a) *El elemento neutro de G es* $(0,0)$.

b) *Existe un elemento neutro para G.*

c) *El inverso de* $(1,4)$ *es* $(0,-4)$.

d) $(G,*)$ *es un grupo.*

e) *G cumple la conmutatividad.*

Solución:

a) Falso, existe $(2,3) \in G$, tal que
$$(2,3) * (0,0) = (0,3) \neq (2,3)$$

b) Verdadero, porque existe el elemento $(1,0) \in G$ tal que para todo $(x,y) \in G$;
$$(x,y) * (1,0) = (1,0) * (x,y) = (x,y)$$

c) Falso;
$$(1,4) * (0,-4) = (0,0) \neq (1,0)$$

d) Falso, porque existe $(0,0) \in G$ tal que para todo $(x,y) \in G$;
$$(0,0) * (x,y) = (0,y) \neq (1,0)$$

es decir, (0, 0) no tiene inverso.

e) Verdadero, pues para todo $(x,y), (x',y') \in G$;
$$\begin{aligned}(x,y) * (x',y') &= (xx', y+y') \\ &= (x'x, y'+y) \\ &= (x',y') * (x,y)\end{aligned}$$

luego
$$(x,y) * (x',y') = (x',y') * (x,y)$$

1.2.2 Axiomas de $\mathbb{R}$ como Cuerpo

Admitiremos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ cuyos elementos se llamarán **números reales**. En el conjunto $\mathbb{R}$ se tienen las operaciones fundamentales:
La suma o adición: $a+b$
El producto o multiplicación: $a \cdot b$
Considérense los siguientes axiomas

i) $0 \in \mathbb{R}$, $1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$

ii) $(\mathbb{R}\ ,+)$ es grupo abeliano

iii) $((\mathbb{R}-\{0\}), \cdot)$ es grupo abeliano

iv) Distributividad:
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}\ :\quad a(b+c) = ab + ac$$

Se dice que el conjunto $\mathbb{R}$ provisto de todos los axiomas dados anteriormente es un **Cuerpo** y se escribe; $(\mathbb{R},\ +,\ \cdot)$ es un cuerpo.

Los elementos neutros de $\mathbb{R}$ son el 0 y el 1 (para la adición y multiplicación respectivamente) pero nunca hemos puesto en duda que estos son los **únicos** con esta propiedad.

En efecto, por ejemplo 1 es **el** neutro multiplicativo, según establece la proposición siguiente.

Proposición 1.3 *En los números reales tenemos*

i) *El neutro aditivo es único*

ii) *El neutro multiplicativo es único*

iii) *El inverso aditivo de un número real es único*

iv) *El inverso multiplicativo de un número real no nulo es único*

Sin duda, para la mayoría de nosotros esta será la primera demostración de *unicidad* y siendo asíes bueno hacer notar que muchas veces deberemos probar que algún ente matemático es único. Lo usual en estos casos es usar el **método del absurdo** que consiste en suponer (en estos problemas) que hay dos elementos (es decir, que no es único) que cumplen la propiedad que los define (por ejemplo ser neutro) y bajo este supuesto llegar a una frase matemática que sea **falsa**.

Demostración: (i) Supongamos que $0, 0' \in \mathbb{R}$ son dos neutros aditivos distintos ($0 \neq 0'$), es decir, 0 y 0' cumplen

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a = 0 + a = a + 0 \tag{1.1}$$

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad b + 0' = 0' + b = b \tag{1.2}$$

Como $0' \in \mathbb{R}$, en particular se puede tomar $a = 0'$ en 1.1, asítenemos que

$$0' = 0 + 0' = 0' + 0 \tag{1.3}$$

Análogamente considerando $b = 0$ en 1.2 se tiene

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0 \tag{1.4}$$

Conectando las cadenas 1.3 y 1.4 se tiene que

$$0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$$

es decir,

$$0' = 0$$

lo que hace una contradicción con $0 \neq 0'$

Se dejan como ejercicio para el lector las demostraciones de las partes (ii), (iii) y (iv) de la proposición.

Observación: Es importante aclarar que el método del absurdo es muy útil para demostrar proposiciones del tipo

$$p \Rightarrow q \tag{1.5}$$

El método consiste en suponer que se cumple la negación de 1.5

$$\sim (p \Rightarrow q),$$

es decir, suponer que se verifica

$$p \wedge \sim q \tag{1.6}$$

y a partir de ella obtener una contradicción, la que nos permite afirmar que 1.6 es falso, y por lo tanto que la proposición 1.5 es verdadera.

Como ejemplo, probemos una propiedad que nos será útil más adelante.

Ejemplo 6

$$\textbf{\textit{Si }} p^2 \textbf{\textit{ es par, entonces }} p \textbf{\textit{ es par.}} \tag{1.7}$$

Observe que la proposición en 1.7 es del tipo $r \Rightarrow s$ *donde*[2] $r =: p^2$ ***es par*** *y la proposición* s *es* $s =: p$ ***es par.***

[2] Usaremos el símbolo "=:" para indicar que la proposición a la izquierda de él está definida por la expresión a su derecha. Aquí "$r =: p^2$ es par" significa que la proposición r "se define" como la proposición p^2 es par.

Demostración: Supongamos lo contrario, es decir, p^2 es par y p no es par. Como p no es par p debe ser impar; luego existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p = 2k + 1$$

pero

$$\begin{aligned} p^2 &= (2k+1)(2k+1) \\ &= (2k+1)2k + (2k+1)\cdot 1 \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

luego $p^2 = 2k' + 1$ con $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$ de donde p^2 es impar; lo que contradice el supuesto que p^2 es par.

En consecuencia

Si p^2 es par, entonces p es par

Ejemplo 7 □

Notación:

a^{-1} indica el inverso multiplicativo del número real no nulo a.

Con los axiomas de cuerpo demostraremos algunas propiedades básicas de $\mathbb{R}$.

