Inecuaciones en una variable 2.6.4

Una **inecuación** en la variable x es una desigualdad entre dos expresiones que contienen dicha variable. Por ejemplo:

$$\sqrt{x^2+1} > 2, \quad |x+5| + |x+2| \geq 1, \quad x^2 - 3 < \frac{1}{2}.$$

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es **solución** de una inecuación si al reemplazar x por a en la inecuación, resulta una desigualdad verdadera.

Así, por ejemplo, 3 es solución de $\sqrt{x^2+1} > 2$ porque $\sqrt{3^2+1} > 2$.

Resolver una inecuación es encontrar todas sus soluciones reales. El conjunto de todas las soluciones de una inecuación se llama **conjunto solución de la inecuación**. Al igual que en el caso de las ecuaciones, se considera resuelta una inecuación cuando este conjunto se expresa por extensión o como unión de intervalos disjuntos.

Ejemplo 2.8

Resolver la inecuación

$$|2-x| + |x-7| \leq 10.$$

Solución

Considerando los mismos casos que en el Ejemplo 2.7, tenemos:

(a) Si $x \geq 7$*, entonces,* $|x-2| + |x-7| \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad x-2+x-7 \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad 2x \leq 19 \quad \leftrightarrow \quad x \leq 19/2.$

(b) Si $2 \leq x < 7$*, entonces,*

$$|x-2| + |x-7| \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad x-2-x+7 \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad 5 \leq 10.$$

(c) Si $x < 2$*, entonces,*

$$|x-2| + |x-7| = 5 \quad \leftrightarrow \quad -x+2-x+7 \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad -2x \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad x \geq -1/2.$$

Tenemos entonces que x *es solución de la inecuación si y sólo si*

$$\begin{gathered}((x \geq 7 \wedge x \leq 19/2) \vee (2 \leq x < 7 \wedge 5 \leq 10) \vee (x < 2 \wedge x \geq -1/2)) \quad \leftrightarrow \\ (7 \leq x \leq 19/2) \vee (2 \leq x < 7) \vee (-1/2 \leq x < 2) \quad \leftrightarrow \\ -1/2 \leq x \leq 19/2.\end{gathered}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación planteada es el intervalo [-1/2,19/2].

Inecuación de primer grado 2.6.5

Una inecuación de la forma $ax + b > 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, (o reemplazando $>$ por $\geq$, $<$ o $\leq$), se llama **inecuación lineal o de primer grado**.

Como $a \neq 0$,se tiene que $ax+b > 0 \;\leftrightarrow\; x > -b/a$ y por lo tanto el conjunto solución de ésta inecuación es $]-b/a, \infty[$. Al reemplazar $>$ por $\geq$, $<$ o $\leq$, se obtienen las soluciones: $[-b/a, \infty[$, $]-\infty, -b/a[$ y $]-\infty, -b/a]$ respectivamente.

Inecuación de segundo grado 2.6.6

Una inecuación de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, (o reemplazando $>$ por $\geq$, $<$ o $\leq$), se llama **inecuación de segundo grado** y el siguiente teorema resume las posibles soluciones para ella.

Teorema

Teorema 2.6 *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\triangle = b^2 - 4ac$ *y* $a \neq 0$.

(I) *Si* $\triangle \geq 0$ *y* x_1, x_2 *son las soluciones de la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$ *y* $x_1 \leq x_2$ *entonces:*

a) *Si* $a > 0$, $\quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \leftrightarrow \quad (x > x_2 \vee x < x_1)$.

b) *Si* $a < 0$, $\quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$.

(II) *Si* $\triangle < 0$, *entonces:*

a) *Si* $a > 0$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}(ax^2 + bx + x > 0)$.

b) *Si* $a < 0$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}(ax^2 + bx + c < 0)$.

Demostración

(i) a) como $\triangle \geq 0$, *por Teorema 2.5* (I), *tenemos que:*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

luego

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c>0 &\leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)>0 \\ &\leftrightarrow ((x-x_1)>0 \wedge (x-x_2)>0) \vee ((x-x_1)<0 \wedge (x-x_2)<0) \\ &\leftrightarrow (x>x_1 \wedge x>x_2) \vee (x<x_1 \wedge x<x_2) \\ &\leftrightarrow (x>x_2) \vee (x<x_1). \end{aligned}$$

En forma análoga se demuestra (i) b).

