VECTORES

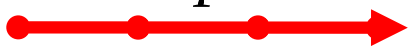
Un vector es un segmento dirigido que tiene como característica una ***Magnitud, Dirección*** *y un* ***Sentido.***

Se nombran por letras mayúsculas o minúsculas o como segmento, agregando si sobre ellas una pequeña flecha, como:

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{d}, \vec{e}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{NM}$$

Se representan por flechas, ya que es el único símbolo que tiene estas tres característica , como por ejemplo:

$$\vec{F}$$



En cuanto a sus características:

a) ***Magnitud:*** *Corresponde al tamaño del vector, es decir cuanto mide, se relaciona con su valor numérico, para nuestro caso:*

$$\left|\vec{F}\right| = F = 3(un)$$

b) ***Dirección:*** *Esta se relaciona con el observador y su sistema de referencia , pudiendo ser ,: Horizontal, Vertical o Diagonal. Para nuestro caso la dirección de* ***F*** *es horizontal*

c) ***Sentido :*** *Este lo determina la punta de flecha y se relaciona por lo general con los puntos cardinales , para nuestro caso el sentido de* ***F*** *es hacia el* ***Este.***

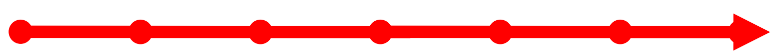
Consideraciones generales de los vectores

1) Los vectores en forma estricta, deben tener las tres características , una de ellas que no la tengan , dejan de ser vectores

2) Dos vectores serán iguales, siempre y cuando sus tres características sean idénticamente iguales

3) Un valor numérico frente al vector, altera solo a su magnitud, manteniendo invariable su dirección y sentido. Por ejemplo del vector ***F*** *anterior dibuje 2**F***

$$2\vec{F}$$



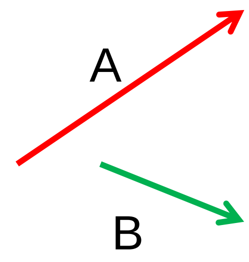
4) Un signo negativo frente al vector, solo cambia su sentido, manteniendo invariable su magnitud y dirección. Por ejemplo del vector ***F*** *anterior dibuje -**F***

$$-\vec{F}$$

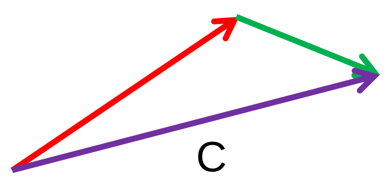
OPERATORIA GRAFICA DE VECTORES

Los vectores pueden operar gráficamente en base a dos métodos , Método del Polígono y Método del Paralelogramo

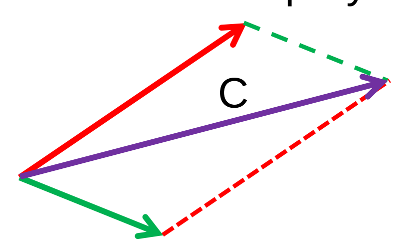
Sean los vectores A y B , encontrar C=A+B



a) **Método del Polígono**: Este método consiste en unir un vector seguido del otro , donde la resultante corresponde a la unión del origen del primero con el final del ultimo.



b) **Método del Paralelogramo**: Este método consiste en unir todos los orígenes de los vectores, proyectándose luego uno sobre el otro , de tal forma de construir un paralelogramo , donde la resultante corresponderá a la diagonal formada por la unión de los orígenes hacia la intersección de sus proyecciones.

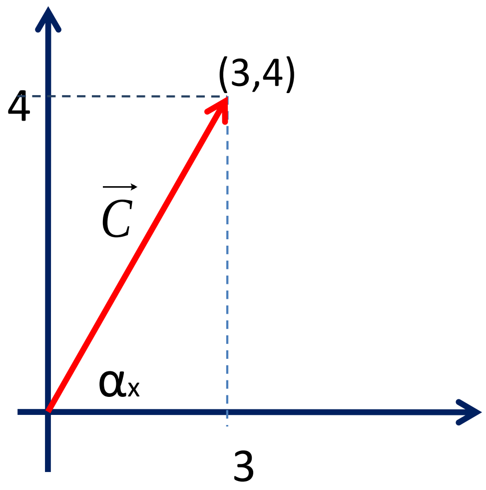


Ambos métodos entregan el mismo resultado, solo difieren en el procedimiento , el polígono se trabajan con todos de una sola ves, en cambio el paralelogramo de dos en dos.

