^2 x \geq 1)$.
    b. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)\,(xy \geq 0 \Rightarrow y^2 x \geq 1)$

Conjunto

1. Sean $A = \{a, b, \phi\}, B = \{\phi, \{a\}\}, C = \{b, c, d\}$
   Determinar por extensión
   $$D = (B - \mathbb{P}(A)) - \mathbb{P}(A - C))$$
2. Sean $A = \{0, \phi\}, B = \{1, \{\phi\}\}, C = \{0, 1, \{\phi\}\}$
   Determinar por extensión
   $$D = (\mathbb{P}(A) - (B - C)) \cap \mathbb{P}(C)$$
3. Sean $A = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}, B = \{a, b\}, C = \{a, c\}$
   Determinar por extensión
   $$D = [(A \cap (B \times C)) \cup \mathbb{P}(B)] - \mathbb{P}(C)$$
4. Sean A y B conjuntos tales que $(A \cup B \subseteq B)$. Dibuje un diagrama de Venn que muestre la situación
5. Sean A, B, C subconjunto de U (universo relativo). Simplifique, usando propiedades de conjuntos
   a $(A \cap B) \cup [(A \cup B^c \cup C) \cap (A \cup C)] \cup (C \cap B^c)$
   b $[(A \cup B^c \cup C) \cap (A \cup B)] \cup (C \cap B)$
   c $(C \cap A^c)^c \cap (B^c \cap A) \cap (B \cap C)^c$
   d $[(A \cup (B \cap A)] \cap [(B \cup A) \cap (A \cup C)]$
   e $[(A - B) \cup (C - A)]^c \cap [A - (C - B)]$
   f $[(A^c - B) - (A - B^c)] \cup B$
   g $[[(A^c - B) - (A - B^c)] \cup B] \cap [A - (C - B)]$
   h $[(B - A) \cup (B - A^c)] \cup (B \cap A)$
   i $[(B - A) \cup (B^c - A)] \cup (B \cap A)$
6. Sean Ay B conjuntos. Se define
   $$A * B = [A^c \cup B) - (A \cap B^c)]^c$$
   Calcular $A * A$

7. Sean $A * B = B - (A \triangle B)$ entonces $A - (A * B)$ es igual a

   a A

   b $A \cap B^c$

   c $A^c \cap B$

   d B

   e Ninguna de las anteriores

8. Sean $A * B = (A \cap B) - A^c$ entonces $(A * C) \cup C$ es igual a

   a A

   b $A \cap C$

   c $A \cup C$

   d C

   e Ninguna de las anteriores

9. Sean $A * B = B \triangle (A - B)$ entonces $A * (A * B)^c$ es igual a

   a A

   b $A \cap B^c$

   c $A^c \cap B$

   d B

   e Ninguna de las anteriores

10. Sean A y B conjuntos. Se define

$$A * B = [A^c \cup B) - (A \cap B^c)]^c$$

    Calcular $A * A$

11. Sean $A = \{\phi, \{1\}\}, B = \{1, 2\}, C = \{\phi, 2\}$.
    Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

    a $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;

    b $((A \cup C) - B) = \{\phi\}$;

    c $(A \cup B) - (A \cap B) = \{\phi, 2\}$;

    d $((A \cup C) \cap \mathbb{P}(B)) = A$;

12. Sean $A = \{\phi, 1\}, B = \{1, 2\}, C = \{\phi, 2\}$
    Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

    i. $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \{\phi, \{\phi, 2\}\}$;

    ii. $\mathbb{P}(A \cup B) \cap \mathbb{P}(C) = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, 2\}\}$;

iii. $(A \cup B) - (A \cap B) = \{\phi, 2\}$;

iv. $\#((A \cup C) \cap \mathbb{P}(B)) = 2$;

v. $\#((A \cup C) - B) = 0$;

13. Sean $A = \{\phi, \{2\}\}, B = \{1, 2\}, C = \{\phi, 1\}$.

    Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

    a $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;

    b $((A \cup C) - B) = \{\phi\}$;

    c $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, \{2\}\}$;

    d $((A \cup C) \cap \mathbb{P}(B)) = A$;

14. Sean $A = \{\phi, \{1\}\}, B = \{1, 2\}, C = \{\{\phi\}, 1\}$.

    Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

    a $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$;

    b $((A \cup B) - C) = \{\{1\}, 2\}$;

    c $(A \cup B) - (A \cap B) = \{\phi, 2\}$;

    d $((A \cup C) \cap \mathbb{P}(A)) = \{1\}$;