Proposición 1.4 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces*

i) $-(a+b) = (-a) + (-b)$

ii) $-(-a) = a$

iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$

iv) $(a^{-1})^{-1} = a, \quad a \neq 0$

v) $b \cdot 0 = 0$

vi) $-(ab) = (-a)b = a(-b)$

vii) $(-a)(-b) = ab$

Demostración: i) Como a y b son números reales, $a + b$ también es un número real. Así, por axioma, este último tiene su inverso aditivo que es $-(a + b)$, por lo tanto

$$(a + b) + (-(a + b)) = 0$$

Por otra parte, por conmutatividad, asociatividad, axioma del inverso y axioma del neutro tenemos que

$$\begin{aligned} (a+b) + (-a) + (-b) &= (a + (-a)) + (b + (-b)) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(a + b) + (-a) + (-b) = 0$$

esta última igualdad nos dice que también $(-a) + (-b)$ es inverso de $(a + b)$. De esta forma, por unicidad del inverso aditivo, se tiene que

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

ii) Por axioma del inverso aditivo existe $(-a) \in \mathbb{R}$ y $-(-a) \in \mathbb{R}$ y notemos que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0$$

y

$$(-(-a)) + (-a) = (-a) + (-(-a)) = 0$$

igualdades que nos dicen que tanto a como $-(-a)$ son inversos aditivos de $(-a)$; en consecuencia, por unicidad del inverso aditivo

$$a = -(-a)$$

Análogamente se demuestran (iii) y (iv) cambiando suma por multiplicación y naturalmente cambiando la notación de inverso aditivo a inverso multiplicativo.

v) Puesto que por axioma del neutro aditivo

$$0 = 0 + 0$$

entonces tenemos por distributividad

$$b \cdot 0 = b \cdot (0 + 0) = b \cdot 0 + b \cdot 0$$

luego

$$b \cdot 0 = b \cdot 0 + b \cdot 0$$

Sumando a ambos miembros de la ecuación **??** el inverso aditivo del número real $b{\cdot}0$, asociando debidamente, y por la propiedad del neutro e inverso aditivo se tiene que

$$\begin{array}{rcl} b \cdot 0 + (-(b \cdot 0)) & = & b \cdot 0 + b \cdot 0 + (-(b \cdot 0)) \\ 0 & = & b \cdot 0 + (b \cdot 0 + (-(b \cdot 0))) \\ 0 & = & b \cdot 0 + 0 \\ 0 & = & b \cdot 0 \end{array}$$

luego

$$b \cdot 0 = 0$$

vi) La demostración consiste en probar que $-(ab)$ y $(-a)b$ son inversos aditivos del mismo número: Claramente podemos ver que $-(ab)$ es el inverso de (ab) luego

$$ab + (-(ab)) = 0$$

Por otro lado por la propiedad de distributividad, axioma del inverso aditivo y por **??** tenemos que

$$\begin{array}{rcl} ab + (-a)b & = & (a + (-a))b \\ & = & 0 \cdot b \\ & = & 0 \end{array}$$

luego

$$ab + (-a)b = 0$$

igualdad que nos dice que $(-a)b$ también es inverso de ab, así, por unicidad del inverso de ab se tiene que

$$-(ab) = (-a)b$$

Además, por conmutatividad, **??** se tiene que

$$\begin{array}{rcl} -(ab) & = & -(ba) \\ & = & (-b)a \\ & = & a(-b) \end{array}$$

por lo tanto

$$-(ab) = a(-b)$$

que es la otra igualdad que queríamos probar.

vii) Consideremos

$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= -(a(-b)) && \text{usando vi)}\\ &= -(-(ab)) && \text{usando vi)}\\ &= ab && \text{usando ii)}\end{aligned}$$

luego

$$(-a)(-b) = ab$$

lo que prueba finalmente la proposición. □

Corolario 1.5

i) $(-1)(-1) = 1$

ii) $-(b) = -(1b) = (-1)b$

Demostración: Tomando $a = 1$ y $b = 1$ en vii) se tiene que

$$(-1)(-1) = 1$$

y tomando $a = 1$ en vi) se tiene

$$-(b) = -(1b) = (-1)b$$

□

Notaciones:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces escribiremos

$$\begin{aligned}a + (-b) &= : a - b\\ a^{-1} &= \frac{1}{a}, \quad a \neq 0\\ ab^{-1} &= \frac{a}{b}, \quad b \neq 0\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ejemplo 8 *Cuando anotamos*

$$\frac{1}{x^2 - 4}$$

estamos hablando del inverso multiplicativo de $x^2 - 4$*. De esta forma,* $\frac{1}{x^2-4}$ *sería un número real si y sólo si* $x^2 - 4 \neq 0$*; es decir, si* $x \neq 2$ *y* $x \neq -2$*, asíla igualdad*

$$\frac{1}{x^2 - 4} = (x^2 - 4)^{-1}$$

está definida en $\mathbb{R}$ *si y sólo si* $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$*(en otro caso ambas expresiones carecen de sentido).*

Observación: Si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

en efecto, usando la proposición 1.4 y la notación anterior;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = a^{-1}(b^{-1})^{-1} = a^{-1}b = ba^{-1} = \frac{b}{a}$$

Muchas entre las observaciones anteriores y las que vendrán, son familiares al lector, más aún, ya las ha utilizado; pero lo que debemos notar es que son proposiciones que se pueden demostrar y que todas provienen de los axiomas de cuerpo que cumple $\mathbb{R}$.

Ejemplo 9 *Sean* $a, c \in \mathbb{R},\ b, d \in \mathbb{R} - \{0\}$
Demostraremos que se tiene las siguientes igualdades

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \tag{1.9}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd} \tag{1.10}$$

Usando la notación, proposición 1.4 y los axiomas de $\mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\begin{array}{rcll}
\frac{ad+bc}{bd} & = & (ad+bc)(bd)^{-1} & \textit{notación} \\
 & = & ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} & \textit{distributividad} \\
 & = & adb^{-1}d^{-1} + bcb^{-1}d^{-1} & \textit{1.4iii)} \\
 & = & a(dd^{-1})b^{-1} + (bb^{-1})cd^{-1} & \textit{conmutatividad y asociatividad} \\
 & = & a1b^{-1} + 1cd^{-1} & \textit{propiedad inversos} \\
 & = & ab^{-1} + cd^{-1} & \textit{propiedad neutro} \\
 & = & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} & \textit{notación}
\end{array}$$

Además:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = (ab^{-1})(cd^{-1}) = acb^{-1}d^{-1} = ac(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}$$

Las propiedades anteriores tienen la ventaja de que nos permiten trabajar con expresiones más simplificadas

Subconjuntos Notables

Algunos subconjuntos notables de $\mathbb{R}$ que mencionamos al principio del capítulo son

El conjunto de los **números Naturales**.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

El conjunto de los **números Enteros**.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

El conjunto de los **números Racionales**.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$$

Otros conjuntos notables son

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}_0^+$$

$$\mathbb{Z}^- = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

este último llamado el conjunto de los **números Irracionales**.

