2 Los Números Reales

Sistemas Numéricos 2.1

A través de la historia de la Matemática los números han sido introducidos como un **instrumento** para contar o más precisamente para medir.

El sistema numérico más simple es el de los números naturales: uno, dos, tres, cuatro, ..., etc; el cual sirve para contar objetos. En el conjunto de los números naturales se puede sumar y multiplicar; pero no se puede restar. Para poder introducir la operación de resta, es necesario agregar el cero y los negativos de los naturales obteniéndose así el conjunto de los números enteros, donde se puede sumar, multiplicar y restar; pero no se puede dividir. Para poder dividir se agregan las fracciones de números enteros, que constituyen el conjunto de los números racionales donde se pueden efectuar las cuatro operaciones.

Los racionales sirven para contar objetos y partes de objetos, considerando cantidades tanto positivas como negativas. Desde un punto de vista geométrico, estos también se pueden asociar a los puntos de una recta de la siguiente manera:

Consideremos una recta y un punto O en ella que llamaremos origen.

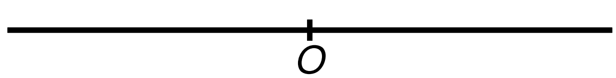

Figura 2.1: Recta con origen O.

Elijamos una de las semirectas determinadas por O y llamémosla **semirecta positiva** hacia la derecha y **semirecta negativa** hacia la izquierda.

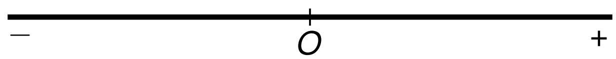

Figura 2.2: Semirecta positiva y semirecta negativa.

Y elijamos un trazo que llamaremos **trazo unitario**:

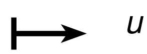

Figura 2.3: Trazo unitario.

Asociamos a cada número racional x un punto P_x de la recta de la siguiente manera:

1. Al cero le asignamos el punto O.

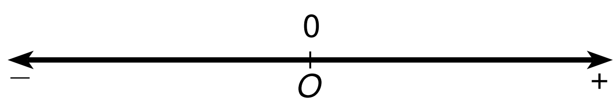

Figura 2.4: Número 0 en el origen.

2. Para asignar un punto de la recta al número 1 copiamos el trazo unitario desde O en dirección positiva determinando el punto P_1.

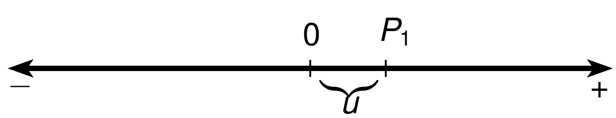

Figura 2.5: Número 1 a una distancia unitaria del origen.

3. Para asignar un punto al número $n \in \mathbb{N}$, copiamos el trazo unitario n veces desde el origen en dirección positiva, obteniéndose el punto P_n.

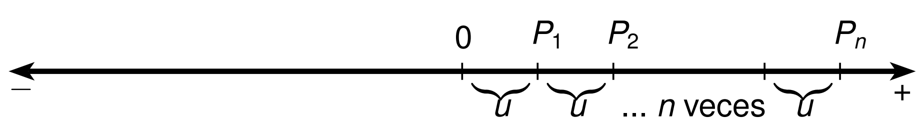

Figura 2.6: Posición del número n.

4. Para asignar un punto de la recta al entero negativo $-n$, copiamos el trazo $\overline{OP_n}$ desde O en dirección negativa, determinando el punto P_{-n}.

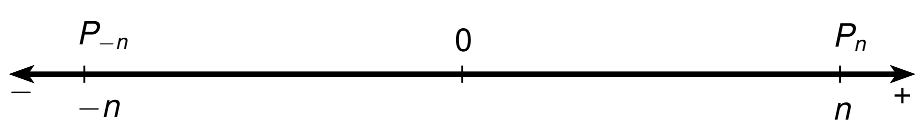

Figura 2.7: Posición del número $-n$.

5. Para asignar un punto de la recta al racional positivo $\dfrac{m}{n}$ (donde m y n son naturales) dividimos el trazo unitario en n trazos iguales y lo copiamos m veces desde O en dirección positiva, determinando el punto $P_{\frac{m}{n}}$, y lo denotamos en la recta por $\dfrac{m}{n}$.

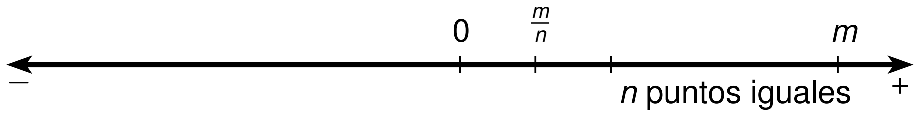

Figura 2.8: Posición del racional positivo m/n.

6. Para asignar un punto de la recta al racional negativo $-\dfrac{m}{n}$ (donde m y n son naturales) copiamos el trazo $\overline{OP}_{\frac{m}{n}}$ desde O en dirección negativa, determinando el punto $P_{-\frac{m}{n}}$.

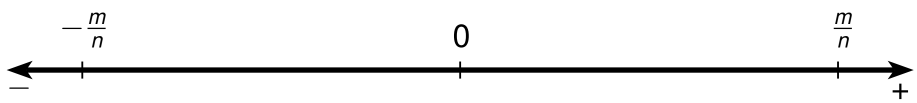

Figura 2.9: Posición del racional negativo $-m/n$.

Como ejemplo de esta asignación tenemos:

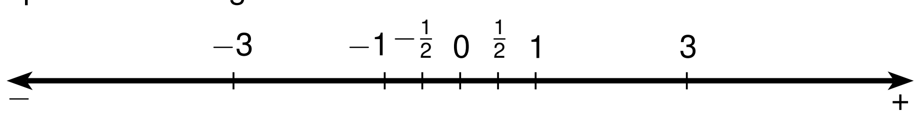

Figura 2.10: Ejemplo de asignaciones.

Observemos que cada número racional x corresponde a la medida del trazo $\overline{OP}_x$ y entonces por esta construcción podemos concluir que los números racionales efectivamente sirven para medir algunos trazos dirigidos en la recta numérica. Dado que cualquier trazo dirigido puede ser copiado sobre la recta numérica, podemos pensar en asociar medida a trazos arbitrarios, sin embargo, los números racionales no nos bastan para ello como veremos en el siguiente ejemplo:

La diagonal de un cuadrado de lado uno, no puede ser medida por un número racional, efectivamente supongamos que ésta tiene medida racional q,

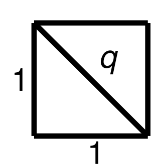

Figura 2.11: Cuadrado de lado unitario.

entonces por el Teorema de Pitágoras tenemos que: $q^2 = 1^2 + 1^2$, es decir $q^2 = 2$.

Veremos a continuación que q no es un número racional.