VECTORES COMO PARES ORDENADOS

Son vectores dados como un punto coordenado y representados en un sistema cartesiano , como por ejemplo el vector **C** = (3,4)

Su representación grafica corresponde:



En cuanto a su Magnitud , esta se determina mediante el Teorema de Pitágoras, es decir:

$$\left|\vec{C}\right| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

, para nuestro caso:

$$\left|\vec{C}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$\left|\vec{C}\right| = \sqrt{9+16}$$

$$\left|\vec{C}\right| = \sqrt{25} = 5$$

En cuanto a su Dirección, esta esta relacionada con el ángulo "α" que se determina mediante las funciones trigonométricas inversas , es decir:

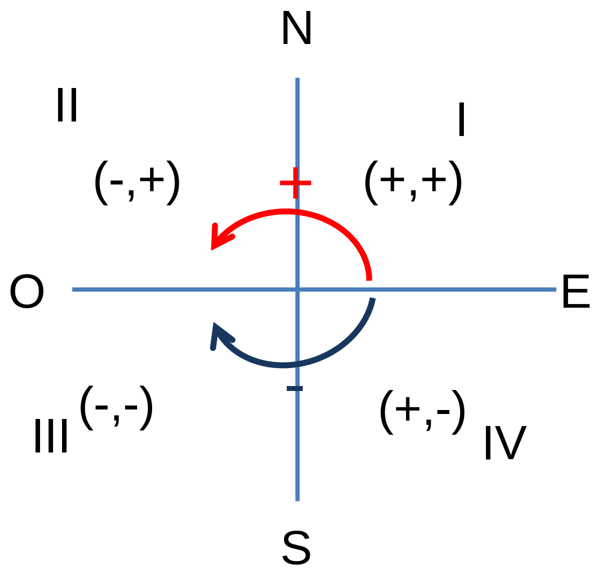
$$\alpha = tg^{-1}\left[\frac{C_y}{C_x}\right] \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left[\frac{4}{3}\right] = 53{,}13^{o}$$

$$Magnitud = 5un$$

$$Dirección = 53{,}13^{o}\ del\ Este$$

$$Sentido = N - E$$

El plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes



Los ángulos se determinan positivos si el giro es anti horario y negativo si es horario.

El sentido del vector lo indica el signo del punto coordenado que lo asigna a un cuadrante determinado

Por ejemplo para el caso del vector C anterior, este se ubica en el primer cuadrante porque sus signos son positivos, por lo tanto el sentido es N-E

Los vectores pueden operar algebraicamente trabajando con cada una de sus coordenadas en forma separada, es decir, las “x” con las “x” y las “y” con las “y”

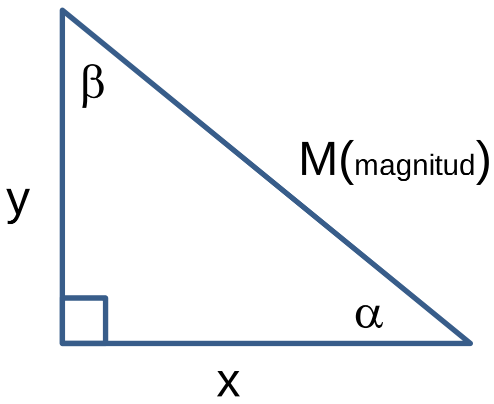
Por ejemplo:

1) Considere los vectores O =(-3,2) , H=(5,6) y N=(4,-8) , encontrar con su sentido dirección y magnitud :

a) S = O – 2N
b) W = H – O

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las Funciones Trigonométricas están basadas en un triangulo rectángulo ,donde en él podemos reconocer:



Con respecto a “α” :

x→ Cateto adyacente
y→ Cateto Opuesto
M→ Hipotenusa

Con respecto a “β” :

x→ Cateto Opuesto
y→ Cateto Adyacente
M→ Hipotenusa

$$sen() = \frac{cat.op}{Hipo} \qquad \cos() = \frac{cat.ady}{Hipo}$$

$$tg() = \frac{sen()}{\cos()} = \frac{\frac{cat.op}{\cancel{Hipo}}}{\frac{cat.ady}{\cancel{Hipo}}} = \frac{cat.op}{cat.ady}$$