Naturalmente se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_0^+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

y además[3]

$$\mathbb{Q} \,\dot{\cup}\, \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Notemos que los siguientes números reales

$$1,324, \quad 0,\overline{3}, \quad \frac{1,2}{0,36}$$

[3] $\dot{\cup}$ indica unión disjunta.

son números racionales, pues ellos se pueden expresar de la forma

$$\frac{a}{b}, \quad \text{para algún } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Por ejemplo

$$1,324 = \frac{1324}{1000}, \quad 0,\overline{3} = \frac{3}{9} \quad \frac{1,2}{0,36} = \frac{\frac{12}{10}}{\frac{36}{100}} = \frac{120}{36}$$

y simplificando cada una obtenemos expresiones racionales más simples

$$1,324 = \tfrac{331}{250}, \quad 0,\overline{3} = \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1,2}{0,36} = \tfrac{10}{3}$$

Algunos ejemplos de números irracionales son

$$\pi, \quad \sqrt{2}, \quad e$$

donde π "se aproxima" al racional $3,14$ y e se aproxima al racional $2,71$. Estas aproximaciones son usadas para hacer algunos cálculos menores más simples, pero ellos tienen infinitos decimales y no son periódicos. Probaremos más adelante que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Recordemos que el radio de una circunferencia está contenido 2π veces en su circunferencia.

Ahora veamos algunos ejemplos que muestran algunas de las propiedades algebraicas que cumplen los subconjuntos de $\mathbb{R}$ anteriormente mencionados.

Ejemplo 10 *Determinemos si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones*

1. *El conjunto de los números irracionales cumple con el axioma de* **clausura** *para la suma o el producto definidos en* $\mathbb{R}$
2. $(\mathbb{I}, +)$ *es un grupo*
3. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *es un cuerpo*
4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *es un cuerpo*

Solución:

1. *Falso. Los números* $a = \sqrt{2}$ *y* $b = -\sqrt{2}$ *son irracionales pero*

$$a + b = 0$$

que es un número racional ($0 = \frac{0}{1}$*, por ejemplo); por lo tanto no cumple con la propiedad de clausura para la suma. Por otra parte si tomamos ahora* $a = b = \sqrt{2}$*, entonces* $ab = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ *que es un número racional; por lo tanto no se cumple la propiedad de clausura para el producto definido en* $\mathbb{R}$.

2. *Falso. Por lo anterior es claro que* $(\mathbb{I}, +)$ *no es grupo*
3. *Falso. Si* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *fuera cuerpo, entonces* $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ *sería grupo; pero* $\mathbb{Z}$ *no cumple la propiedad de inverso multiplicativo.*
4. *Verdadero.* $(\mathbb{Q}, +)$ *es grupo,* $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ *es grupo y se cumple la propiedad distributiva en* $\mathbb{Q}$.

1.2.3 Potencias Enteras

Definición 1.6 *Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define la potencia real de base a y exponente n por:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \ veces}$$

Una definición más precisa de potencia es la siguiente
Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define por recurrencia;

i) $a^0 = 1$, $a \neq 0$

ii) $a^{n+1} = a^n \cdot a$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Sea $n \in \mathbb{Z}^-$, $a \neq 0$. Se define la potencia real de base a y exponente n por:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{-n \ veces}} \tag{1.11}$$

Ejemplo 11

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

Teorema 1.7 *Sea $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, entonces*

i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

ii) $a^n b^n = (ab)^n$

iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

iv) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

v) $(a^n)^m = a^{nm}$

Todas estas propiedades se prueban usando **inducción**, técnica de demostración que consiste en este caso en: primero ver que la igualdad se cumple para $n = 0$; posteriormente, se supone que se cumple la igualdad para un natural (genérico) k y utilizando esta información se muestra que la igualdad es válida para el natural siguiente $k + 1$. Una demostración tal nos garantiza que las igualdades son sólo válidas en $\mathbb{N}_0$ pero usando la definición se puede obtener la propiedad en $\mathbb{Z}$.

Productos Notables

Usando las propiedades de potencias y los axiomas de $\mathbb{R}$ se tienen los siguientes productos notables:

$$\begin{array}{rrcl}
1) & a^2 - b^2 & = & (a+b)(a-b) \\
2) & (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\
3) & a^3 + b^3 & = & (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
4) & a^3 - b^3 & = & (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
5) & (a+b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
6) & (a-b)^3 & = & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
7) & a^m - b^m & = & (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + \\
 & & & ab^{m-2} + b^{m-1}) \ \ \forall m \in \mathbb{Z}^+
\end{array}$$

Ejemplo 12 *Sean a, b en $\mathbb{R}$, tales que la expresión siguiente esté definida en $\mathbb{R}$:*

$$I = \frac{a^{-1} + b^{-1} - c(ab)^{-1}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2b^2} + 2a^{-1}b^{-1}} \left(\frac{1}{\frac{1}{a+b+c}} \right)$$

Simplifique I.
Solución: *Procediendo en etapas, tenemos*

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2b^2(a^{-1} + b^{-1} - c(ab)^{-1})}{a^2 + b^2 - c^2 + 2a^{-1}b^{-1}a^2b^2}(a+b+c) \\ &= \frac{(ab^2 + a^2b - cab)(a+b+c)}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} \\ &= \frac{ab(b+a-c)(a+b+c)}{(a+b)^2 - c^2} \\ &= \frac{ab(b+a-c)(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)} \\ &= ab \end{aligned}$$

Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ la expresión está **definida** en $\mathbb{R}$, y simplifique.

$$E = \frac{x^2 - 2x + 1}{\frac{(x-1)^3}{x^2-1}}$$

Solución: La expresión está definida en $\mathbb{R}$ si

$$\frac{(x-1)^3}{x^2-1} \neq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 1 \neq 0$$

es decir,

$$(x-1) \neq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 1 \neq 0$$

Por lo tanto $E \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
Tenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{x^2 - 2x + 1}{\frac{(x-1)^3}{x^2-1}} \quad x \neq 1\ ,\ x \neq -1 \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^3}(x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{(x-1)}(x-1)(x+1) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Note que $x + 1$ tiene sentido[4] para todo $x \in \mathbb{R}$, no asíE ya que al menos para 1 y -1 no tiene sentido.

1.2.4 Conjunto restricción y conjunto solución de una ecuación

Llamaremos **conjunto restricción**[5] de una expresión que involucra a los términos $P(x)$ y $Q(x)$[6] (por ejemplo, $P(x) = Q(x)$) al conjunto $\mathcal{R}$ de los x en $\mathbb{R}$ para los cuales cada término de la expresión está definida en $\mathbb{R}$.