(ii) Por Teorema 2.5 (II) tenemos que para $\Delta < 0$*:*
si $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\,(ax^2+bx+c>0)$
y si $a < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\,(ax^2+bx+c<0)$.

■

Problemas Resueltos 2.7

Problema 2.1

Demostrar que si x e y son reales positivos, entonces $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$.

Solución

Tenemos que

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \;\leftrightarrow\; \frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2 \;\leftrightarrow\; x^2+y^2\geq 2xy$$
$$\leftrightarrow\; x^2+y^2-2xy\geq 0 \;\leftrightarrow\; (x-y)^2\geq 0.$$

y esta última propiedad es verdadera por Teorema 2.3 (X).

Problema 2.2

Demostrar que si x es real positivo, entonces

$$x^3+\frac{1}{x^3}\geq x+\frac{1}{x}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
(x^3+\frac{1}{x^3})-(x+\frac{1}{x}) &= (x^3-x)+(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x})\\
&= x(x^2-1)+\frac{(1-x^2)}{x^3}\\
&= (x^2-1)\Big(x-\frac{1}{x^3}\Big)\\
&= \frac{x^2-1}{x^3}(x^4-1)\\
&= \frac{(x^2-1)^2(x^2+1)}{x^3}.
\end{aligned}$$

Dado que, $(x^2-1)^2 \geq 0$ *por teorema [2.3.3 (x)] y*

$x^2+1>0$ *porque* $x^2>0$*, y*

$x^3>0$ *porque* $x>0$*,*

entonces:

$\frac{(x^2-1)^2(x^2+1)}{x^3} \geq 0$*, luego* $(x^3+\frac{1}{x^3})-(x+\frac{1}{x}) \geq 0$*, de donde*

$$x^3+\frac{1}{x^3} \geq x+\frac{1}{x}.$$

Problema 2.3

Resolver la inecuación: $(x^2+3x-4)(2x^2+4)>0$.

Solución

La ecuación $2x^2+4=0$ *no tiene soluciones reales y* $2>0$ *luego* $\forall x \in \mathbb{R}\,(2x^2+4>0)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
(x^2+3x-4)(2x^2+4)>0 &\leftrightarrow (x^2+3x-4)>0\\
&\leftrightarrow (x+4)(x-1)>0\\
&\leftrightarrow (x>1 \vee x<-4).
\end{aligned}$$

Luego la solución de la inecuación dada es $]-\infty,-4[\ \cup\ ]1,\infty[$.

Problema 2.4

Resolver la inecuación:

$$\frac{x^4 - 56x + 95}{x^2 - 7x + 10} > 8.$$

Solución

En primer lugar notemos que esta expresión está definida para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 7x + 10 \neq 0$ y cualquier solución deberá cumplir este requisito.

$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \leftrightarrow \quad (x = 2 \vee x = 5)$ *; es decir, cualquier solución x deberá ser tal que $x \neq 2 \wedge x \neq 5$.*

Además,

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 56x + 95}{x^2 - 7x + 10} > 8 \quad &\leftrightarrow \quad \frac{x^4 - 56x + 95}{x^2 - 7x + 10} - 8 > 0 \\ &\leftrightarrow \quad \frac{x^4 - 8x^2 + 15}{x^2 - 7x + 10} > 0 \\ &\leftrightarrow \quad \frac{(x^2 - 3)(x^2 - 5)}{(x - 2)(x - 5)} > 0 \\ &\leftrightarrow \quad \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{(x - 2)(x - 5)} > 0. \end{aligned}$$

Como el signo de esta expresión depende del signo de cada uno de los factores, entonces estudiaremos los signos de éstos ordenándolos de menor a mayor:

$$x - 5, \quad x - \sqrt{5}, \quad x - 2, \quad x - \sqrt{3}, \quad x + \sqrt{3}, \quad x + \sqrt{5}.$$

Si $x > 5$, entonces todos los factores son positivos y por lo tanto la expresión es positiva. Luego x es solución en este caso.

Si $\sqrt{5} < x < 5$, el primer factor es negativo y el resto positivo , por lo tanto la expresión es negativa. Luego x no es solución en este caso.

