# Capítulo 1

# Los Números Reales

## 1.1. Introducción

A continuación presentaremos los números reales, $\mathbb{R}$, de manera axiomática, esto es, aceptaremos que existe un conjunto, el de los números reales, el cual bajo las operaciones de suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ verifica ciertas propiedades.

Comenzaremos recordando algunas de las propiedades que satisfacen algunos conjuntos notables.

Consideremos en primer lugar el conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

llamado conjunto de los **Números Naturales**, este conjunto provisto de la operación producto $(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

1. **Clausura:** Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

2. **Asociatividad:** Para todo $n, m, r \in \mathbb{N}$, se tiene que
$$(n \cdot m) \cdot r = n \cdot (m \cdot r).$$

3. **Existencia de neutro:** Existe $e = 1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$
$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n.$$

4. **Conmutatividad:** Para todo $n, m \in \mathbb{N}$
$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Pero en $\mathbb{N}$ no se verifica la propiedad de **existencia de inverso multiplicativo**, esto es, dado $n \in \mathbb{N}$ no existe un elemento $n' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \cdot n' = 1.$$

Si consideramos ahora la operación suma $(+)$ en $\mathbb{N}$, tenemos que esta verifica (1), (2) y (4). Sin embargo no se cumple (3) pues no existe $e \in \mathbb{N}$ tal que:

$$e + n = n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos ahora el conjunto de los **Números Enteros**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

este conjunto lo podemos expresar en términos del conjunto anterior y el elemento cero (0), esto es

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^{-} \cup \{0\},$$

donde

$$\mathbb{N}^{-} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

este conjunto bajo la suma verifica las siguientes propiedades:

1. **Clausura:** Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $a + b \in \mathbb{Z}$.
2. **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene que
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$
3. **Existencia de neutro:** Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$
$$0 + a = a + 0 = a.$$
4. **Existencia de elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $(-a) \in \mathbb{Z}$ tal que
$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$
5. **Conmutatividad:** Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$
$$a + b = b + a.$$

Ahora bien, si consideramos la operación producto $(\cdot)$ en $\mathbb{Z}$ esta verifica (1),(2),(3) y (5). Sin embargo no se verifica (4) pues en general para $a \in \mathbb{Z}$ no existe $a^{'} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a \cdot a^{'} = 1.$$

El hecho de que $\mathbb{Z}$ bajo la operación suma $(+)$ satisface las propiedades antes mencionadas se resume diciendo que $\mathbb{Z}$ bajo la suma es un grupo.

Consideremos

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

el cual recibe el nombre de conjunto de los **Números Racionales.**

Se definen en él las siguientes operaciones:

1. Suma
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$
2. Producto
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Con estas operaciones se tiene que, $\mathbb{Q}$ con $(+)$ y $\mathbb{Q}-\{0\}$ con $(\cdot)$ son grupos, o sea satisfacen las propiedades de **clausura, asociatividad, existencia de neutro y existencia de inverso**, además se verifica la **conmutatividad**.

Otro conjunto notable es el conjunto de los **Números Irracionales** que usualmente es denotado por $\mathbb{I}$.

Algunos ejemplos de números irracionales son:
$$\pi, \quad e, \quad \sqrt{2}$$
donde $\pi$ se aproxima al racional $3,14$(por ejemplo).

**Observación.** El conjunto $\mathbb{I}$ con la operación $(+)$ no satisface la propiedad de clausura, en efecto, consideremos los irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, tenemos que $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, el cual es un número racional ($0=\frac{0}{1}$ por ejemplo), de esto es evidente que $\mathbb{I}$ no es un grupo.