Si q fuera un número racional, entonces tendría la forma $q = \frac{m}{n}$ donde m y n son enteros sin divisores comunes, entonces

$$q^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2\,.$$

Por lo tanto, $m^2 = 2n^2$ $(*)$, de donde m^2 es un número par y por lo tanto m también es un número par. Sea entonces, $m = 2p$, donde p es un entero. Reemplazando el valor de m en (*), tenemos que $4p^2 = 2n^2$ y por lo tanto $n^2 = 2p^2$, es decir n^2 es un número par, de donde se obtiene que n también lo es.

Hemos concluido que m y n son números pares, luego ambos son divisibles por dos, lo que contradice la elección de m y n. Con esto hemos demostrado por contradicción que la medida de la diagonal del cuadrado no es un número racional.

Como éste, existe una infinidad de ejemplos de trazos que no pueden ser medidos con números racionales, pero como estos trazos pueden ser copiados sobre la recta numérica determinando puntos de ella que no corresponden a números racionales, nuestra limitación es equivalente a no tener números para todos los puntos de la recta.

Al agregar números para todos los puntos de la recta se obtiene el **conjunto de los números reales**. Los números reales no sólo sirven para medir todos los trazos dirigidos sino también para medir todas las áreas y volúmenes.

Por ejemplo si r es un real y es la medida del trazo:

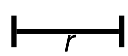

Figura 2.12: Trazo de largo r.

también es el área del rectángulo de lados r y 1:

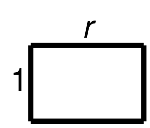

Figura 2.13: Rectángulo de lados r y 1.

$A = r \cdot 1 = r$. También lo es el volumen del paralelepípedo de lados r, 1 y 1:

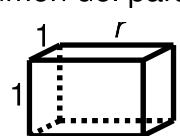

Figura 2.14: Volumen del paralelepípedo de arista r, 1 y 1.

$V = r \cdot 1 \cdot 1 = r$.

La **suma** de dos reales está asociada a la suma de trazos dirigidos:

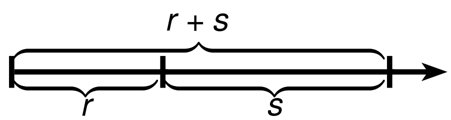

Figura 2.15: Suma de dos reales.

El **producto** podemos asociarlo al área de un rectángulo:

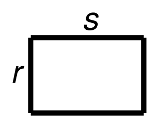

Figura 2.16: Producto de dos números reales.

$A = r \cdot s$.

El **cero** corresponde a la medida del trazo $\overline{OO}$ y el **uno** a la medida del trazo unitario.

La relación **menor que** entre números reales está dado por el orden de los puntos en la recta numérica en dirección de la semirecta positiva.

A una colección de números reales la llamamos **conjunto de números reales**.

Para formular las propiedades básicas de los números reales usamos los símbolos: $+,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ <,$ para la suma, el producto, el cero, el uno y la relación “menor que", respectivamente. $\mathbb{R}$ denota el conjunto de todos los números reales y $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la colección de todos los subconjuntos de números reales y se llama el **conjunto potencia** de $\mathbb{R}$.

Operaciones Básicas en los Números Reales: Suma y Producto 2.2

Las propiedades básicas de la suma y el producto constituyen los **axiomas de campo**, los cuales son verdades evidentes, que no necesitan demostración y que son la base para demostrar todas las demás propiedades.

Axioma de Campo

Axioma 2.1 *$\mathbb{R}$ es cerrado bajo la suma:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x + y \in \mathbb{R}).$$

Axioma 2.2 *La suma de números reales es conmutativa:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ (x + y = y + x).$$

Axioma 2.3 *La suma de números reales es asociativa:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ \forall z \in \mathbb{R}\ (x + (y + z) = (x + y) + z).$$

Axioma 2.4 *El cero es un número real y es neutro de la suma de números reales:*

$$(0 \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R}\ (x + 0 = x)).$$

Axioma 2.5 *Todo número real tiene un inverso aditivo real:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y = 0).$$

Axioma 2.6 *$\mathbb{R}$ es cerrado bajo el producto:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y \in \mathbb{R}).$$

Axioma 2.7 *El producto de números reales es conmutativo:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = y \cdot x).$$

Axioma 2.8 *El producto de números reales es asociativo:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R} \;\; \forall z \in \mathbb{R}\, (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z).$$

Axioma 2.9 *El uno es un número real diferente de cero y es neutro del producto de números reales:*

$$(1 \in \mathbb{R} \wedge 1 \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R}\, (x \cdot 1 = x)).$$

Axioma 2.10 *Todo número real diferente de cero tiene un inverso multiplicativo real:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, (x \neq 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{R}\, (x \cdot y = 1)).$$

Axioma 2.11 *El producto de números reales es distributivo sobre la suma de números reales:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R}\, (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z).$$

Para expresar axiomas o proposiciones podemos omitir el cuantificador $\forall x \in \mathbb{R}$ cuando no se preste a confusiones. Así, por ejemplo, la conmutatividad de la suma se puede expresar simplemente por:

$$x + y = y + x.$$

Como ejemplo de propiedades que se pueden demostrar a partir de estos axiomas tenemos el siguiente:

Teorema

Teorema 2.1 *Las siguientes propiedades se cumplen en $\mathbb{R}$:*

(I) *Cancelación de la suma:*

$$(x + z = y + z \rightarrow x = y).$$

(II) *Cancelación del producto:*

$$((x \cdot z = y \cdot z \wedge z \neq 0) \rightarrow x = y).$$

(III) *El producto de un número real por cero es cero:*

$$x \cdot 0 = 0.$$

(IV) *No existen divisores de cero:*

$$(x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)).$$

(V) *El neutro aditivo es único:*

$$(\forall y \in \mathbb{R}\,(x + y = y) \rightarrow x = 0).$$

(VI) *El neutro multiplicativo es único:*

$$(\forall y \in \mathbb{R}\,(x \cdot y = y) \rightarrow x = 1).$$

(VII) *El inverso aditivo es único:*

$$((x + y = 0 \wedge x + z = 0) \rightarrow y = z).$$

(VIII) *El inverso multiplicativo es único:*

$$((x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z).$$

Demostración

Demostraremos Teorema 2.1 (I) dejando el resto al lector.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ y supongamos que $x + z = y + z$. Por Axioma 2.5, existe $z' \in \mathbb{R}$ tal que $z + z' = 0$, entonces, $(x + z) + z' = (y + z) + z'$ y por Axioma 2.3, $x + (z + z') = y + (z + z')$, pero como $z + z' = 0$, tenemos que $x + 0 = y + 0$ y por Axioma 2.4 $x = y$. ■

En base a estas propiedades y a los conceptos primitivos se pueden definir nuevos conceptos:

Definición

Definición 2.1 *Inverso aditivo*

El inverso aditivo de un número real es aquel número real que sumado con él da cero:

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ (-x = y \ \leftrightarrow\ x + y = 0).$

Esta definición es correcta dado que hemos establecido la unicidad del inverso aditivo en Teorema 2.1 (VII).