Análogamente se obtiene que:

si $2 < x < \sqrt{5}$, $\quad x$ es solución,

si $\sqrt{3} < x < 2$, $\quad x$ no es solución,

si $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $\quad x$ es solución,

si $-\sqrt{5} < x < -\sqrt{3}$, $\quad x$ no es solución y

si $x < -\sqrt{5}$, $\quad x$ es solución.

Además, si $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$ *la expresión es cero y entonces* x *no es solución.*

Luego el conjunto solución de la inecuación es

$$]-\infty, \ -\sqrt{5}[\ \cup \ ]-\sqrt{3}, \ \sqrt{3}[\ \cup \ ]2, \ \sqrt{5}[\ \cup \ ]5, \infty[.$$

Podemos resumir el argumento anterior en la siguiente figura:

	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$\sqrt{5}$		5	∞
$x-5$	-		-		-		-		-		-	0	+
$x-\sqrt{5}$	-		-		-		-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-		-	0	+		+		+
$x-\sqrt{3}$	-		-		-	0	+		+		+		+
$x+\sqrt{3}$	-		-	0	+		+		+		+		+
$x+\sqrt{5}$	-	0	+		+		+		+		+		+
E	+	0	-	0	+	0	-	$*$	+	0	-	$*$	+

Figura 2.17: Conjunto solución del problema 2.4.

donde $E = \dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{(x-2)(x-5)}$ *y (*) denota que la expresión no está definida.*

El conjunto solución es la unión de todos aquellos intervalos donde E *es positivo, es decir es*

$$]-\infty, \ -\sqrt{5}[\ \cup \ ]-\sqrt{3}, \ \sqrt{3}[\ \cup \ ]2, \ \sqrt{5}[\ \cup \ ]5, \infty[.$$

Problema 2.5

¿Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 + 2x + r > 10)?$$

Solución

$x^2 + 2x + r > 10 \quad \leftrightarrow \quad x^2 + 2x + (r-10) > 0.$

*Por Teorema 2.6 (*II*) (*IIa*), esto se cumple si* $\triangle < 0$ *y* $a > 0$*. En nuestro caso,* $\triangle = 4 - 4(r-10) < 0$ *y* $a = 1 > 0$*, luego, la condición pedida es:*

$$\begin{array}{rrcl} & 4-4(r-10) & < & 0 \\ \leftrightarrow & 4-4r+40 & < & 0 \\ \leftrightarrow & -4r & < & -44 \\ \leftrightarrow & r & > & 11. \end{array}$$

Entonces, para $r > 11$ *se tiene que* $\forall x \in \mathbb{R}\,(x^2+2x+r>0)$.

Problema 2.6

Resolver la inecuación

$$\frac{|x+2|}{|x+3|} \leq \sqrt{2}.$$

Solución

Como ambas expresiones son positivas, elevando al cuadrado obtenemos la siguiente inecuación equivalente a la anterior:

$$\frac{(x+2)^2}{(x+3)^2} \leq 2.$$

Desarrollando, obtenemos

$$\begin{array}{rccc} & (x+2)^2 & \leq & 2(x+3)^2 \\ \leftrightarrow & x^2+4x+4 & \leq & 2(x^2+6x+9) \\ \leftrightarrow & x^2+4x+4 & \leq & 2x^2+12x+18 \\ \leftrightarrow & x^2+8x+14 & \geq & 0 \\ \leftrightarrow & (x \geq -4+\sqrt{2} & \vee & x \leq -4-\sqrt{2}). \end{array}$$

Por lo tanto el conjunto solución es $]-\infty,-4-\sqrt{2}]\cup[-4+\sqrt{2},\infty[$.

Problema 2.7

Resolver la inecuación

$$2x-1 > \sqrt{x^2-3x}.$$

Solución

Notemos en primer lugar que esta expresión está definida si $x^2 - 3x \geq 0$ *y como* $x^2 - 3x \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x(x-3) \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad (x \geq 3 \vee x \leq 0)$, *entonces cualquier solución deberá cumplir la condición:* $(x \geq 3 \vee x \leq 0)$.

Además $\quad 2x - 1 > 0 \quad \leftrightarrow \quad x > \dfrac{1}{2}$.