## 1.2. Grupo

**Definición 1** *Sea $G$ un conjunto no vacío. Diremos que $*$ es una operación ("binaria") en $G$ si para todo $a,b$ en $G$ existe un único $a*b$ en $G$, es decir*
$$(\forall a,b\in G)(\exists!\, c\in G)(a*b=c).$$

**Definición 2** *Un grupo es un conjunto no vacío $G$ y una operación ("binaria") $*$, tal que para todo $a,b$ y $c$ en $G$ se cumplen los siguientes axiomas:*

**i) Asociatividad**

*Para todo $a,b,c$ en $G$, se cumple*
$$a*(b*c)=(a*b)*c.$$
*En símbolos*
$$(\forall a,b,c\in G)(a*(b*c)=(a*b)*c).$$

**ii) Existencia de elemento neutro**

*Existe $e$ elemento neutro de $G$, tal que para todo $a$ en $G$, se cumple*
$$a*e=a=e*a.$$
*En símbolos*
$$(\exists\, e\in G)(\forall a\in G)(a*e=a=e*a).$$

**iii) Existencia de elemento inverso**

*Para todo $a$ en $G$, existe $b$ en $G$, tal que*

$$a * b = e = b * a.$$

*En símbolos*

$$(\forall a \in G)(\exists\, b \in G)(a * b = e = b * a).$$

En adelante diremos que $(G, *)$ es un grupo para indicar que $G$ bajo la operación $*$ es un grupo.

Diremos que $G$ es un grupo abeliano o conmutativo, si y sólo si $(G, *)$ es un grupo y satisface la propiedad de **conmutatividad**, esto es:

$$(\forall a, b \in G)(a * b = b * a).$$

**Proposición 1** *El elemento $e \in G$ es único.*

**Demostración.** Supongamos que $e$ y $e^{'}$ son neutros en $G$, esto es:

$$(\forall a \in G)(a = e * a = a * e) \tag{1.1}$$
$$(\forall b \in G)(b * e^{'} = e^{'} * b = b). \tag{1.2}$$

En particular como $e^{'} \in G$ podemos tomar $a = e^{'}$ en (1.1) con lo cual

$$e^{'} = e * e^{'} = e^{'} * e, \tag{1.3}$$

del mismo modo considerando $b = e$ en (1.2) se tiene

$$e * e^{'} = e^{'} * e = e. \tag{1.4}$$

Ahora de (1.3) y (1.4) tenemos que

$$e^{'} = e * e^{'} = e^{'} * e = e$$

es decir;

$$e^{'} = e$$

de este modo queda demostrado que el neutro es único. ■

**Ejemplo 1** *Los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ con la suma habitual de números son grupos abelianos. Con la multiplicación usual el conjunto $\mathbb{Q} - \{0\}$ es también un grupo abeliano.*

**Ejemplo 2** *Sea $X$ un conjunto no vacío y definamos*

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{Q}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{Q} \mid f \text{ es una función}\}$$

*el conjunto de todas las funciones*[1] *de $X$ en $\mathbb{Q}$ y la suma $(+)$ definida por:*

$$\begin{array}{rcccl} f + g & : & X & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & x & \longmapsto & (f+g)(x) := f(x) + g(x) \end{array}$$

*entonces $\mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$ es un grupo. En efecto*

[1] La definición del concepto “función”será visto con detalle en el capítulo siguiente.

*1.* **Asociatividad**

*Sean* $f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$ *y* $x \in X$, *luego*

$$\begin{array}{rcll} (f+(g+h))(x) & = & (f)(x)+(g+h)(x) & \textit{definición de } (+) \\ & = & f(x)+g(x)+h(x) & \textit{definición de } (+) \\ & = & (f(x)+g(x))+h(x) & \textit{asociatividad en } \mathbb{Q} \\ & = & (f+g)(x)+h(x) & \textit{definición de } (+) \\ & = & ((f+g)+h)(x) & \textit{definición de } (+) \end{array}$$

*2.* **Existencia de elemento neutro**

*Existe*

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{0} & : & X & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & x & \longmapsto & \widehat{0}(x) := 0 \end{array} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$$

*función nula tal que, para toda* $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$ *se tiene que:*

$$(f+\widehat{0})(x) = (\widehat{0}+f)(x) = f(x)$$

*3.* **Existencia de elemento inverso**

*Para toda* $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$ *existe*

$$\begin{array}{rcccl} -f & : & X & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & x & \longmapsto & (-f)(x) := -(f(x)) \end{array} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$$