Definición 2.2 Resta

$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall y \in \mathbb{R} \, (x - y = x + (-y))$.

Es decir, restar es sumar el inverso aditivo.

Definición 2.3 Inverso multiplicativo

$\forall x \in \mathbb{R} \, \forall y \in \mathbb{R} \left(x \neq 0 \rightarrow \left(\frac{1}{x} = y \ \ \leftrightarrow \ \ x \cdot y = 1 \right) \right)$.

Esta definición es correcta por Teorema 2.1 (VIII).

Definición 2.4 División

$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall y \in \mathbb{R} \left(y \neq 0 \rightarrow \frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y} \right) \right)$.

Es decir, dividir es multiplicar por el inverso multiplicativo.

Definición 2.5 Cuadrado

$\forall x \in \mathbb{R} \, (x^2 = x \cdot x)$.

En estas definiciones también se pueden omitir los cuantificadores cuando no se preste a confusión. Por ejemplo la Definición 2.3 puede expresarse simplemente por:

$$x \neq 0 \rightarrow \left(\frac{1}{x} = y \ \leftrightarrow \ x \cdot y = 1 \right).$$

Como ejemplos de propiedades de los nuevos conceptos que se pueden demostrar, tenemos:

Teorema

Teorema 2.2 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:*

(I) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

(II) $(-1)\, x = -x$.

(III) $(x^2 = 0 \rightarrow x = 0)$.

(IV) $(x+y)^2 = x^2 + 2x \cdot y + y^2$.

Demostración

Demostraremos Teorema 2.2 (I) dejando el resto al lector. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Por Definición 2.3, basta probar que

$$(x+y) + ((-x) + (-y)) = 0\,.$$

$$\begin{aligned}(x+y) + ((-x)+(-y)) &= (x+(-x)) + (y+(-y)), \text{ por Axioma 2.2 y 2.3}\\ &= 0+0, \text{ por Definición 2.3.}\\ &= 0, \text{ por Axioma 2.4.}\end{aligned}$$

■

Orden de los Números Reales 2.3

Las siguientes son verdades evidentes que describen las propiedades básicas de la relación **menor que** en los números reales. Toda otra propiedad del orden se puede demostrar a partir de éstas.

Axioma de Orden

Axioma 2.12 *El orden de los números reales es lineal:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x)).$$

Axioma 2.13 *El orden de los números reales es asimétrico:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x < y \rightarrow \neg(y < x)).$$

Axioma 2.14 *El orden de los números reales es transitivo:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z).$$

Axioma 2.15 *El orden de los números reales se preserva al sumar un número real:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\ (x < y \rightarrow x + z < y + z).$$

Axioma 2.16 *El orden de los números reales se preserva al multiplicar por un número real positivo:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, ((x < y \wedge 0 < z) \rightarrow x \cdot z < y \cdot z).$$

Con estos axiomas se pueden definir los conceptos de **mayor, mayor o igual, menor o igual, positivo y negativo** para números reales.

Definición

Definición 2.6 *Relaciones de Orden en* $\mathbb{R}$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$*, entonces:*

(I) $(x > y \leftrightarrow y < x)$,
(x *es mayor que* y*).*

(II) $(x \geq y \leftrightarrow (x > y \vee x = y))$,
(x *es mayor o igual que* y*).*

(III) $(x \leq y \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$,
(x *es menor o igual que* y*).*

(IV) (x *es positivo* $\leftrightarrow x > 0$).

(V) (x *es negativo* $\leftrightarrow x < 0$).

Como ejemplos de propiedades que se puede demostrar a partir de los axiomas tenemos:

Teorema

Teorema 2.3 *Sean* $x, y, z \in \mathbb{R}$*, entonces:*

(I) $\neg (x < x)$.

(II) $(\neg (x < y) \leftrightarrow x \geq y)$.

(III) $(x > 0 \leftrightarrow (-x) < 0)$.

(IV) $((x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow x + y > 0)$.

(V) $((x < y \wedge z < u) \rightarrow x + z < y + u)$.

(VI) $(x > y \leftrightarrow x - y > 0)$.

(VII) $((x > 0 \wedge y > 0) \to x \cdot y > 0)$.

(VIII) $1 > 0$.

(IX) $\left(x > 0 \to \dfrac{1}{x} > 0\right)$.

(X) $x^2 \geq 0$.

(XI) $((x < y \wedge z < 0) \to x \cdot z > y \cdot z)$.

(XII) $\left((x > 0 \wedge x < y) \to \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}\right)$.

(XIII) $\left(x < y \to x < \dfrac{x+y}{2} < y\right)$.

(XIV) $x - 1 < x < x + 1$.

Demostración

Probaremos (I), (II), (III) y (IV) dejando el resto al lector:

(i) *Sea* $x \in \mathbb{R}$ *y supongamos* $x < x$*. Entonces por Axioma 2.12,* $\neg\,(x < x)$ *lo cuál es una contradicción. Luego* $\neg\,(x < x)$.

(ii) *Demostraremos en primer lugar que* $\neg\,(x < y) \to x \geq y$.
Supongamos $\neg\,(x < y)$*, entonces por Axioma 2.12 tenemos dos casos a considerar*

- *Si* $x \neq y$*, se tiene que* $y < x$
  y por Definición 1, $x > y$*, luego* $x \geq y$.
- *Si* $x = y$*, es inmediato que* $x \geq y$.

Para el recíproco queremos demostrar que $x \geq y \to \neg(x < y)$.

Entonces supongamos que $x \geq y$ *entonces* $x = y \vee x > y$*. Si* $x = y$*, por (I) sabemos que* $\neg(x < y)$*. Si* $x > y$*, por Definición 1tenemos que* $y < x$ *y por Axioma 2.15* $\neg(x < y)$.

(iii) *Para la implicación de izquierda a derecha, supongamos que* $x > 0$*. Por Definición 1,* $0 < x$ *y por* $(\mathcal{O}4)$*,* $0 + (-x) < x + (-x)$*, de donde se obtiene que* $(-x) < 0$.

Para la implicación recíproca, supongamos $(-x) < 0$*, por Axioma 2.15 tenemos que* $(-x) + x < 0 + x$*, es decir,* $0 < x$ *y por Definición 1* $x > 0$.

viii) *Supongamos que* $\neg\ (1 > 0)$. *Por Definición 2,* $\neg\ (0 < 1)$ *y por la parte* (II) *de este teorema,* $0 \geq 1$. *Como* $0 \neq 1$ *por Axioma 2.15 tenemos que* $0 > 1$, *entonces por la parte* (VI) *de este teorema,* $0 - 1 > 0$, *es decir,* $-1 > 0$.