Llamaremos **conjunto solución** de la ecuación $P(x) = Q(x)$ al subconjunto S de los x en $\mathcal{R}$ que satisfacen la ecuación, es decir,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \cap \mathcal{R} \ : \ P(x) = Q(x)\}$$

[4] Que $x + 1$ tenga "sentido" para todo x en $\mathbb{R}$ significa que $x + 1$ está definido en todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 \in \mathbb{R}$.
[5] Suele llamársele **dominio** de una expresión.
[6] $P(x)$ y $Q(x)$ son expresiones tales que al menos una de ellas involucra la variable x.

También escribiremos
$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ P(x) = Q(x)\}$$
subentendiendo que x debe estar en $\mathcal{R}$.

Observemos que el conjunto solución siempre debe estar incluido en el conjunto restricción $S \subset \mathcal{R}$.

Por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{x} = x\}$ es el conjunto de los reales tales que cumplen la ecuación $\frac{1}{x} = x$, es decir,
$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{x} = x\} = \{-1, 1\}$$

Resolver una ecuación significa encontrar su conjunto solución.

Resolvamos la ecuación
$$\frac{x^2 - 2x + 1}{\frac{(x-1)^3}{x^2-1}} = 3$$

Solución: Por el ejemplo 1.2.3 es claro que el conjunto restricción es $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, Además simplificando la expresión izquierda de la igualdad, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \frac{x^2-2x+1}{\left(\frac{(x-1)^3}{x^2-1}\right)} & = & 3 \\ \Leftrightarrow \qquad x+1 & = & 3 \\ \Leftrightarrow \qquad x & = & 2 \end{array}$$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es:

$$\begin{array}{rcl} S & = & \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x + 1}{\frac{(x-1)^3}{x^2-1}} = 3 \right\} \\ & = & \{2\} \cap \mathcal{R}_1 \\ & = & \{2\} \cap (\mathbb{R} - \{-1, 1\}) \\ & = & \{2\} \end{array}$$

Proposición 1.8 *Sean a, b en $\mathbb{R}$.*

i) *La ecuación*
$$x + a = b$$
tiene por única solución el real $b - a$.

ii) *Si $a \neq 0$ la ecuación*
$$ax = b$$
tiene como única solución el real $\frac{b}{a}$.

La demostración se dejará como ejercicio para el lector; debe usarse las propiedades de inverso aditivo y multiplicativo respectivamente.

Ejercicio 13 *Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.*

1. $\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{x+3}{x+3} = 1\right\} = \mathbb{R}$
2. $\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{(x+3)(x+4)}{x+3} = 1\right\} = \phi$
3. $(\forall a, b \in \mathbb{R})(ab = 1 \Rightarrow (a = 1 \lor b = 1))$
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$

Solución:

1. Falso. El conjunto restricción de la ecuación
$$\frac{x+3}{x+3}=1$$
es $\mathcal{R}=\mathbb{R}-\{-3\}$.
Luego, simplificando la expresión
$$\frac{x+3}{x+3}=1$$
obtenemos que $1=1$ lo cual es verdadero. Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es
$$S=\left\{x\in\mathcal{R}\ :\ \frac{x+3}{x+3}=1\right\}=\mathbb{R}\cap\mathcal{R}=\mathbb{R}-\{-3\}$$

2. Verdadero. El conjunto restricción de la ecuación
$$\frac{(x+3)(x+4)}{x+3}=1$$
es $\mathcal{R}_1=\mathbb{R}-\{-3\}$. Sin embargo al simplificar la expresión
$$\frac{(x+3)(x+4)}{x+3}=1$$
obtenemos la ecuación
$$x+4=1$$
de donde tenemos que $x=-3$. Luego el conjunto solución de la ecuación es
$$\begin{aligned} S=\left\{x\in\mathcal{R}_1\ :\ \frac{x+3}{x+3}=1\right\} &= \{-3\}\cap\mathcal{R}_1 \\ &= \{-3\}\cap(\mathbb{R}-\{-3\}) \\ &= \phi \end{aligned}$$

3. Falso. Consideremos $a=2/3$, $b=3/2$ en $\mathbb{R}$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1 \text{ pero } \frac{2}{3}\neq 1 \text{ y } \frac{3}{2}\neq 1$$

4. Falso. Sean $x=-2$, $y=2$
$$(-2)^2=2^2 \text{ pero } -2\neq 2$$

1.2.5 Resolución de problemas de planteo

La importancia de la proposición 1.8 está en la resolución de problemas. Por ejemplo, en los siguientes problemas debemos llevar el enunciado a un planteamiento matemático que luego se reduce a la resolución de una ecuación en una variable (o a la resolución de un sistema de ecuaciones).

Ejercicio 14 *Una bomba que trabaja sola, llena un estanque en 7 horas, otra lo haría en 8 horas.?'En cuánto tiempo se llena el estanque si trabajan ambas bombas a la vez?*

Solución: Sea x el número de horas que tarda el estanque en llenarse (si trabajan ambas bombas a la vez) y sea V el volumen total del estanque.

Si una bomba llena el estanque en 7 horas (entonces en una hora llenará $\frac{1}{7}$ del estanque), luego en x horas llenará $\frac{x}{7}$ del estanque, es decir, llenará $\frac{xV}{7}$ (unidades de volumen). La otra bomba llena el estanque en 8 horas, entonces en x horas llenará $\frac{x}{8}$ del estanque, es decir, $\frac{xV}{8}$ (unidades de volumen). Como en x horas, las dos bombas juntas llenan al estanque entonces se tiene

$$\frac{xV}{7} + \frac{xV}{8} = V$$

lo que equivale a

$$\frac{x}{7} + \frac{x}{8} = 1$$

de donde $15x = 56$. Luego, trabajando las dos bombas a la vez, el estanque se llena en $56/15$ horas.

Ejercicio 15 *Cuatro estudiantes deciden vivir solos en un departamento y repartir en partes iguales el arriendo mensual. Sin embargo, encuentran que si aumenta en dos el número de estudiantes, su cuota mensual se reduce en* \$ 5.000. *?'Cuál es el costo del arriendo?*

Solución: Sea x el costo del arriendo. Si hay cuatro estudiantes entonces la cuota mensual de cada uno es de $\frac{x}{4}$. Si aumentan en dos, entonces la cuota mensual será de $\frac{x}{6}$. Dadas las hipótesis del problema se tiene que

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{x}{4} - 5.000 & = & \frac{x}{6} \\ \Rightarrow & 3x - 12 \cdot 5.000 & = & 2x \\ \Rightarrow & x & = & 60.000 \end{array}$$

Luego el costo del arriendo es de \$ 60.000.