*tal que:*

$$(f+(-f))(x) = ((-f)+f)(x) = \widehat{0}(x)$$

# 1.3. Números Reales $\mathbb{R}$

## 1.3.1. Axiomas de $\mathbb{R}$ como cuerpo

Aceptaremos la existencia de un conjunto que denotaremos por $\mathbb{R}$ y cuyos elementos serán llamados números reales, en el cual están definidas las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ usuales, que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$.
2. $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano.
3. $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
4. Distributividad:
$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c).$$

Ya que $\mathbb{R}$ satisface estas propiedades, se dice que $\mathbb{R}$ es un **Cuerpo**, el cual denotaremos por $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
**Observación.** Si no hay peligro de confusión en adelante anotaremos sólo "$ab$", para referirnos al producto "$a \cdot b$", con $a, b \in \mathbb{R}$.

**Proposición 2** *En $\mathbb{R}$ tenemos que:*

1. *El neutro aditivo de un número real es único.*
2. *El neutro multiplicativo de un número real es único.*
3. *El inverso aditivo de un número real es único.*
4. *El inverso multiplicativo de un número real no nulo es único.*

**Demostración.** La demostración de estos hechos es análoga a la dada en la proposición (1) y se dejará como ejercicio. ■

**Observación.** Un técnica de demostración bastante utilizada es el llamada método del absurdo. Este método muy útil para demostrar proposiciones del tipo

$$p \Rightarrow q$$

notemos que

$$\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}.$$

El propósito es suponer que la proposición $p \wedge \overline{q}$ es verdadera, a partir de ello llegar a una contradicción, esto significa que la proposición $p \wedge \overline{q}$ es falsa y por lo tanto $\overline{p \wedge \overline{q}}$ es verdadera, de otro modo que $p \Rightarrow q$ es verdadero.

**Ejemplo 3** *Si $m^2$ es par, entonces $m$ es par.*

**Demostración.** Procedamos por absurdo.

Supongamos $m^2$ par y $m$ impar. Como $m$ es impar entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m = 2k + 1$$

de esto tenemos que

$$\begin{aligned} m^2 &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

luego $m^2 = 2k' + 1$, con $k' = 2k^2 + 2k,\ k' \in \mathbb{Z}$ de donde obtenemos que $m^2$ es un número impar, lo que contradice nuestro supuesto de que $m^2$ es par, así

$$m^2 \text{ par } \Rightarrow m \text{ par.} \tag{1.5}$$

■

**Notaciones:** $-a$ denota el inverso aditivo de $a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $b^{-1}$ denota el inverso multiplicativo de $b$, con $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.

**Proposición 3** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

*1.* $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

*2.* $-(-a) = a$.

*3.* $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad a \neq 0, b \neq 0$.

*4.* $(a^{-1})^{-1} = a$.

*5.* $a \cdot 0 = 0$.

*6.* $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.

*7.* $(-a)(-b) = ab$.

*8.* $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$.

**Demostración.**

1. Como $a$ y $b$ son números reales, entonces también lo es $a+b$ y como $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo (abeliano) existe $-(a+b)$ inverso aditivo de $a+b$ por lo tanto

$$(a+b) + (-(a+b)) = 0. \tag{1.6}$$

Por otra parte, también existen $-a$ y $-b$ tales que:

$$\begin{aligned} (a+b) + (-a) + (-b) &= (a + (-a)) + (b + (-b)) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

de esta última igualdad podemos concluir que $(-a)+(-b)$ es también inverso de $a+b$ y luego por unicidad del inverso tenemos que

$$-(a+b) = (-a) + (-b).$$

2. Como $(-a)$ es un número real y $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo (abeliano) existe $-(-a)$ inverso aditivo de $(-a)$ tal que

$$(-a) + (-(-a)) = 0.$$

Por otro lado

$$(-a) + a = 0$$

de estas igualdades obtenemos que $-(-a)$ y $a$ son inversos de $(-a)$, luego por unicidad del inverso se tiene que