Si $x > \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{array}{rrcl} & 2x-1 & > & \sqrt{x^2-3x} \\ \leftrightarrow & (2x-1)^2 & > & x^2-3x \\ \leftrightarrow & 4x^2-4x+1 & > & x^2-3x \\ \leftrightarrow & 3x^2-x+1 & > & 0 \end{array}$$

y como $\triangle = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11 < 0$ *y* $3 > 0$, *tenemos que* $\forall x \in \mathbb{R}(3x^2 - x + 1 > 0)$.
Luego la solución para este caso es

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2} \wedge (x \geq 3 \vee x \leq 0)\} =]3, \infty[.$$

Si $x \leq \dfrac{1}{2}$, *entonces* $2x - 1 \leq 0$ *y por lo tanto* $2x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 3x}$
es decir, x no es solución.
La solución de la inecuación será entonces S_1.

Problema 2.8

Probar que si $a > 0$, entonces $ax^2 + bx + c \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, y que la igualdad se cumple cuando $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Solución

Como $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right]$ *entonces si* $a > 0$, $ax^2+bx+c \geq a\left(-\dfrac{\triangle}{4a^2}\right) = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$

y para $x = -\dfrac{b}{2a}$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ *de donde*

$$ax^2+bx+c = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Análogamente se puede demostrar que si $a < 0$, *entonces* $ax^2+bx+c \leq \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ *y que la igualdad se cumple cuando* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Problema 2.9

Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área cuyo perímetro es 8.

Solución

Sean x *e* y *las dimensiones del rectángulo,entonces* $x+y = \dfrac{8}{2} = 4$ *de donde* $y = 4 - x$.

El área del rectángulo está dada por

$$x(4-x) = -x^2+4x = -(x^2-4x+4-4) = -((x-2)^2-4)$$

y este trinomio toma su mayor valor 4 cuando $x = 2$; *es decir, cuando* $(x = 2 \wedge y = 2)$.

Ejercicios Propuestos 2.8

1. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales usando los axiomas de campo y las propiedades ya demostradas:

   a) $x + z = y + z \to x = y$.
   b) $(x \cdot z = y \cdot z \wedge z \neq 0) \to x = y$.
   c) $x \cdot y = 0 \to (x = 0 \vee y = 0)$.
   d) $\forall y \in \mathbb{R}(x + y = y) \to x = 0$.
   e) $\forall y \in \mathbb{R}(x \cdot y = y) \to x = 1$.
   f) $(x + y = 0 \wedge x + z = 0) \to y = z$.
   g) $(x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \to y = z$.
   h) $x \cdot 0 = 0$.

2. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales usando los axiomas, propiedades demostradas y definiciones:

   a) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.
   b) $-(-x) = x$.
   c) $-(x - y) = (-x) + y$.
   d) $(-1)x = -x$.
   e) $x^2 = 0 \to x = 0$.
   f) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.
   g) $(-x)(-y) = xy$.
   h) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
   i) $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.
   j) $x^2 = y^2 \to (x = y \vee x = -y)$.

3. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales usando las propiedades de campo, los axiomas de orden y las definiciones.

   a) $\neg(x < x)$.
   b) $\neg(x < y) \quad \leftrightarrow \quad x \geq y$.
   c) $x > 0 \quad \leftrightarrow \quad (-x) < 0$.
   d) $(x > 0 \wedge y > 0) \to x + y > 0$.
   e) $(x < y \wedge z < u) \to x + z < y + u$.
   f) $x > y \quad \leftrightarrow \quad x - y > 0$.
   g) $(x > 0 \wedge y > 0) \to x \cdot > 0$.
   h) $1 > 0$.
   i) $x > 0 \to \dfrac{1}{x} > 0$.
   j) $x^2 \geq 0$.
   k) $(x < y \wedge z < 0) \to (xz > yz)$.
   l) $(x > 0 \wedge x < y) \to \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
   ll) $x < y \to < \dfrac{x + y}{2} < y$.
   m) $x - 1 < x < x + 1$.
   n) $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
   o) $(x > 0 \wedge y > 0) \to x + y \geq 2\sqrt{xy}$.
   p) $(x > y > 0 \wedge u > z > 0) \to xu > yz$.
   q) $(x > 0 \wedge y > 0) \to$
   $(x < y \quad \leftrightarrow \quad x^2 < y^2)$.
   r) $x > 0 \to x + y > y$.
   s) $x < 0 \to x + y < y$.
   t) $x > 1 \to (x^2 > x)$.
   u) $0 < x < 1 \to (x^2 < x)$.
   v) $x < 0 \to (x^2 > 0 > x)$.
   w) $(x < y < z < u) \to (x < u)$.
   x) $(x \leq y \leq x) \to x = y$.