α

$$sen(\alpha) = \frac{y}{M} \quad \rightarrow y = Msen(\alpha)\ (1)$$

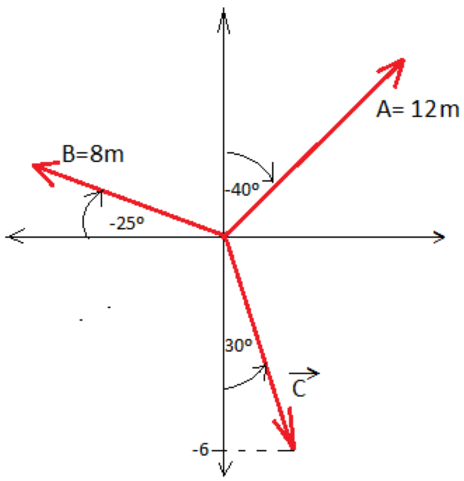
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{M} \quad \rightarrow x = M\cos(\alpha)\ (2)$$

$$tg(\alpha) = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = xtg(\alpha)\ (3)$$

$$donde\ (1),(2)\, y(3) \rightarrow coordenadas\ \ polares$$

2) Dados los vectores A,B y C que aparecen en el grafico, determinar con sentido, dirección y magnitud el vector:

$P = A - 2B + C$



3) Un avión vuela hacia el N-O 30ºN , a 300 K/H , el operador de la torre le informa que se encontrara con vientos cruzados de 40 m/s en dirección 50ºE hacia el N-E , Determinar:

a) Velocidad resultante del avión , producto del viento.

b) Grados que se altero de su ruta original .

4) Una liebre en su paseo matinal por el jardín realiza los siguientes desplazamientos.:

- 8 yd al NE 30º Este
- 20 ft al NO 60º N
- 8 m al Sur

Determinar:

a) Posición final en yd a la que se encuentra con respecto al punto de partida
b) Metros a los que se encuentra con respecto al punto de partida
c) Total de pies recorridos.

VECTORES EN TRES DIMENSIONES

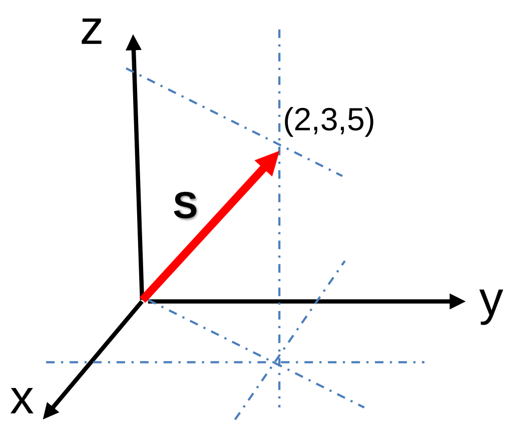
Son aquellos vectores que nos entregan la posición exacta de cualquier punto en el espacio en base a tres coordenadas (x,y,z) , por ejemplo sea el vector S=(2,3,5)

La magnitud , se determina de igual forma que en dos dimensiones , por Pitágoras , es decir:

$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}$$

$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{38} = 6{,}16$$



Su dirección se determina mediante los cosenos directores para cada uno de los ejes , es decir:

$$\alpha_x = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\left|\vec{S}\right|}\right); \alpha_y = \cos^{-1}\left(\frac{y}{\left|\vec{S}\right|}\right); \alpha_z = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\left|\vec{S}\right|}\right)$$

Para el caso nuestro

$$\alpha_x = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\left|\vec{S}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{38}}\right) = 71{,}07^o$$

$$\alpha_y = \cos^{-1}\left(\frac{y}{\left|\vec{S}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\right) = 60{,}88^o$$

$$\alpha_z = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\left|\vec{S}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right) = 35{,}79^o$$

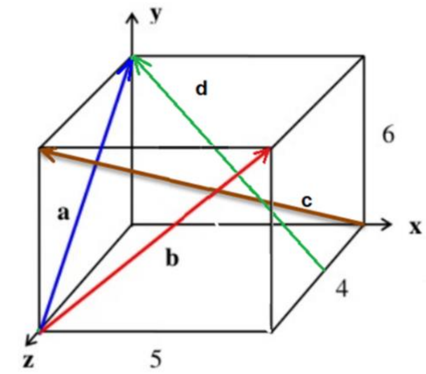
1) En cuanto a su operatoria algebraica, se trabaja de igual forma que en dos dimensiones , es decir x con x , y con y z con z , por ejemplo:

Sean los vectores R=(-2,4,3) y H=(3,-5,-4) encontrar:
W= 2R-H con magnitud, sentido y dirección en “y”

2) Sean los vectores, F=(-5,-8,3) , B=(6,3,-12)y P=(4,-5,-8)
Encontrar con magnitud, dirección en “z” y sentido.

a) A=F-2B
b) C=P+A

3) Dada la figura , donde existen cuatro vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ encontrar:



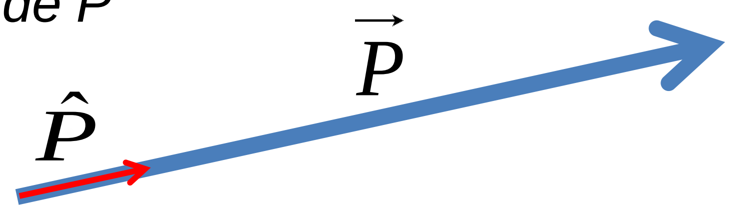
VECTORES UNITARIOS

Son vectores que tienen como característica una *magnitud igual a la unidad*

Cada vector tiene su propio vector unitario , definido por:

$$\boxed{\hat{P} = \frac{\vec{P}}{\left|\vec{P}\right|}}$$

El sombrerito "^" sobre la letra nos indica que es el unitario de P



Por ejemplo:

1)Cual será el vector unitario del vector ***S***=(-2,3)

$$\hat{S} = \frac{\vec{S}}{\left|\vec{S}\right|}$$

$$\hat{S} = \frac{(-2,3)}{\left|\vec{S}\right|}$$

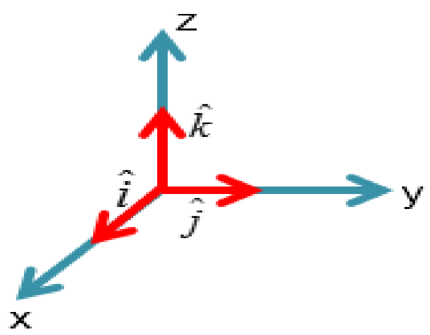
$$\hat{S} = \frac{(-2,3)}{\sqrt{(-2)^2 + (3)^2}}$$

$$\hat{S} = \frac{(-2,3)}{\sqrt{4+9}} = \frac{(-2,3)}{\sqrt{13}}$$

$$\boxed{\hat{S} = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)} \; o \; \boxed{\hat{S} = (-0,55;0,83)}$$

Cada eje tiene su propio vector unitario , es decir:

$$x \rightarrow \hat{i} \qquad y \rightarrow \hat{j} \qquad z \rightarrow \hat{k}$$



La estructura general del vector como punto coordenado:

$$\vec{A} = (x, y, z)$$

En estructura unitaria, …

$$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}$$

Por ejemplo , para cada uno de los vectores complete su igualdad:

$$\vec{D} = (-2, 3, 4) = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{j} = (3, -4, 0)$$

$$\vec{F} = (0, -1, 0) = -\hat{j}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Dados los vectores ***S***, ***W*** , ***M***, ***V***

$$\vec{S} = 4\hat{i} - 6\hat{j} \qquad \overrightarrow{M} = -2\hat{i}$$

$$\overrightarrow{W} = (4,5) \qquad \vec{V} = (8,-5)$$

Encontrar :

$$a)\vec{P} = \vec{S} - 2\vec{V}$$

$$b)\vec{R} = \overrightarrow{W} + \overrightarrow{M}$$

$$c)\vec{O} = \vec{P} + 2\vec{R}$$

$$d)\hat{R}$$

2) Considerando los vectores anteriores ***P*** y ***R*** , encontrar su magnitud, dirección y sentido

3) Un vector **AB** tiene componentes (5,-2,-4). Hallar las coordenadas de **A** sabiendo que el extremo **B**=(12,-3,1) , con su dirección en “z”

4) Calcular la distancia entre los puntos O=(2,1,-4) y H=(-3,2,8)