$$-(-a) = a.$$

3. Análoga a (1), cambiando de notación aditiva a notación multiplicativa.

4. Análoga a (2), cambiando de notación aditiva a notación multiplicativa.

5. Como 0 es neutro aditivo se tiene que:

$$0 = 0 + 0,$$

entonces por distributividad tenemos

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

luego,

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0. \tag{1.7}$$

Ahora, sumando a ambos lados de la igualdad en (1.7) el inverso aditivo de $a \cdot 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) &= a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) \\ 0 &= a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))) \\ 0 &= a \cdot 0 + 0 \\ 0 &= a \cdot 0 \end{aligned}$$

así,

$$a \cdot 0 = 0. \tag{1.8}$$

6. Es claro que

$$ab + (-(ab)) = 0. \tag{1.9}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b \\ &= 0 \cdot b \\ &= 0 \quad (\text{por } (1.8)) \end{aligned}$$

Tenemos entonces que tanto $(-a)b$ como $-(ab)$ son inversos de $ab$, luego por unicidad del inverso se tiene que

$$-(ab) = (-a)b \tag{1.10}$$

Además, por conmutatividad en (1.10) se tiene

$$\begin{aligned} -(ab) &= -(ba) \\ &= (-b)a \\ &= a(-b) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(-a)b = -(ab) = a(-b).$$

7. Notemos que

$$\begin{array}{rcll}(-a)(-b) & = & -(a(-b)) & \text{(usando (6))}\\ & = & -(-(ab)) & \text{(usando (6))}\\ & = & ab & \text{(usando (2))}\end{array}$$

luego,

$$(-a)(-b) = ab.$$

8. ($\Rightarrow$) Observemos que

$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

es una proposición del tipo $p \Rightarrow (q \vee r)$, la cual es equivalente[2] a $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r$, que es lo que usaremos para probar esta parte de la demostración.

Supongamos entonces $a \neq 0$, luego existe $a^{-1}$ tal que

$$\begin{array}{rrcc}ab = 0 & \Rightarrow a^{-1}ab & = & a^{-1}0\\ & \Rightarrow 1 \cdot b & = & 0\\ & \Rightarrow b & = & 0.\end{array}$$

($\Leftarrow$) Claramente si $a = 0 \vee b = 0$ se tiene que $ab = 0$.

Concluyendo así la demostración.

$\blacksquare$

**Notaciones:** También debemos tener presente

$$a \cdot b^{-1} = ab^{-1} = \frac{a}{b} = a : b$$

Con la notación anterior, y las propiedades demostrada tenemos

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

**Ejemplo 4** *Reemplazar* $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{3}$ *en*

$$x = \frac{ab - a}{a + 1}$$

**Solución:**

[2]Este hecho se verá con detalle en el curso de Matemáticas Generales.

$$\begin{aligned} x &= \frac{ab-a}{a+1} \\ &= \frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2}+1} \\ &= \frac{\frac{-1}{6}-\frac{-1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{-1+3}{6}}{\frac{2-1}{2}} \\ &= \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{1} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### 1.3.2. Potencias Enteras

**Definición 3** *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define la potencia real de base $a$ y exponente $n$ por:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-veces}$$

*Mas precisamente sea $a \in \mathbb{R}$, se define por recurrencia*

1. $a^1 \quad = a$
2. $a^{n+1} = a^n a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

*Además para el caso $a \neq 0$, se define $a^0 = 1$.*

Sea $n \in \mathbb{Z}^-, a \neq 0$. Se define la potencia de base $a$ y exponente $n$ como sigue:

$$a^n = (a^{-1})^{-n} = \frac{1}{(a)^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{-n-veces}}$$

**Teorema 4** *Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces:*

1. $a^{m+n} = a^m a^n$.
2. $a^n b^n = (ab)^n$.
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.
5. $(a^n)^m = a^{nm}$.