4. Demuestre las siguientes propiedades del valor absoluto de números reales, usando las propiedades de campo ordenado y las definiciones:

   a) $|x| \geq 0$.
   b) $|x| \geq x$.
   c) $|x| = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0$.

d) $y > 0 \rightarrow (|x| = y \leftrightarrow (x = y \vee x = -y))$.

e) $y > 0 \rightarrow (|x| < y \leftrightarrow (-y < x < y))$.

f) $y > 0 \rightarrow (|x| > y \leftrightarrow (x > y \vee x < -y))$.

g) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

h) $y \neq 0 \rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

i) $|-x| = |x|$.

j) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

k) $xy > 0 \rightarrow |x + y| = |x| + |y|$.

l) $|x| - |y| \geq |x - y|$.

m) $|x| = |y| \leftrightarrow (x = y \vee x = -y)$.

n) $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

5. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales positivos:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) $(a < b \wedge c > d) \rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

c) $(a > 1 \wedge b > 1) \rightarrow ab + 1 > a + b$.

d) $(a > 1 \wedge b > 1) \rightarrow 2(ab+1) > (a+1)(b+1)$.

e) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

f) $a^3b + ab^3 \leq a^4 + b^4$.

g) $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(h) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

6. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales positivos:

a) $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$.

b) $(a^2 + b^2 + c^2) \geq (bc + ca + ab)$.

c) $(b + c)(c + a)(a + b) \geq 8abc$.

7. Efectúe las siguientes operaciones de conjuntos de números reales y grafique el resultado.

a) $(\mathbb{R} - \{2\}) - \{3\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} : x > 3 \vee x < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 7\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge x \neq 2\} \cup \{1\}$.

d) $\left(\{1\} \cup]0, 1[\right) \cap \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

e) $\left([-1, 5] \cap \mathbb{R}^+\right) - \left(]-2, 1[\cap \mathbb{R}^+\right)$.

f) $[-1, 5[\cup [-2, 3[\cup [-3, 2[$.

g) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 1 \wedge x \geq 3)\} \cup \{x \in \mathbb{R} : (x < 0 \wedge x \geq -5) \vee (x \leq -1)\}$.

8. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$.

a) $|x^2 - 5x + 1| = 2$.

b) $|x^2 + 1| = |2x|$.

c) $|x + 2| + |5 - x| = 0$.

d) $|x - 2| = -(x^2 + 1)$.

9. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$.

a) $x - |x| > 2$.

b) $|x + 3| \geq 2$.

c) $|x - 4| > x - 2$.

d) $|x + 2| > |3 - x|$.

e) $|x - 7| < 5 < |5x - 25|$.

10. Resuelva las siguientes inecuaciones cuadráticas en $\mathbb{R}$

(a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

(b) $x^2 + \frac{3}{4}x > 0$

(c) $2x^2 - 8x + 15 \leq 0$

(d) $x^2 - 4x < 0$

(e) $x^2 - \frac{1}{4} \leq 0$

(f) $x^2 + 4 < 0$

11. Resuelva los siguientes problemas:

(a) Encuentre las dimensiones que puede tener una cancha, si no debe pasar de 88 metros de superficie y su largo debe ser tres metros más que su ancho.