Para resolver problemas como los anteriores se requiere: reconocer los datos importantes (y despreciar información innecesaria); identificar la o las incógnitas e **introducir una o más variables para representarlas**; plantear y resolver las ecuaciones que relacionan los datos, teniendo en cuenta las restricciones necesarias involucradas en el problema. En algunos casos es necesario aplicar conceptos tales como porcentaje, razón y proporción, velocidad (= distancia/tiempo), etc.

Observación: Recordemos que;

1. p **es el** q **por ciento** (se escribe $q\%$) **de** x, si y sólo si;

$$p = \frac{q}{100} \cdot x$$

2. La **razón** de dos números $a : b$ (se lee a es a b) es el cuociente

$$\frac{a}{b}$$

   (La expresión $a : b$ desea destacar el aspecto de comparación entre a y b).

   Una **proporción** es una igualdad entre dos razones, por ejemplo;

$$2 : 3 = 6 : 9$$

   que se lee 2 **es a** 3 **como** 6 **es a** 9

3. Se dice que a es **directamente proporcional** a b si y sólo si existe una constante q tal que

$$a = qb$$

   Se dice que a es **inversamante proporcional** a b si existe una constante q tal que

$$a = q\frac{1}{b}$$

   En ambos casos q se llama factor de proporcionalidad y generalmente se tiene $q > 0$.

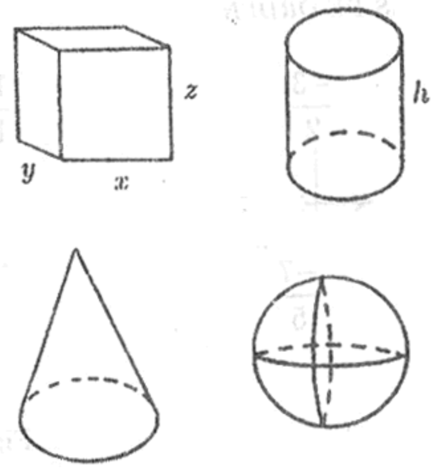
4. Daremos el volumen y área de algunos cuerpos geométricos que utilizaremos

Daremos el volumen y área de algunos cuerpos geométricos que utilizaremos

(a) Paralelepípedo de aristas x, y, z.
Volumen: $V = xyz$
Area: $A = 2xy + 2xz + 2yz$

(b) Cilindro de radio r y altura h.
Volumen: $V = \pi r^2 h$
Area: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

(c) Cono recto de radio basal r y altura h.
Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Area: $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



1. (a) Paralelepípedo de aristas x, y, z.
   Volumen: $V = xyz$
   Area: $A = 2xy + 2xz + 2yz$

   (b) Cilindro de radio r y altura h.
   Volumen: $V = \pi r^2 h$
   Area: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

   (c) Cono recto de radio basal r y altura h.
   Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
   Area: $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

   (d) Esfera de radio r.
   Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
   Area: $A = 4\pi r^2$

Ejercicio 16 *Si el radio del cilindro disminuye en un* 10% *mientras que su altura aumenta en un* 12% *en qué tanto porciento varían*
a) El volumen del cilindro
b) El areá lateral del cilindro

Solución: Sea r : radio inicial del cilindro, h : altura inicial del cilindro
a) Si el radio disminuye en un 10% entonces el nuevo radio r_n será

$$r_n = r - (0,1)r = 0,9r$$

Si la altura aumenta en un 12% entonces la nueva altura h_n será

$$h_n = h + 0,12h = 1,12h$$

luego el nuevo volumen será V_n

$$V_n = \pi {r_n}^2 h_n = \pi(0,9r)^2(1,12h) = 0,9072\pi r^2 h = \pi r^2 h - 0,0928\pi r^2 h$$

esto es, el volumen disminuye en $0,0928\pi r^2 h$ unidades; es decir, disminuye en $9,28\%$
b) El área del cilindro será

$$A_n = 2\pi r_n h_n = 2\pi(0,9r)(1,12h) = 1,008\cdot 2\pi r h = 2\pi r h + 0,008\cdot 2\pi r h$$

luego el área lateral aumenta en $0,8\%$.

Ejercicio 17 *En una prueba de matemáticas, el* 12% *de los estudiantes de una clase no resolvió un problema, el* 32% *lo resolvió con algunos errores y los* 14 *estudiantes restantes obtuvieron la solución correcta. ¿Cuántos estudiantes había en la clase?*

Solución: Sea x el número de estudiantes, entonces

$$\frac{12}{100}x \text{ no resolvieron el problema}$$

$$\frac{32}{100}x \text{ resolvieron con algunos errores el problema}$$

$$14: \text{ resolvieron el problema correctamente}$$

Luego tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{12}{100}x + \frac{32}{100}x + 14 = x$$

de donde

$$56x = 1400,$$

es decir,

$$x = \frac{1400}{56} = 25$$

luego había 25 estudiantes en la clase.

Ejercicio 18 *Una tienda de antigüedades compró dos muebles en* $\$$ 225.000 *y después los vendió y obtuvo un beneficio del* 40%. *¿Cuánto pagó por cada mueble si el primero dejó un beneficio del* 25% *y el segundo un beneficio del* 50%*?*

Solución: Sea x pesos (en miles) lo que le ha costado el primer mueble entonces el segundo lo compró en

$$(225 - x) \text{ mil pesos}$$

El primero dio un beneficio del 25%, luego se vendió en

$$(x + 0,25x) \text{ mil pesos},$$

es decir, $1,25x$ mil pesos.

El segundo dio un beneficio del 50%, luego se vendió en

$$1,50(225 - x) \text{ mil pesos}$$

Por hipótesis, la tienda compró los dos muebles en 225 mil pesos y obtuvo un beneficio total del 40%, luego los dos muebles se vendieron en

$$1,40 \cdot 225 = 315 \text{ mil pesos}.$$

Así, obtenemos la ecuación

$$1,25x + 1,50(225 - x) = 315$$

de donde

$$0,25x = 22,5$$

luego

$$x = 90$$

El primer mueble se vendió en $ 90.000 y el segundo en $ 135.000.

Observación: El tanto por ciento de beneficio se calcula en relación con el precio de costo (tomado como 100%).