**Demostración.** Probaremos sólo (1) quedando las demás propiedades como ejercicio. Procederemos por inducción[3] como sigue.

Sea $P(n) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n); \quad n \in \mathbb{N}_0$

$$P(0) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+0} = a^m a^0)$$

lo cual es verdadero por definición de potencia.

Supongamos $P(n)$ verdadero y demostremos que $P(n+1)$ es verdadero.

$$P(n+1) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n+1} = a^m a^{n+1})$$

$$\begin{array}{rcll} a^{m+n+1} & = & a^{m+n}a & \text{(definición de potencia)} \\ & = & (a^m a^n)a & \text{(hipotesis de inducción)} \\ & = & a^m(a^n a) & \text{(asociatividad)} \\ & = & a^m a^{n+1} & \text{(definición de potencia)} \end{array}$$

tenemos entonces que

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n) \tag{1.11}$$

es verdadero por teorema de inducción.

Sea $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}_0$, luego

$$\begin{array}{rcll} a^{m+n} & = & a^{m-(-n)} & \\ & = & a^{-(-m+(-n))} & \\ & = & (a^{-1})^{-m+(-n)} & \\ & = & (a^{-1})^{-m}(a^{-1})^{-n} & \text{(por (1.11))} \\ & = & a^m a^n & \end{array}$$

de este modo podemos concluir que

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n).$$

■

**Observación.** Las propiedades antes mencionadas son válidas para el caso $a = 0$ o $b = 0$, siempre que las expresiones que las definen tengan sentido en $\mathbb{R}$.

### 1.3.3. Algunos productos notables

De acuerdo a las propiedades de potencias y axiomas de los números reales tenemos la siguiente lista de productos notables:

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

[3]Técnica de demostración que será vista con detalle en el curso de Matemáticas Generales.

3. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
5. $a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})$, $\forall m \in \mathbb{Z}^+$.

**Ejemplo 5** *Simplificar completamente, para los valores de $a \in \mathbb{R}$ donde estén bien definida la siguiente expresión:*

$$X = \frac{\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a} - \dfrac{a}{1-a}}.$$

**Solución.** Sea $a \in \mathbb{R}$ donde está bien definida la expresión, luego podemos simplificar.

$$\begin{aligned} X &= \frac{\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a} - \dfrac{a}{1-a}} \\ &= \frac{\dfrac{a^2 + (1-a)^2}{a(1-a)}}{\dfrac{(1-a)^2 - a^2}{a(1-a)}} \\ &= \frac{a^2 + (1-a)^2}{a(1-a)} \frac{a(1-a)}{(1-a)^2 - a^2} \\ &= \frac{a^2 + (1-a)^2}{(1-a)^2 - a^2} \\ &= \frac{2a^2 - 2a + 1}{1 - 2a}. \end{aligned}$$

### 1.3.4. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

**Definición 4** *Una ecuación lineal en la variable $x$ es una expresión del tipo*

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \tag{1.12}$$

Encontrar el conjunto solución para una ecuación de este tipo, corresponde a encontrar $x \in \mathbb{R}$ de modo que la igualdad en (1.12) se verifique.

Determinemos ahora la solución de (1.12)

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad ax &= -b \\ \Leftrightarrow \quad x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Luego la solución de esta ecuación está dada por

$$x = -\frac{b}{a} \quad \text{o} \quad \mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}. \tag{1.13}$$

Donde $\mathcal{S}$ denota el conjunto solución de (1.12).

**Ejemplo 6** *Determinar la solución de la ecuación*

$$4x - 3\pi = 5\sqrt{2} - 8x.$$

Primero debemos llevar esta ecuación a la forma dada en (1.12) obteniendo

$$\begin{array}{rrcl} & 4x - 3\pi & = & 5\sqrt{2} - 8x \\ \Leftrightarrow & 4x + 8x - 3\pi - 5\sqrt{2} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 12x + (-3\pi - 5\sqrt{2}) & = & 0 \end{array}$$

ahora aplicando (1.13) tenemos que la solución esta dada por

$$x = \frac{3\pi + 5\sqrt{2}}{12}.$$

**Observación.** Por el momento estamos usando el resultado, que da la existencia de la raíz cuadrada de un número no negativo.