Como $0 > 1$ *y* $-1 > 0$ *aplicando* $(\mathcal{O}5)$ *se obtiene* $0(-1) > 1(-1)$, *luego* $0 > -1$. *Por lo tanto* $-1 > 0 \wedge 0 > -1$, *es decir* $-1 < 0 \wedge 0 < -1$, *y por* $(\mathcal{O}3)$, $-1 < -1$ *lo cual contradice la parte* (I) *de este teorema.*

Podemos concluir que la suposición inicial es falsa, es decir que $1 > 0$.

■

En base al orden de los números reales se puede definir el valor absoluto:

Definición

Definición 2.7 Valor Absoluto

Para $x \in \mathbb{R}$, *definimos:*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

($|x|$ *es el* **valor absoluto de** x*).*

Por ejemplo, $|5| = 5 \quad y \quad |-7| = -(-7) = 7$.

Las principales propiedades del valor absoluto vienen dadas por:

Teorema

Teorema 2.4 *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$, *entonces:*

(I) $|x| \geq 0$.

(II) $|x| \geq x$.

(III) $(|x| = 0 \leftrightarrow x = 0)$.

(IV) $(y > 0 \rightarrow (|x| = y \leftrightarrow (x = y \vee x = -y)))$.

(V) $(y > 0 \rightarrow (|x| < y \leftrightarrow (-y < x < y)))$.

(VI) $(y > 0 \to (|x| > y \leftrightarrow (x > y \vee x < -y)))$.

(VII) $(y > 0 \to (|x| \leq y \leftrightarrow (-y \leq x \leq y)))$.

(VIII) $(y > 0 \to (|x| \geq y \leftrightarrow (x \geq y \vee x \leq -y)))$.

(IX) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(X) $\left(y \neq 0 \to |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}\right)$.

(XI) $|-x| = |x|$.

(XII) $-|x| \leq x \leq |x|$.

(XIII) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(XIV) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demostración

Demostraremos (I), (V), (XII), (XIII) y (XIV) dejando el resto al lector.

(i) *Sea* $x \in \mathbb{R}$, *entonces* $(x \geq 0 \vee x < 0)$.
Si $x \geq 0, |x| = x \geq 0$ *y si* $x < 0, |x| = -x \geq 0$,
luego $|x| \geq 0$.

(v) *Sea* $y > 0$ *y* $x \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\begin{aligned} |x| < y \quad &\leftrightarrow \quad ((x \geq 0 \wedge x < y) \vee (x < 0 \wedge -x < y)) \\ &\leftrightarrow \quad ((x \geq 0 \wedge x < y) \vee (x < 0 \wedge x > -y)) \\ &\leftrightarrow \quad (0 \leq x < y \vee -y < x < 0). \end{aligned}$$

Demostraremos que

$$((0 \leq x < y \vee -y < x < 0) \leftrightarrow (-y < x < y)).$$

Para la implicación de izquierda a derecha, suponemos

$$((0 \leq x < y) \vee (-y < x < 0)).$$

- *Si* $0 \leq x < y$, *como por hipótesis* $y > 0$, *entonces* $-y < 0$, *luego* $-y < 0 \leq x < y$, *de donde se obtiene* $-y < x < y$.
- *Si* $-y < x < 0$, *como* $y > 0$, *tenemos* $-y < x < 0 < y$, *de donde se obtiene* $-y < x < y$.

Para la implicación de derecha a izquierda, supongamos $-y < x < y$.

Si $x \geq 0$, *entonces* $0 \leq x < y$.

Si $x < 0$, *entonces* $-y < x < 0$.

Como $(x \geq 0 \vee x < 0)$, *tenemos* $((0 \leq x < y) \vee (-y < x < 0))$.

(xii) *Sea* $x \in \mathbb{R}$, *entonces* $(x \geq 0 \vee x < 0)$.

Si $x \geq 0$, *entonces* $|x| = x$ *y como* $-x \leq 0$,

$-|x| = -x \leq 0 \leq x = |x|$, *luego* $-|x| \leq x \leq |x|$.

Si $x < 0$, *entonces* $|x| = -x$ *y como* $-x > 0$,

$-|x| = --x = x < 0 < -x = |x|$, *luego* $-|x| \leq x \leq |x|$.

En ambos casos hemos obtenido la conclusión deseada.

(xiii) *Como* $x \leq |x|$ *y* $y \leq |y|$ *tenemos* $x + y \leq |x| + |y|$.

Por otro lado, $x \geq -|x|$ *y* $y \geq -|y|$ *de donde* $x + y \geq -(|x| + |y|)$.

Tenemos entonces $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$ *y como* $|x|+|y| \geq 0$, *por* (VII)*obtenemos* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(xiv) *Como* $x = x - y + y$, *tenemos que* $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ *de donde* $|x| - |y| \leq |x - y|$.

Además $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$ *por* (XIII).

Luego $|y| - |x| \leq |y - x|$.

Por lo tanto $|x| - |y| \geq -|y - x| = -|x - y|$ *por* (XI).

Luego $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$ *y utilizando* (VII)

se obtiene que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

$\blacksquare$

Conjuntos de Números Reales 2.4

Las siguientes son verdades evidentes que describen las propiedades básicas de los conjuntos de números reales. En base a éstas se pueden definir los conjuntos numéricos más comunes y demostrar sus propiedades.

Axioma de conjuntos de números reales

Axioma 2.17 *Dos conjuntos de números reales con los mismos elementos, son iguales:*

$$\forall x \in \mathbb{R}(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B.$$

Axioma 2.18 *Dada una propiedad, existe el conjunto de los números reales que la satisfacen:*

$$\exists A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ \forall x \in \mathbb{R}(x \in A \leftrightarrow \alpha(x)).$$

Este conjunto es único por Axioma 2.17 y se denota por

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ \alpha(x)\}.$$

A partir de los axiomas anteriores podemos definir los conjuntos de números reales más conocidos:

Definición

Definición 2.8 *Conjunto vacío*

$\phi = \{x \in \mathbb{R} : x \neq x\}$,

Definición 2.9 *Conjunto de los reales positivos*

$\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$,

Definición 2.10 *Conjunto de los reales negativos*

$\mathbb{R}^{-} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$,

Definición 2.11 *Singleton de a*

$\{a\} = \{x \in \mathbb{R} : x = a\}$,

Definición 2.12 *Par de números reales a y b)*

$\{a, b\} = \{x \in \mathbb{R} : (x = a \vee x = b)\}$,

Definición 2.13 *Trío de números reales a, b y c*

$\{a, b, c\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x = a \vee x = b \vee x = c)\}$,

Definición 2.14 *Intervalo cerrado de extremos a y b*

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

Definición 2.15 *Intervalo abierto de extremos a y b*

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

Definición 2.16 *Intervalo, de extremos a y b, cerrado en a y abierto en b*

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,

Definición 2.17 *Intervalo, de extremos a y b, abierto en a y cerrado en b*

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,

Definición 2.18 *Intervalo infinito por la izquierda, de extremo b y abierto en b*

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,

Definición 2.19 *Intervalo infinito por la izquierda, de extremo b y cerrado en b*

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,

Definición 2.20 *Intervalo infinito por laderecha, de extremo a y abierto en a*

$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,

Definición 2.21 *Intervalo infinito por la derecha, de extremo a y cerrado en a*

$[a, \infty[= \{\in \mathbb{R} : a \leq x\}$,

$]-\infty, \infty[$ se usa también para denotar el conjunto $\mathbb{R}$.