Ejercicio 19 *Los diámetros de dos cilindros son entre sícomo* $3:4$ *y sus alturas como* $5:6$*. ?'Qué tanto por ciento del volumen del mayor de ellos es el volumen del menor?*

Solución: Sean d_1, d_2 los diámetros de los cilindros y h_1, h_2 sus respectivas alturas. Por hipótesis del problema tenemos las siguientes relaciones;

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{5}{6} \tag{1.12}$$

Además la fórmula del volumen de un cilindro es

$$V = \pi r^2 h$$

donde r es el radio del cilindro y h la altura; además

$$d = 2r$$

donde d es el diámetro del cilindro.

Con todo lo anterior tenemos que

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h$$

y para cada cilindro

$$V_1 = \tfrac{\pi}{4} d_1^2 h_1 \quad V_2 = \tfrac{\pi}{4} d_2^2 h_2$$

Pero de 1.12 tenemos

$$d_1 = \tfrac{3}{4} d_2 \quad \text{y} \quad h_1 = \tfrac{5}{6} h_2$$

luego

$$V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{9}{16} d_2^2 \frac{5}{6} h_2 = \frac{45}{96} \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2 h_2 = \frac{45}{96} V_2$$

así,

$$V_1 = \frac{45}{96} V_2$$

Luego V_1 es el $46,875\%$ de V_2.

Una propiedad que nos será muy útil en la resolución de ecuaciones es la siguiente.

Proposición 1.9 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \lor b = 0 \tag{1.13}$$

Demostración: $(\Rightarrow)$[7] Supongamos $a \neq 0$; entonces existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{rrcl} ab = 0 & \Rightarrow \quad a^{-1}ab & = & a^{-1}0 \\ & \Rightarrow \quad 1 \cdot b & = & 0 \\ & \Rightarrow \quad b & = & 0 \end{array}$$

$(\Leftarrow)$ Es claro que si $a = 0 \lor b = 0$ entonces $ab = 0$; luego

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \lor b = 0)$$

$\square$

Observemos que la propiedad anterior no es válida en cualquier conjunto con operaciones de suma y multiplicación. Por ejemplo, consideremos el conjunto de matrices

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

[7] Por equivalencia lógica esta implicancia en 1.13 se puede escribir $(p \Rightarrow q \lor s)$, que es equivalente $(p \land \sim q \Rightarrow s)$ y esto último es lo que usaremos en esta parte de la demostración.

bajo la operación de producto definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero $A \neq 0$ y $B \neq 0$. Lo que síse cumple es que

$$A = 0 \vee B = 0 \Rightarrow AB = 0$$

La propiedad 1.13 nos permite resolver algunas ecuaciones. Por ejemplo resolvamos en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación

$$(x+1)(x-1) = 0$$

Es claro que

$$(x+1)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1=0) \quad \vee \quad (x+1=0)$$

de donde el conjunto solución S es

$$S = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x-1) = 0\} = \{-1, 1\}$$

Análogamente se puede resolver el siguiente problema

Ejemplo 20 *La solución de la ecuación*

$$x^2 = 25$$

es $\{-5, 5\}$

Solución:
En efecto;

$$\begin{array}{rcrcl} x^2 = 25 & \Leftrightarrow & x^2 - 25 & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & (x-5)(x+5) & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & x - 5 = 0 & \vee & x + 5 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x = 5 & \vee & x = -5 \end{array}$$

Ejercicio 21 *Dos personas salen simultáneamente de dos ciudades A y B y van una en dirección de la otra. La primera persona camina 2 km/hr más de prisa que la segunda y llega a B una hora antes que la segunda llegue a A. Si A y B distan 24 km ¿Cuántos kilómetros recorre cada una de las personas en una hora? (Ayuda:* ***velocidad=distancia/tiempo****).*

Solución: Sea v km/hr la velocidad de la primera persona P_A, entonces la velocidad de la segunda persona P_B será de $(v-2)$ km/hr
La persona P_A tardará $t_1 = \frac{24}{v}$ horas y P_B tardará $t_2 = \frac{24}{v-2}$ horas
Como P_B llega una hora más tarde que P_A, entonces;

$$\begin{array}{rcrcl} t_2 = t_1 + 1 & \Rightarrow & \frac{24}{v-2} - \frac{24}{v} & = & 1 \\ & \Rightarrow & 24v - 24(v-2) & = & (v-2)v \\ & \Rightarrow & v^2 - 2v - 48 & = & 0 \\ & \Rightarrow & (v-8)(v+6) & = & 0 \\ & \Rightarrow & v = 8 & \vee & v = -6 \end{array}$$

Pero $v > 0$, así, $v = 8$ km/hr. Luego la distancia que recorre P_A en una hora es de

$$d_1 = v \cdot 1 = 8 \text{ km}$$

y P_B recorre

$$d_2 = (v-2) \cdot 1 = 6 \text{ km}$$

Ejercicio 22 *Un tren rápido fue obligado a detenerse* 16 *minutos en un disco rojo. Para recuperar este tiempo, viajó en un tramo de* 80 *kilómetros* 10*km/hr más rápido que lo normal. ?'Cuál es la velocidad normal del tren?*

Solución: Sea v km/hr la velocidad prevista por el tren (donde $v > 0$). La velocidad real fue de

$$(v+10) \text{ km/hr}$$

El tiempo previsto era de

$$t_1 = \frac{80}{v} \text{ hr}$$

pero realmente fue

$$t_2 = \frac{80}{v+10} \text{ hr}$$

Por hipótesis tenemos que

$$t_1 - t_2 = \frac{16}{60},$$

es decir,

$$\begin{array}{rl} & \frac{80}{v} - \frac{80}{v+10} = \frac{16}{60} \\ \Leftrightarrow & (v+10)80 - 80v = \frac{4}{15}v(v+10) \\ \Leftrightarrow & v^2 + 10v - 3.000 = 0 \\ \Leftrightarrow & (v-50)(v+60) = 0 \\ \Leftrightarrow & v = 50 \vee v = -60 \end{array}$$

pero $v > 0$ luego

$$v = 50$$

y la velocidad normal del tren fue de 50 km/hr.