**Ejemplo 7** *Determine el valor de $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ de modo que la solución de la ecuación lineal*

$$7\lambda x + 3\lambda = 4 \tag{1.14}$$

*sea igual a* $-\frac{3}{5}$.

Primero determinemos la solución de (1.14), esto es

$$\begin{array}{rrcl} & 7\lambda x + 3\lambda & = & 4 \\ \Leftrightarrow & 7\lambda x + 3\lambda - 4 & = & 0 \end{array}$$

y por (1.13)

$$x = \frac{4 - 3\lambda}{7\lambda}$$

luego tenemos que

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{4 - 3\lambda}{7\lambda} & = & -\frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & 20 - 15\lambda & = & -21\lambda \\ \Leftrightarrow & 6\lambda + 20 & = & 0 \end{array}$$

aplicando nuevamente (1.13)

$$\lambda = -\frac{10}{3}.$$

**Definición 5** *Un sistema de ecuaciones lineales de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right|$$

*donde $a_{ij}, b_i$ y $x_j \in \mathbb{R}$,* $\quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \forall j = 1, 2, \ldots, n.$

Resolver un sistema de este tipo involucra encontrar una n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisface cada una de las ecuaciones simultáneamente.
**Observación.** Un sistema de ecuaciones lineales no siempre posee solución. Más aún tiene tres posibilidades:

1. El conjunto solución tiene sólo un elemento.
2. El conjunto solución tiene infinitos elementos.
3. El conjunto solución es vacío.

**Ejemplo 8** *Resolver el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcr} x-5y &=& -3 \\ 3x-y &=& 8 \end{array}\right|$$

Si multiplicamos por $-5$ la segunda ecuación y la sumamos con la primera se obtiene la ecuación

$$-14x = -43$$

de donde $x = \frac{43}{14}$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos $y = \frac{17}{14}$.

Luego el sistema tiene única solución, y esta es

$$x = \frac{43}{14},\ y = \frac{17}{14}$$

o de manera equivalente la 2-upla

$$(x,y) = \left(\frac{43}{14}, \frac{17}{14}\right); \quad \mathcal{S} = \left\{\left(\frac{43}{14}, \frac{17}{14}\right)\right\}.$$

**Ejemplo 9** *Resolver el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 1 \\ x-y+z &=& 0 \end{array}\right|$$

Multiplicando la segunda ecuación por $-1$ y sumándola con la primera obtenemos la ecuación

$$2y = 1$$

de donde $y = \frac{1}{2}$. Luego de la segunda ecuación tenemos que $x = y - z$, esto es $x = \frac{1}{2} - z$, donde $z \in \mathbb{R}$ es arbitrario, así el sistema tiene infinitas soluciones y el conjunto solución lo podemos expresar como

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2} - z, \frac{1}{2}, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\right\}.$$

**Ejemplo 10** *Resolver (si es posible) el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcr} -2x+y+z &=& 0 \\ x-2y+z &=& 0 \\ x+y-2z &=& -2 \end{array}\right|$$

De la primera ecuación obtenemos que

$$y = 2x - z \tag{1.15}$$

reemplazando en la segunda ecuación se tiene que $x = z$, de esto y de (1.15) tenemos que $y = z$ por lo tanto se tiene que $x = y = z$.

Ahora bien si reemplazamos este resultado en la tercera ecuación obtenemos que $0 = -2$, lo cual es claramente una contradicción, en consecuencia el sistema no tiene solución, es decir el conjunto solución es vacío.

### 1.3.5. Problemas de Planteo

Comenzaremos recordando algunos conceptos que serán de gran utilidad para la resolución de problemas:

1. Se dice que $p$ es el $q$ por ciento de $x$, si y sólo si
$$p = \frac{q}{100}x.$$

2. La razón entre los números $a : b$ es el cociente
$$\frac{a}{b}.$$
Se llama proporción a una igualdad entre dos razones, por ejemplo
$$a : b = c : d$$
la cual se lee $a$ es a $b$ como $c$ es a $d$.