También podemos definir las relaciones y operaciones básicas de conjuntos. Si A y B son conjuntos de números reales entonces:

Definición

Definición 2.22 *A es subconjunto de B*

$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\,(x \in A \rightarrow x \in B)$,

Definición 2.23 *A unión B*

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : (x \in A \vee x \in B)\}$,

Definición 2.24 *A intersección B*

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : (x \in A \wedge x \in B)\}$,

Definición 2.25 *A menos B*

$A - B = \{x \in \mathbb{R} : (x \in A \wedge x \notin B)\}$,

Ejemplos

Ejemplo 2.1

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^{-}$.

Ejemplo 2.2

$\mathbb{R} - [a, b] \; = \,]-\infty, a[\;\cup\;]b, \infty[$.

Ejemplo 2.3

$[-2, 1] \;\cap\;]0, 15] =]0, 1]$.

Ejemplo 2.4

$[-2, 0] \;\subseteq\; [-2, 1] \;\subseteq\;]-\infty, 1]$.

Ejemplo 2.5

$\mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\ \cup\ ]2, \infty[.$

Ejemplo 2.6

$\Big([1,3[\ \cup\ ]4,6]\Big)\ \cap\ ]2,5[=]2,3[\ \cup\ ]4,5[.$

Definimos provisoriamente el conjunto de los números naturales por:

Definición

Definición 2.26 *Conjunto de los números naturales*

$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + 1 + \cdots + 1\},$

Esta definición será reemplazada en el capítulo 5 por otra que no contenga puntos suspensivos y en base a la cual demostraremos las propiedades de los números naturales. Por ahora podemos decir que en $\mathbb{N}$ se puede sumar y multiplicar; pero no se puede restar ni dividir. A partir de $\mathbb{N}$ se puede definir el conjunto de los números enteros:

Definición

Definición 2.27 *Conjunto de los números enteros*

$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{N} \vee x = 0 \vee (-x) \in \mathbb{N})\}\ ,$

Las propiedades de los números enteros se basan en las propiedades de los números naturales. En todo caso, podemos decir que en $\mathbb{Z}$ se puede sumar, restar y multiplicar pero no se puede dividir. A partir de los enteros pueden ser definidos los números racionales:

Definición

Definición 2.28 *Conjunto de los* **números racionales**

$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{Z}\ \ \exists q \in \mathbb{N}\left(x = \frac{p}{q}\right)\right\}$

Las propiedades de los números racionales dependen de las propiedades de los naturales y de los enteros. En todo caso, podemos decir que en $\mathbb{Q}$ se pueden efectuar las cuatro operaciones.

Podemos observar que si $x = \dfrac{p}{q}$, también $x = \dfrac{2p}{2q}$ y que por lo tanto, p y q no

son únicos; pero pueden ser elegidos primos relativos, es decir, sin factores comunes diferentes de 1.

También se pueden definir los conjuntos de enteros y racionales positivos y negativos:

Definición

Definición 2.29 *Conjunto de Racionales Positivos*

$\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$.

Definición 2.30 *Conjunto de Racionales Negativos*

$\mathbb{Q}^- = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^-$.

Definición 2.31 *Conjunto de Enteros Positivos*

$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{N}$.

Definición 2.32 *Conjunto de Enteros Negativos*

$\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^-$.

Completud de los Números Reales 2.5

Hasta ahora tenemos como propiedades básicas de los números reales los **los axiomas de cuerpo ordenado**.

Como hemos visto, los números racionales también satisfacen estos axiomas aunque no constituyen todos los puntos de la recta numérica.

El axioma que garantiza que a todo punto de la recta le corresponde un número real, se llama **Axioma del supremo** y en base a él se puede demostrar la existencia de las raíces cuadradas de los números reales positivos. Esta última propiedad no es cierta en $\mathbb{Q}$ pues como hemos visto, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

El axioma del supremo será desarrollado en el capítulo 10 y por el momento adoptaremos el siguiente axioma provisorio que nos permitirá trabajar con raíces:

Axioma

Axioma 2.19 *Todo número real positivo es un cuadrado:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists! y \in \mathbb{R}^+ (y^2 = x).$$

Definimos la raíz cuadrada de un número mayor o igual que cero por:

Definición

Definición 2.33 *Raiz cuadrada de 0*

$\sqrt{0} = 0.$

Definición 2.34 *Raíz cuadrada positiva*

$\forall x \in \mathbb{R}^+ (\sqrt{x} = y \quad \leftrightarrow \quad y \in \mathbb{R}^+ \wedge y^2 = x).$

($\sqrt{x}$ se llama **raíz cuadrada positiva** *de x).*

Del axioma provisorio 2.19 se obtiene que $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$, lo que justifica la siguiente definición:

Definición

Definición 2.35 *Conjunto de los números irracionales*

$\Pi = \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$

Ecuaciones e Inecuaciones 2.6

Ecuaciones en una variable 2.6.1

Una **ecuación** en la variable x es una igualdad entre dos expresiones que contienen dicha variable.

Por ejemplo:

$$2x^2 - 5 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad |x - 3| = \sqrt{x + 1}.$$

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es **solución** de una ecuación si al reemplazar x por a en la ecuación, se obtiene una igualdad.

Por ejemplo 2 es solución de la ecuación

$$|x^2 - 3x + 1| = 1$$

pues $|2^2 - 3 \cdot 2 + 1| = 1$.

Se llama **conjunto solución de una ecuación** al conjunto de todas las soluciones de la ecuación y se considera resuelta la ecuación cuando este conjunto se expresa por extensión o como unión de intervalos disjuntos.

Ejemplo 2.7

Resolver la ecuación

$$|2 - x| + |x - 7| = 5.$$

Solución

Como $|2 - x| = |x - 2|$ *entonces la ecuación es equivalente a:*

$$|x - 2| + |x - 7| = 5.$$

Además $|x - 2| = x - 2 \leftrightarrow x - 2 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 2$

y $|x - 2| = -(x - 2) \leftrightarrow x - 2 < 0 \leftrightarrow x < 2$.

También $|x - 7| = x - 7 \leftrightarrow x - 7 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 7$

y $|x - 7| = -(x - 7) \leftrightarrow x - 7 < 0 \leftrightarrow x < 7$.

Por lo tanto podemos considerar los siguientes casos:

(a) Si $x \geq 7$, entonces, $|x-2|+|x-7|=5 \quad \leftrightarrow \quad x-2+x-7=5 \quad \leftrightarrow \quad x=7$.