En los ejemplos anteriores hemos resuelto ecuaciones en una variable. Con frecuencia, es necesario resolver dos o más ecuaciones simultáneamente en dos o más variables, es decir, sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 23 *Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\left. \begin{array}{rcr} x - 3y & = & -2 \\ 5x + y & = & 2 \end{array} \right|$$

Solución: Multiplicando por 3 la segunda ecuación y sumándosela a la primera se obtiene la ecuación

$$16x = 4$$

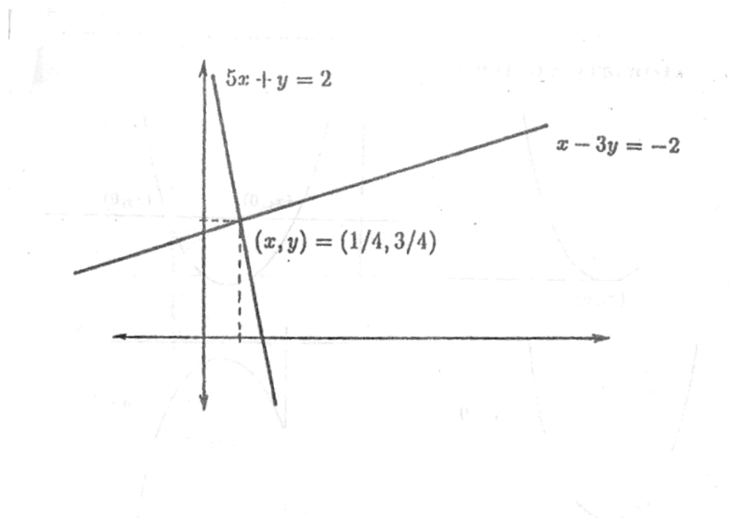
de donde $x = \frac{1}{4}$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene $y = \frac{3}{4}$.

Luego la solución del sistema es

$$x = \tfrac{1}{4}, \quad y = \tfrac{3}{4}$$

o el punto $(x, y) = (1/4, 3/4)$

La interpretación geométrica de esta solución es el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $x - 3y = -2$ y $5x + y = 2$ como se muestra en la siguiente figura



Ejercicio 24 *Un cierto número de estudiantes deben acomodarse en una residencial. Si se ubicaran dos estudiantes por habitación entonces quedarían 2 estudiantes sin pieza. Si se ubicaran 3 estudiantes por habitación entonces sobrarían 2 piezas. ¿ Cuántas habitaciones disponibles hay en la residencial y cuántos estudiantes deben acomodarse en ella?*

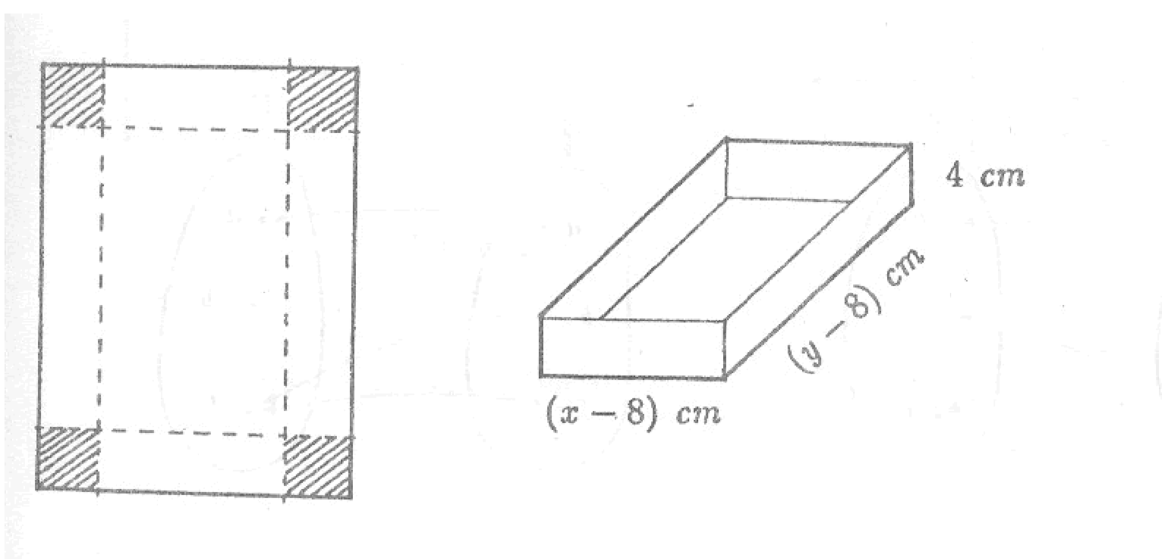
Solución: Sean x : número de estudiantes y : número de habitaciones, entonces podemos representar el problema mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 2 \\ x - 3(y-2) & = & 0 \end{array}\right|$$

despejando x de la primera ecuación y reemplázandole en la segunda,

$$y = 8 \qquad x = 18$$

Por lo tanto hay 8 habitaciones y 18 estudiantes.



Ejercicio 25 *Una chapa rectangular de estaño de perímetro 96 cm se usa para hacer una caja sin tapa. Para ello se recorta un cuadrado de 4 cm de lado en cada esquina y se unen los bordes, (ver figura anterior). ¿Cuáles son las dimensiones de la chapa si el volumen de la caja es de 768? cm*^{3}.

Solución: Sean $x =$: longitud de la chapa en centímetros $y =$: ancho de la chapa en centímetros, entonces la caja tiene las dimensiones siguientes (ver figura verfigura anterior):

$$\begin{array}{rcl} \text{longitud} & : & (x-8) \text{ cm} \\ \text{ancho} & : & (y-8) \text{ cm} \\ \text{altura} & : & 4 \text{ cm} \end{array}$$

Por hipótesis, volumen y perímetro son;

$$\left.\begin{array}{rcl} 4(x-8)(y-8) & = & 768 \\ 2x+2y & = & 96 \end{array}\right|$$

lo que equivale a

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-8)(y-8) & = & 192 \\ x+y & = & 48 \end{array}\right|$$

Despejando y en la segunda ecuación y reemplazando en la primera obtenemos

$$x^2 - 48x + 512 = 0$$

es decir

$$(x-32)(x-16) = 0$$

de donde

$$x = 32 \quad \vee \quad x = 16$$

note que si $x = 32$, entonces $y = 16$ y si $x = 16$, entonces $y = 32$.

Como x es la longitud; las dimensiones de la chapa son 32 cm $\times$ 16 cm.

Ejercicio 26 *Un obrero hace un cierto número de piezas idénticas en un tiempo determinado. Si hubiera hecho 10 piezas más cada día, habría terminado el trabajo completo en* $4\frac{1}{2}$ *días antes de lo previsto, y si hubiese hecho 5 piezas menos cada día habría tardado 3 días más de lo previsto. ¿Cuántas piezas hizo y en cuánto tiempo?*

Solución: Supongamos que el obrero hace x piezas en y días. Entonces produce $\frac{x}{y}$ piezas por día, por hipótesis, si hubiera realizado $\frac{x}{y} + 10$ piezas , habría completado el trabajo en $y - 4\frac{1}{2}$ días. Luego como $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ tenemos

$$\left(\frac{x}{y} + 10\right)\left(y - \frac{9}{2}\right) = x$$

La otra condición de la ecuación es

$$\left(\frac{x}{y} - 5\right)(y+3) = x.$$

Así, obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 10y - \frac{9}{2}\frac{x}{y} & = & 45 \\ -5y + 3\frac{x}{y} & = & 15 \end{array}\right|$$

de donde

$$\frac{x}{y} = 50$$

luego, $y = 27$ $x = 1.350$.