   *a*) Se dice que $a$ es directamente proporcional a $b$ si y sólo si existe una constante $k$ tal que
   $$a = kb.$$

   *b*) Se dice que $a$ es inversamente proporcional a $b$ si y sólo si existe una constante $k$ tal que
   $$a = k\frac{1}{b}.$$

   La constante $k$ (en ambos casos) es llamada factor de proporcionalidad.

3. Sea $T$ un triángulo equilátero de lado $a$.
$$\begin{aligned} \text{Altura de } T &: \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \\ \text{Area de } T &: \quad A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

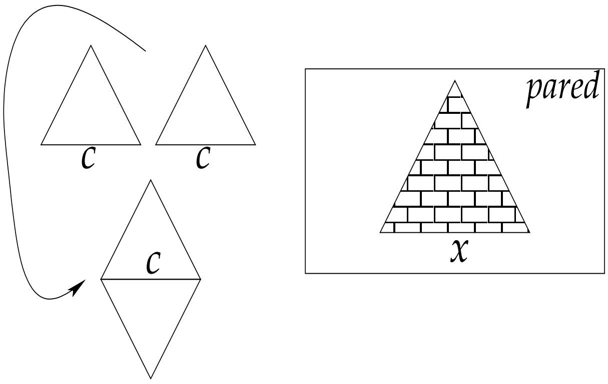


Figura 1.1: Situación del Problema.

**Ejemplo 11** *Para concluir un trabajo, un albañil corta dos pedazos de cerámica siendo cada uno un triángulo equilátero de base c. Al unir estos pedazos por uno de sus lados, se forma un rombo el cual al ser pegado en la pared no alcanza a cubrir la superficie deseada por el maestro, quedando por rellenar un espacio con una cerámica cuya forma debe ser también un triángulo equilátero, pero de área igual al* 60 % *del rombo. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de esta última cerámica para que se tenga el trabajo terminado?.*

**Solución:** Sea $x$ la longitud del lado de la cerámica que buscamos.

Tenemos que el área del rombo es dos veces el área de los triángulos equiláteros de lado $c$, esto es

$$\text{Area del rombo} = 2\left(\frac{c^2\sqrt{3}}{4}\right),$$

pero el area del triángulo de lado $x$ es el 60 % del area del rombo, o sea

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} & = & \dfrac{60}{100}\dfrac{c^2\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad x^2 & = & \dfrac{6}{5}c^2 \\ \Leftrightarrow \quad x & = & \sqrt{\dfrac{6}{5}}c. \end{array}$$

Así la longitud del lado es $x = \sqrt{\frac{6}{5}}c$.

**Ejemplo 12** *En que tanto por ciento debe aumentarse el radio de una circunferencia para que su área aumente en un* 30 %.

**Solución:** Sean $A = \pi r^2$ el área de la circunferencia de radio $r$ y $x$ la longitud de radio que debemos aumentar para que su área aumente en un 30 %.

Debemos ver que tanto por ciento es $x$ de $r$.

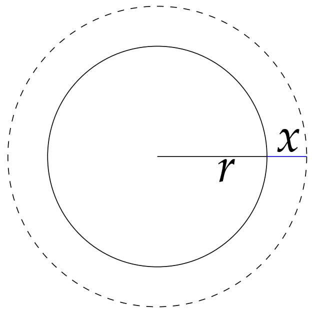


Figura 1.2: Situación del Problema.

Tenemos que el área de la circunferencia más el 30 % de la misma está dada por

$$\begin{array}{rrcl} & A+\frac{30}{100}A & = & \pi(r+x)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{13}{10}A & = & \pi(r+x)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{13}{10}\pi r^2 & = & \pi(r+x)^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\frac{13}{10}}r & = & r+x \\ \Leftrightarrow & x & = & \left(\sqrt{\frac{13}{10}}-1\right)r \approx 0{,}14r. \end{array}$$

De aquí tenemos que $x$ es aproximadamente el 14 % de $r$, con lo cual concluimos que el radio debe aumentar en un 14 % para obtener un 30 % más de área.