(b) Si $2 \leq x < 7$, entonces,

$$|x-2|+|x-7|=5 \quad \leftrightarrow \quad x-2-x+7=5 \quad \leftrightarrow \quad 5=5.$$

(c) Si $x < 2$, entonces,

$$|x-2|+|x-7|=5 \quad \leftrightarrow \quad -x+2-x+7=5 \quad \leftrightarrow \quad x=2.$$

Tenemos entonces que x es solución de la ecuación dada si y sólo si

$$((x \geq 7 \wedge x=7) \vee (2 \leq x < 7 \wedge 5=5) \vee (x < 2 \wedge x=2)) \quad \leftrightarrow$$

$$(x=7 \vee 2 \leq x < 7) \quad \leftrightarrow$$

$$2 \leq x \leq 7.$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación planteada es el intervalo [2,7].

La ecuación de primer grado 2.6.2

La ecuación de la forma $ax+b=0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ se llama **ecuación lineal o de primer grado**.

Como $a \neq 0$, se tiene que $ax+b=0 \quad \leftrightarrow \quad x=-\dfrac{b}{a}$, de donde ésta ecuación tiene siempre una única solución $-\dfrac{b}{a}$.

La ecuación de segundo grado 2.6.3

La ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ se llama **ecuación de segundo grado**.

Consideremos la siguiente igualdad (método de completación de cuadrados):

$$ax^2+bx+c=a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big)\Big]$$

y sea $\triangle = b^2-4ac$.

Si $\triangle \geq 0$,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\Big)^2\Big] \\ &= a\Big(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\Big)\cdot\Big(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\Big). \end{aligned}$$

Si $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, entonces

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

luego

$$(ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow (x=x_1 \lor x=x_2)).$$

Cuando $\Delta=0$,tenemos que $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta<0$, entonces $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$, luego $\Big[(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\Big]>0$.

Por lo tanto, si $a>0$,

$$ax^2+bx+c=a\Big((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\Big)>0,$$

y si $a<0$, $ax^2+bx+c=a\Big((x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\Big)<0$.

Luego en este caso, $ax^2+bx+c\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.
Resumimos los resultados anteriores en el siguiente teorema:

Teorema

Teorema 2.5 *Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$, $\triangle=b^2-4ac$ y $a\neq 0$.*

(I) *Si $\triangle\geq 0$, entonces las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son $x_1=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\triangle}}{2a}$ y $x_2=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\triangle}}{2a}$.
En este caso se tiene que $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.*

(II) *Si $\triangle<0$, entonces la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene soluciones reales.*

Inecuaciones en una variable 2.6.4

Una **inecuación** en la variable x es una desigualdad entre dos expresiones que contienen dicha variable. Por ejemplo:

$$\sqrt{x^2+1} > 2, \quad |x+5| + |x+2| \geq 1, \quad x^2 - 3 < \frac{1}{2}.$$

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es **solución** de una inecuación si al reemplazar x por a en la inecuación, resulta una desigualdad verdadera.

Así, por ejemplo, 3 es solución de $\sqrt{x^2+1} > 2$ porque $\sqrt{3^2+1} > 2$.

Resolver una inecuación es encontrar todas sus soluciones reales. El conjunto de todas las soluciones de una inecuación se llama **conjunto solución de la inecuación**. Al igual que en el caso de las ecuaciones, se considera resuelta una inecuación cuando este conjunto se expresa por extensión o como unión de intervalos disjuntos.

Ejemplo 2.8

Resolver la inecuación

$$|2-x| + |x-7| \leq 10.$$

Solución

Considerando los mismos casos que en el Ejemplo 2.7, tenemos:

(a) Si $x \geq 7$*, entonces,* $|x-2| + |x-7| \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad x-2+x-7 \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad 2x \leq 19 \quad \leftrightarrow \quad x \leq 19/2$.

(b) Si $2 \leq x < 7$*, entonces,*

$$|x-2| + |x-7| \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad x-2-x+7 \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad 5 \leq 10.$$

(c) Si $x < 2$*, entonces,*

$$|x-2| + |x-7| = 5 \quad \leftrightarrow \quad -x+2-x+7 \leq 10 \quad \leftrightarrow \quad -2x \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad x \geq -1/2.$$

Tenemos entonces que x *es solución de la inecuación si y sólo si*

$$\begin{gathered}((x \geq 7 \wedge x \leq 19/2) \vee (2 \leq x < 7 \wedge 5 \leq 10) \vee (x < 2 \wedge x \geq -1/2)) \quad \leftrightarrow \\ (7 \leq x \leq 19/2) \vee (2 \leq x < 7) \vee (-1/2 \leq x < 2) \quad \leftrightarrow \\ -1/2 \leq x \leq 19/2.\end{gathered}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación planteada es el intervalo [-1/2,19/2].

Inecuación de primer grado 2.6.5

Una inecuación de la forma $ax + b > 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, (o reemplazando $>$ por $\geq$, $<$ o $\leq$), se llama **inecuación lineal o de primer grado**.

Como $a \neq 0$,se tiene que $ax+b > 0 \ \leftrightarrow \ x > -b/a$ y por lo tanto el conjunto solución de ésta inecuación es $]-b/a, \infty[$. Al reemplazar $>$ por $\geq$, $<$ o $\leq$, se obtienen las soluciones: $[-b/a, \infty[$, $]-\infty, -b/a[$ y $]-\infty, -b/a]$ respectivamente.

Inecuación de segundo grado 2.6.6

Una inecuación de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, (o reemplazando $>$ por $\geq$, $<$ o $\leq$), se llama **inecuación de segundo grado** y el siguiente teorema resume las posibles soluciones para ella.

Teorema

Teorema 2.6 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\triangle = b^2 - 4ac$ y $a \neq 0$.*

(I) *Si $\triangle \geq 0$ y x_1, x_2 son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y $x_1 \leq x_2$ entonces:*

a) *Si $a > 0$, $\quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \leftrightarrow \quad (x > x_2 \vee x < x_1)$.*

b) *Si $a < 0$, $\quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$.*

(II) *Si $\triangle < 0$, entonces:*

a) *Si $a > 0$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}(ax^2 + bx + x > 0)$.*

b) *Si $a < 0$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}(ax^2 + bx + c < 0)$.*

Demostración

(i) a) como $\triangle \geq 0$, por Teorema 2.5 (I), tenemos que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

luego

$$\begin{array}{rcl} ax^2+bx+c>0 & \leftrightarrow & a(x-x_1)(x-x_2)>0 \\ & \leftrightarrow & ((x-x_1)>0 \wedge (x-x_2)>0) \vee ((x-x_1)<0 \wedge (x-x_2)<0) \\ & \leftrightarrow & (x>x_1 \wedge x>x_2) \vee (x<x_1 \wedge x<x_2) \\ & \leftrightarrow & (x>x_2) \vee (x<x_1). \end{array}$$

En forma análoga se demuestra (i) b).