15. Sean $A = \{\phi, 1\}, B = \{1, \{2\}\}, C = \{\phi, 2\}$. Determinar por extensión los siguientes conjuntos

    a $\mathbb{P}(C) - B$

    b $((A \cup B) - C)$

    c $(A \cup C) - (A \cap B)$

    d $((A \cup C) \cap \mathbb{P}(A))$

16. Sean $A = \{a, b, \phi\}, B = \{\phi, \{a\}\}, C = \{b, c, d\}$

    Determinar por extensión el siguiente conjunto

$$D = (B - \mathbb{P}(A)) - \mathbb{P}(A - C))$$

17. Sean $A = \{0, \phi\}, B = \{1, \{\phi\}\}, C = \{0, 1, \{\phi\}\}$

    Determinar por extensión

$$D = (\mathbb{P}(A) - (B - C)) \cap \mathbb{P}(C)$$

18. Sean $A = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}, B = \{a, b\}, C = \{a, c\}$

    Determinar por extensión

$$D = [(A \cap (B \times C)) \cup \mathbb{P}(B)] - \mathbb{P}(C)$$

19. Dados los conjuntos

$$\begin{array}{rllll} A & = \{x \in \mathbb{R} & : & (3x+1=2) \Longrightarrow (x-2 \neq 0)\} \\ B & = \{x \in \mathbb{R} & : & (x+2 \neq 0) \Longrightarrow (x=1)\} \\ C & = \{x \in \mathbb{R} & : & x \geq 0\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \leq 3\}. \end{array}$$

Determinar por extensión

a $(A \cup B) - C =$

b $(A \cap C) - D =$

c $(C \triangle D) - B =$

d $(A \triangle B) \triangle (C \triangle D) =$

20. Dado $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3}\}$.

Determinar por extensión los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rlll} C & = \{x \in A & : & (\exists y \in B)\,(x+y>1)\} \\ D & = \{x \in A & : & (\forall y \in B)\,(x+y>1)\} \end{array}$$

21. Dados los conjuntos $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\}$.

Determinar por extensión los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rlll} C & = \{x \in A & : & (\exists y \in B)\,(xy>1)\} \\ D & = \{x \in A & : & (\forall y \in B)\,(xy>1)\} \end{array}$$

22. Dados los conjuntos $A = \{-1, \frac{1}{2}, 2\}, B = \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

Graficar el conjunto

$$E = \left\{(x,y) \in A \times B \quad : \quad y = \frac{\frac{1}{x} - 1}{1-x}\right\}$$

23. Dados los conjuntos $A = \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$, $B = \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

Graficar el conjunto.

$$E = \left\{(x,y) \in A \times B \quad : \quad y = \frac{1-x}{1-\frac{1}{x}}\right\}$$

24. Dado el conjunto $A = \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$. Graficar el siguiente conjunto

$$E = \left\{(x,y) \in A \times \mathbb{R} \quad : \quad y = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}\right\}$$

25. Sea $A = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Graficar el conjunto

$$E = \left\{ (x, y) \in A \times \mathbb{R} \quad : \quad y = \frac{1 - x}{1 - \frac{1}{x}} \right\}$$

26. Sean A y B conjuntos tales que $(A \cup B \subseteq B)$. Dibuje un diagrama de Venn que muestre la situación

27. Sean A, B, C subconjunto de U (universo relativo)

    Demostrar

    a $A \cup B = A$ si y sólo si $B \subseteq A$
    b $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subseteq B$
    c $A \triangle B = A$ si y sólo si $B = \phi$
    d $A - B = A$ si y sólo si $A \cap B = \phi$

28. Sean A, B, C Conjuntos finitos. Demostrar

    $\sharp(A \cup B \cup C) = \sharp(A) + \sharp(B) + \sharp(C) - \sharp(A \cap C) - \sharp(A \cap B) - \sharp(B \cap C) + \sharp(A \cap B \cap C)$

29. Demostrar usando álgebra de conjunto que

$$[(A - (B^c - A^c)) \cup B^c] \cap A = A$$

30. En un encuesta escolar realizada a 60 consumidores de Coca Cola, Fanta y Sprite. Se obtuvo la siguiente información 35 beben Coca Cola, 23 beben Fanta, 21 beben Sprite y tres estudiantes beben de las tres marcas.

    ¿Cuántos estudiantes consumen sólo una marca?

31. Al encuestar a 100 consumidores de bebidas se obtuvo la siguiente información, 33 Beben Coca Cola 29 Beben Fanta. 22 Beben Quatro 13 Beben Coca Cola y Fanta. 6 Beben Fanta y Quatro 14 Coca Cola y Quatro. 6 Beben de las tres bebidas.

    ¿Cuántas personas no beben ninguna bebida?

32. En un certamen científico escolar 34 alumnos recibieron premios por sus proyectos científicos. Se dieron 14 premios a proyectos en Biología, 13 premios en proyectos de Química y 21 en proyectos de Física. Si tres estudiantes recibieron premios en las tres áreas.

    ¿Cuántos recibieron premio en una sola área?

33. En una encuesta a 37 personas, 18 toman Coca Cola y 15 toman Fanta, 10 no beben Fanta ni Coca.

    ¿Cuántos personas beben solamente una bebida?

34. En una encuestas a 30 personas, 18 toman Cafe y 12 toman Te, 5 no toman Cafe ni Te.

    ¿Cuántos personas beben solamente una bebida?