**Ejemplo 13** *Dos personas A y B se encuentran realizando un trabajo. Si A realiza el trabajo en* 3 *horas y B realiza el trabajo en* 5 *horas. ¿Cuánto tiempo demoraran en hacer el trabajo juntos?.*

**Solución:** Sea $t$ el trabajo y sea $x$ el tiempo (en horas) que demorarán en hacer el trabajo los dos obreros.

Como $A$ demora 3 horas en realizar el trabajo tenemos que en una hora $A$ realiza $\frac{t}{3}$ del trabajo, razonando del mismo modo se tiene que $B$ realiza $\frac{t}{5}$ del trabajo en una hora.

De acuerdo a esto podemos concluir que en una hora ambos realizan $\frac{t}{3}+\frac{t}{5}=\frac{8t}{15}$ del trabajo.

Luego tenemos que el trabajo total esta dado por la siguiente ecuación

$$\frac{8t}{15}x=t$$

simplificando obtenemos que $x=1{,}875$ horas. Por lo tanto tenemos que los obreros demoran 1,875 horas en realizar el trabajo juntos.

**Ejemplo 14** *Un número de dos cifras excede en* 18 *a seis veces la suma de sus cifras. Si la cifra de las decenas excede en* 5 *a la de las unidades, ¿cuál es el número?.*

**Solución:** Sea $x$ la cifra de las unidades e $y$ la cifra de las decenas, en primer lugar tenemos que el número buscado es[4] $10y + x$, ahora bien de acuerdo a la información del problema tenemos que

$$10y + x = 6(x + y) + 18 \text{ y que } y = x + 5.$$

En consecuencia tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -5x + 4y & = & 18 \\ x - y & = & -5 \end{array}\right|$$

multiplicando la segunda ecuación por 4 y sumándola con la primera obtenemos que $x = 2$ y con esto que $y = 7$.

Por lo tanto el número buscado es $7 \cdot 10 + 2 = 72$.

**Ejemplo 15** *Una pareja de estudiantes universitarios debe resolver un determinado problema. Después que el primero de ellos a trabajado durante* 7 *horas en la resolución del problema y el segundo a trabajado durante* 4 *horas en la solución del mismo, juntos han completado* $\frac{5}{9}$ *de la solución total. Si ellos siguieran trabajando juntos durante* 4 *horas más, solo les quedaría por resolver* $\frac{1}{18}$ *del problema. ¿Cuánto tardaría cada uno en resolver completamente el problema?.*

**Solución:** Sea "$s$" la solución del problema. Denotemos por "$x$" la cantidad de horas que tardaría el primer estudiante en resolver el problema y denotemos por "$y$" la cantidad de horas que tardaría el segundo estudiante en dar solución al problema. Entonces en una hora el primer estudiante realiza $\frac{s}{x}$ de la solución completa mientras que el segundo realiza en el mismo tiempo $\frac{s}{y}$ de la solución completa.

De acuerdo a la información del problema tenemos que

$$7\frac{s}{x} + 4\frac{s}{y} = \frac{5s}{9}.$$

Ahora bien como ellos trabajarán juntos durante 4 horas, realizarán $\frac{4s}{x} + \frac{4s}{y}$ de la solución, que es igual a

$$s - \left(\frac{5s}{9} + \frac{s}{18}\right) = \frac{7s}{18}$$

así se tiene que

$$\frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} = \frac{7s}{18}$$

luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} \frac{7s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{5s}{9} \\ \frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{7s}{18} \end{array}\right|$$

simplificando obtenemos,

[4]Si un número $N$ tiene $n$ cifras $N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$ ordenados de izquierda a derecha entonces $N = N_{n-1}10^{n-1} + \cdots + N_1 10 + N_0$