Ejercicio 27 *Dos obreros tienen que hacer un trabajo consistente en mecanizar un lote de piezas idénticas. Después que el primero ha trabajado durante* 7 *horas y el segundo durante* 4 *horas, han completado* $\frac{5}{9}$ *del total del trabajo. Si siguieran trabajando los dos a la vez durante 4 horas más, les quedaría por hacer* $\frac{1}{18}$ *del trabajo. ¿ Cuánto tardaría cada uno en hacer el trabajo completo?*

Solución: Supongamos que el primer operario, trabajando solo, es capaz de completar el trabajo en x horas, y el segundo en y horas. Entonces en una hora el primero hace $\frac{1}{x}$ del trabajo completo y el segundo $\frac{1}{y}$. Por hipótesis

$$7\frac{1}{x}+4\frac{1}{y}=\frac{5}{9}$$

Como después trabajan juntos otras 4 horas, harán $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}$ del trabajo, que es igual a

$$1-\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{18}\right)=\frac{7}{18}$$

por lo tanto tenemos la ecuación

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{18}$$

Restándola de la primera, obtenemos

$$\frac{3}{x}=\frac{3}{18}$$

de donde $x=18$. Entonces

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{24} \text{ e } y=24$$

Luego el primero tarda 18 horas y el segundo 24 horas en hacer el trabajo completo.

Ejercicio 28 *Se ha de transportar 690 toneladas de mercancías desde un muelle a una estación de ferrocarril mediante 5 camiones de 3 toneladas y 10 camiones de una tonelada y media. En pocas horas, los camiones han transportado 25/46 de las mercancías. Para completar el transporte a tiempo, se ha de llevar las mercancías restantes en un lapso 2 horas menor que el ya transcurrido. Se completó el transporte gracias a que los conductores de los camiones comenzaron a hacer un viaje por hora más que antes. Determine cuántas horas tardaron en transportar todas las mercancías y también el número de viajes por hora que se hacía al principio sabiendo que los camiones de una y media tonelada hacen un viaje más por hora que los camiones de 3 toneladas* [8]*.*

Solución: Supongamos que la primera parte de las mercancías, que asciende a

$$\frac{25}{46}690=375 \text{ toneladas}$$

se transporta en x horas haciendo cada camión de 3 toneladas y viajes por hora. Entonces cada camión de una y media tonelada hará $y+1$ viajes por hora. Por hipótesis, la parte restante de mercancías (es decir, 690-375=315 toneladas) se transportó en $x-2$ horas, haciendo los camiones de 3 toneladas $y+1$ viajes por hora y los camiones de una y media toneladas $(y+1)+1=y+2$ viajes por hora. Obtenemos asíel siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 5\cdot 3xy+10\cdot\frac{3}{2}x(y+1) &=& 375\\ 5\cdot 3(x-2)(y+1)+10\cdot\frac{3}{2}(x-2)(y+2) &=& 315 \end{array}\right|$$

Simplificando tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} 2xy+x &=& 25\\ 2xy+3x-4y &=& 27 \end{array}\right|$$

[8] Se debe suponer que todos los camiones iban completamente cargados en cada viaje.

de donde

$$2x - 4y = 2$$

luego $2y = x - 1$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $x^2 = 25$, es decir[9] , $x = 5$. La primera parte de las mercancías se transportó en 5 horas y la segunda parte en $5 - 2 = 3$ horas.

Nota:

Todas las mercancías se transportaron en 8 horas; al principio, los camiones de tres toneladas hacían 2 viajes por hora y los de una y media toneladas, 3 viajes por hora.

Ejercicio 29 *Una industria tiene un encargo de* 810 *artículos y otra de* 900 *artículos en el mismo periodo de tiempo. La primera ha completado el pedido 3 días antes del plazo previsto y la segundos 6 días antes.*

?'Cuántas artículos produce al día cada industria, sabiendo que la segunda produce por día 4 artículos más que la primera?

Solución: Sea x la producción de artículos diaria de la primera industria, entonces la segunda produce $x+4$ articulos por día. La primera ha completado su pedido en $\frac{810}{x}$ días, luego el tiempo dado para cumplir el pedido ha sido $\frac{810}{x} + 3$ días. Análogamente tenemos que $\frac{900}{x+4} + 6$ es el tiempo asignado a la segunda industria, pero el tiempo asignado a ambas las industrias es el mismo, luego

$$\frac{810}{x} + 3 = \frac{900}{x+4} + 6$$

de donde $x = 20$. Es decir, la primera industria produce 20 articulos y la segunda 24 articulos por día.

Ejercicio 30 *Hallar un número de dos cifras sabiendo que el número de unidades excede en cuatro al número de la decenas y que el producto del número deseado por la suma de sus digitos es igual a 576.*

Observación: Si un número a tiene n digitos $a_0, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$, ordenados de izquierda a derecha entonces

$$a = a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

Solución: Sea x el digito de la unidades, y el digito de la decenas entonces por hipótesis se tiene la ecuación

$$x = y + 4 \tag{1.14}$$

además el número deseado es $10y + x$ luego

$$(10y + x)(x + y) = 576 \tag{1.15}$$

Por 1.14 y 1.15

$$\begin{aligned} (11y + 4)(2y + 4) = \quad & 576 \\ \Longleftrightarrow \qquad & 11(y - 4)(y + \frac{70}{11}) = 0 \\ \Longleftrightarrow \qquad & y = 4 \vee y = -\frac{70}{11} \end{aligned}$$

pero $y > 0$, luego $y = 4$. Por lo tanto el número buscado es 48.

1.3 Axiomas de Orden

A continuación daremos un conjunto de axiomas que forma parte de la caracterización de los números reales. Estos axiomas nos permiten ordenar los números reales (y aún poder graficar este orden en una recta).

Admitimos la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ que denotamos por $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos se llaman **números reales positivos** y que se caracterizan por los axiomas:

[9] De $x^2 = 25$ se obtiene $x = 5$ o $x = -5$ pero x indica horas luego x debe ser positivo.