(ii) Por Teorema 2.5 (II) tenemos que para $\Delta<0$*:*
si $a>0$, $\forall x \in \mathbb{R}\,(ax^2+bx+c>0)$
y si $a<0$, $\forall x \in \mathbb{R}\,(ax^2+bx+c<0)$.

■

Problemas Resueltos 2.7

Problema 2.1

Demostrar que si x e y son reales positivos, entonces $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

Solución

Tenemos que

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \;\leftrightarrow\; \frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2 \;\leftrightarrow\; x^2+y^2\geq 2xy$$
$$\leftrightarrow\; x^2+y^2-2xy\geq 0 \;\leftrightarrow\; (x-y)^2\geq 0.$$

y esta última propiedad es verdadera por Teorema 2.3 (X).

Problema 2.2

Demostrar que si x es real positivo, entonces

$$x^3+\frac{1}{x^3}\geq x+\frac{1}{x}.$$

Solución

$$\begin{aligned}(x^3+\frac{1}{x^3})-(x+\frac{1}{x}) &= (x^3-x)+(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x})\\ &= x(x^2-1)+\frac{(1-x^2)}{x^3}\\ &= (x^2-1)\Big(x-\frac{1}{x^3}\Big)\\ &= \frac{x^2-1}{x^3}(x^4-1)\\ &= \frac{(x^2-1)^2(x^2+1)}{x^3}.\end{aligned}$$

Dado que, $(x^2-1)^2 \geq 0$ *por teorema [2.3.3 (x)] y*

$x^2+1 > 0$ *porque* $x^2 > 0$*, y*

$x^3 > 0$ *porque* $x > 0$*,*

entonces:

$\dfrac{(x^2-1)^2(x^2+1)}{x^3} \geq 0$*, luego* $(x^3+\dfrac{1}{x^3})-(x+\dfrac{1}{x}) \geq 0$*, de donde*

$$x^3+\frac{1}{x^3} \geq x+\frac{1}{x}.$$

Problema 2.3

Resolver la inecuación: $(x^2+3x-4)(2x^2+4) > 0$.

Solución

La ecuación $2x^2+4=0$ *no tiene soluciones reales y* $2 > 0$ *luego* $\forall x \in \mathbb{R}\,(2x^2+4>0)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}(x^2+3x-4)(2x^2+4)>0 &\leftrightarrow (x^2+3x-4)>0\\ &\leftrightarrow (x+4)(x-1)>0\\ &\leftrightarrow (x>1 \vee x<-4).\end{aligned}$$

Luego la solución de la inecuación dada es $]-\infty,-4[\ \cup\ ]1,\infty[$.

Problema 2.4

Resolver la inecuación:

$$\frac{x^4 - 56x + 95}{x^2 - 7x + 10} > 8.$$

Solución

En primer lugar notemos que esta expresión está definida para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 7x + 10 \neq 0$ y cualquier solución deberá cumplir este requisito.

$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \leftrightarrow \quad (x = 2 \vee x = 5)$ *; es decir, cualquier solución x deberá ser tal que $x \neq 2 \wedge x \neq 5$.*

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 - 56x + 95}{x^2 - 7x + 10} > 8 \quad &\leftrightarrow \quad \frac{x^4 - 56x + 95}{x^2 - 7x + 10} - 8 > 0 \\
&\leftrightarrow \quad \frac{x^4 - 8x^2 + 15}{x^2 - 7x + 10} > 0 \\
&\leftrightarrow \quad \frac{(x^2 - 3)(x^2 - 5)}{(x - 2)(x - 5)} > 0 \\
&\leftrightarrow \quad \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{(x - 2)(x - 5)} > 0.
\end{aligned}$$

Como el signo de esta expresión depende del signo de cada uno de los factores, entonces estudiaremos los signos de éstos ordenándolos de menor a mayor:

$$x - 5, \quad x - \sqrt{5}, \quad x - 2, \quad x - \sqrt{3}, \quad x + \sqrt{3}, \quad x + \sqrt{5}.$$

Si $x > 5$, entonces todos los factores son positivos y por lo tanto la expresión es positiva. Luego x es solución en este caso.

Si $\sqrt{5} < x < 5$, el primer factor es negativo y el resto positivo , por lo tanto la expresión es negativa. Luego x no es solución en este caso.

Análogamente se obtiene que:

si $2 < x < \sqrt{5}$, $\quad x$ es solución,

si $\sqrt{3} < x < 2$, $\quad x$ no es solución,

si $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $\quad x$ es solución,

si $-\sqrt{5} < x < -\sqrt{3}$, $\quad x$ no es solución y

si $x < -\sqrt{5}$, $\quad x$ es solución.

Además, si $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$ la expresión es cero y entonces x no es solución.

Luego el conjunto solución de la inecuación es

$$]-\infty, \ -\sqrt{5}[\ \cup \ ]-\sqrt{3}, \ \sqrt{3}[\ \cup \ ]2, \ \sqrt{5}[\ \cup \ ]5, \infty[.$$

Podemos resumir el argumento anterior en la siguiente figura:

	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$\sqrt{5}$		5	∞
$x-5$	-		-		-		-		-		-	0	+
$x-\sqrt{5}$	-		-		-		-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-		-	0	+		+		+
$x-\sqrt{3}$	-		-		-	0	+		+		+		+
$x+\sqrt{3}$	-		-	0	+		+		+		+		+
$x+\sqrt{5}$	-	0	+		+		+		+		+		+
E	+	0	-	0	+	0	-	$*$	+	0	-	$*$	+

Figura 2.17: Conjunto solución del problema 2.4.

donde $E = \dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{(x-2)(x-5)}$ *y (*) denota que la expresión no está definida.*

El conjunto solución es la unión de todos aquellos intervalos donde E es positivo, es decir es

$$]-\infty, \ -\sqrt{5}[\ \cup \ ]-\sqrt{3}, \ \sqrt{3}[\ \cup \ ]2, \ \sqrt{5}[\ \cup \ ]5, \infty[.$$

Problema 2.5

¿Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 + 2x + r > 10)?$$

Solución

$x^2 + 2x + r > 10 \quad \leftrightarrow \quad x^2 + 2x + (r - 10) > 0.$

Por Teorema 2.6 (II) (IIa), esto se cumple si $\triangle < 0$ y $a > 0$. En nuestro caso, $\triangle = 4 - 4(r-10) < 0$ y $a = 1 > 0$, luego, la condición pedida es:

$$
\begin{array}{rccc}
 & 4-4(r-10) & < & 0 \\
\leftrightarrow & 4-4r+40 & < & 0 \\
\leftrightarrow & -4r & < & -44 \\
\leftrightarrow & r & > & 11.
\end{array}
$$

Entonces, para $r > 11$ *se tiene que* $\forall x \in \mathbb{R}\,(x^2+2x+r>0)$.