(b) Encuentre el valor que pueden tener dos múltiplos consecutivos de siete, si su producto debe ser mayor que 294.

c) Una editorial publica un total de no más de 100 títulos cada año. Por lo menos 20 de ellos no son de ficción, pero la casa editorial siempre publica por lo menos tanta ficción como no ficción. Encuentre un sistema de desigualdades que represente las cantidades posibles de libros de ficción y de no ficción que la editorial puede producir cada año de acuerdo con estas políticas. Grafique el conjunto solución.

d) Un hombre y su hija fabrican mesas y sillas sin acabado. Cada mesa requiere de 3 horas de aserrado y 1 hora de ensamble. Cada silla requiere de 2 horas de aserrado y 2 horas de ensamble. Entre los dos pueden trabajar aserrando hasta 12 horas y ensamblando 8 horas todos los días. Formule un sistema de desigualdades que describa todas las combinaciones posibles de mesas y sillas que pueden fabricar cada día. Grafique el conjunto solución.

e) Un fabricante de alimento para gatos utiliza subproductos de pescado y carne de res. El pescado contiene 12 gramos de proteína y 3 gramos de grasa por cada 30 gramos.La carne de res contiene 6 gramos de proteína y 9 gramos de grasa por cada 30 gramos. Cada lata de alimento para gato debe contener por lo menos 60 gramos de proteína y 45 gramos de grasa. Plantee un sistema de desigualdades que describa el número posible de gramos de pescado y carne de res que se pueden usar en cada lata para cumplir con estas condiciones mínimas. Grafique el conjunto solución.

12. Encuentre los valores de $r \in \mathbb{R}$ tales que
$$\forall x \in \mathbb{R}(rx^2 - r(r-1)x + 2r < 0).$$

13. ¿Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$, la ecuación $(1-r)x^2 + x + (1-r) = 0$ tiene sus soluciones reales e iguales?.

14. ¿Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$ se tiene que:
$$\forall x \in \mathbb{R}((r-1)x^2 + 2(r-3)x + r > 3)?$$

15. Determine los valores de $r \in \mathbb{R}$ de modo que el número 3 esté, entre las raíces de la ecuación
$$4x^2 - (r+1)x + 2 - r = 0$$

16. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 6} < 3.$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 3} < 0.$

c) $\dfrac{x^2 - 6x + 7}{x - 2} < 0.$

d) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} > \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}.$

e) $x(x^4 - 7x^2 + 12) > 0.$

f) $1 + \dfrac{6}{x^2 + 3x + 2} > \dfrac{6}{x + 2}.$

g) $\dfrac{2x - 25}{x^2 + 2x - 3} + \dfrac{2x + 11}{x^2 - 1} > \dfrac{2}{x + 3}.$

h) $\dfrac{x^4 - 49x + 96}{x^2 - 7x + 12} > 7$.

i) $|x^2 - x| + x > 1$.

j) $\left|\dfrac{x+2}{3-x}\right| < 1$.

k) $\left|\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4}\right| < 1$.

l) $\left|\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x + 6}\right| > \dfrac{1}{5}$.

ll) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$.

m) $|3x + 2| \leq |x + 1| + |2x + 1|$.

n) $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

o) $8x - 3 < \sqrt{(x-6)(x-9)}$.

p) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} < 3$.

q) $\sqrt{x^2 + 51} - \sqrt{(x-5)(x-7)} > 4$.

r) $\sqrt{(x-2)} - \sqrt{(x-6)} < 8$.

17. Determine cuál de las siguientes expresiones es mayor:

$$(x^3 + 1) \text{ o } (x^2 + x)\,.$$

18. De todos los triángulos de perímetro constante $2s$, determine el de mayor área.

19. De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa c, determine el de área máxima.

20. Determine los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ del trimonio $ax^2 + bx + c$ para que él se anule en $x = 8$ y tenga un máximo igual a 12 en $x = 6$.

Autoevaluación 2

1. A partir de los axiomas de cuerpo y de orden de los números reales, demuestre:

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}(x < y \leftrightarrow x^3 < y^3)$$

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestre que:

$$\sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

3. Resuelva:

$$4x + 1 < \sqrt{(1 - 2x)(x + 4)}$$

4. Resuelva:

$$\left|\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x + 6}\right| > \frac{1}{5}$$

5. Resuelva:

$$\sqrt{|x - 2| + x^2 - 1} \geq |2x - 1| - 3$$

6. ¿Qué valores debe tomar k para que la(s) solución(es) de la ecuación

$$kx^2 - 2x + k = 0$$

   sea(n) número(s) real(es)?

7. Determine el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que la ecuación $x^2 - 4x - m$ tenga una raíz que sea el triple de la otra.