Problema 2.6

Resolver la inecuación

$$\frac{|x+2|}{|x+3|} \leq \sqrt{2}.$$

Solución

Como ambas expresiones son positivas, elevando al cuadrado obtenemos la siguiente inecuación equivalente a la anterior:

$$\frac{(x+2)^2}{(x+3)^2} \leq 2.$$

Desarrollando, obtenemos

$$
\begin{array}{rccc}
 & (x+2)^2 & \leq & 2(x+3)^2 \\
\leftrightarrow & x^2+4x+4 & \leq & 2(x^2+6x+9) \\
\leftrightarrow & x^2+4x+4 & \leq & 2x^2+12x+18 \\
\leftrightarrow & x^2+8x+14 & \geq & 0 \\
\leftrightarrow & (x \geq -4+\sqrt{2} & \vee & x \leq -4-\sqrt{2}).
\end{array}
$$

Por lo tanto el conjunto solución es $]-\infty,-4-\sqrt{2}] \cup [-4+\sqrt{2},\infty[$.

Problema 2.7

Resolver la inecuación

$$2x-1 > \sqrt{x^2-3x}.$$

Solución

Notemos en primer lugar que esta expresión está definida si $x^2 - 3x \geq 0$ *y como* $x^2 - 3x \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x(x-3) \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad (x \geq 3 \vee x \leq 0)$, *entonces cualquier solución deberá cumplir la condición:* $(x \geq 3 \vee x \leq 0)$.

Además $\quad 2x - 1 > 0 \quad \leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}$.

Si $x > \frac{1}{2}$,

$$\begin{array}{rrcl} & 2x-1 & > & \sqrt{x^2-3x} \\ \leftrightarrow & (2x-1)^2 & > & x^2-3x \\ \leftrightarrow & 4x^2-4x+1 & > & x^2-3x \\ \leftrightarrow & 3x^2-x+1 & > & 0 \end{array}$$

y como $\triangle = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11 < 0$ *y* $3 > 0$, *tenemos que* $\forall x \in \mathbb{R}(3x^2 - x + 1 > 0)$.
Luego la solución para este caso es

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2} \wedge (x \geq 3 \vee x \leq 0)\} =]3, \infty[.$$

Si $x \leq \frac{1}{2}$, *entonces* $2x - 1 \leq 0$ *y por lo tanto* $2x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 3x}$
es decir, x *no es solución.*
La solución de la inecuación será entonces S_1.

Problema 2.8

Probar que si $a > 0$, entonces $ax^2 + bx + c \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$, y que la igualdad se cumple cuando $x = -\frac{b}{2a}$.

Solución

Como $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\triangle}{4a^2}\right]$ *entonces si* $a > 0$, $ax^2+bx+c \geq a\left(-\dfrac{\triangle}{4a^2}\right) = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$

y para $x = -\dfrac{b}{2a}$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ *de donde*

$$ax^2+bx+c = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Análogamente se puede demostrar que si $a < 0$, *entonces* $ax^2+bx+c \leq \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ *y que la igualdad se cumple cuando* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Problema 2.9

Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área cuyo perímetro es 8.

Solución

Sean x *e* y *las dimensiones del rectángulo,entonces* $x+y = \dfrac{8}{2} = 4$ *de donde* $y = 4-x$.

El área del rectángulo está dada por

$$x(4-x) = -x^2+4x = -(x^2-4x+4-4) = -((x-2)^2-4)$$

y este trinomio toma su mayor valor 4 cuando $x = 2$*; es decir, cuando* $(x = 2 \wedge y = 2)$.

Ejercicios Propuestos 2.8

1. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales usando los axiomas de campo y las propiedades ya demostradas:

    a) $x + z = y + z \to x = y$.
    b) $(x \cdot z = y \cdot z \wedge z \neq 0) \to x = y$.
    c) $x \cdot y = 0 \to (x = 0 \vee y = 0)$.
    d) $\forall y \in \mathbb{R}(x + y = y) \to x = 0$.
    e) $\forall y \in \mathbb{R}(x \cdot y = y) \to x = 1$.
    f) $(x + y = 0 \wedge x + z = 0) \to y = z$.
    g) $(x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \to y = z$.
    h) $x \cdot 0 = 0$.

2. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales usando los axiomas, propiedades demostradas y definiciones:

    a) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.
    b) $-(-x) = x$.
    c) $-(x - y) = (-x) + y$.
    d) $(-1)x = -x$.
    e) $x^2 = 0 \to x = 0$.
    f) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.
    g) $(-x)(-y) = xy$.
    h) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
    i) $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.
    j) $x^2 = y^2 \to (x = y \vee x = -y)$.

3. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales usando las propiedades de campo, los axiomas de orden y las definiciones.

    a) $\neg(x < x)$.
    b) $\neg(x < y) \leftrightarrow x \geq y$.
    c) $x > 0 \leftrightarrow (-x) < 0$.
    d) $(x > 0 \wedge y > 0) \to x + y > 0$.
    e) $(x < y \wedge z < u) \to x + z < y + u$.
    f) $x > y \leftrightarrow x - y > 0$.
    g) $(x > 0 \wedge y > 0) \to x\cdot > 0$.
    h) $1 > 0$.
    i) $x > 0 \to \dfrac{1}{x} > 0$.
    j) $x^2 \geq 0$.
    k) $(x < y \wedge z < 0) \to (xz > yz)$.
    l) $(x > 0 \wedge x < y) \to \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
    ll) $x < y \to < \dfrac{x + y}{2} < y$.
    m) $x - 1 < x < x + 1$.
    n) $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
    o) $(x > 0 \wedge y > 0) \to x + y \geq 2\sqrt{xy}$.
    p) $(x > y > 0 \wedge u > z > 0) \to xu > yz$.
    q) $(x > 0 \wedge y > 0) \to$ $(x < y \leftrightarrow x^2 < y^2)$.
    r) $x > 0 \to x + y > y$.
    s) $x < 0 \to x + y < y$.
    t) $x > 1 \to (x^2 > x)$.
    u) $0 < x < 1 \to (x^2 < x)$.
    v) $x < 0 \to (x^2 > 0 > x)$.
    w) $(x < y < z < u) \to (x < u)$.
    x) $(x \leq y \leq x) \to x = y$.

4. Demuestre las siguientes propiedades del valor absoluto de números reales, usando las propiedades de campo ordenado y las definiciones:

    a) $|x| \geq 0$.
    b) $|x| \geq x$.
    c) $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$.

d) $y > 0 \to (|x| = y \ \leftrightarrow \ (x = y \vee x = -y))$.

e) $y > 0 \to (|x| < y \ \leftrightarrow \ (-y < x < y))$.

f) $y > 0 \to (|x| > y \ \leftrightarrow \ (x > y \vee x < -y))$.

g) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

h) $y \neq 0 \to \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

i) $|-x| = |x|$.

j) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

k) $xy > 0 \to |x + y| = |x| + |y|$.

l) $|x| - |y| \geq |x - y|$.

m) $|x| = |y| \ \leftrightarrow \ (x = y \vee x = -y)$.

n) $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

5. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales positivos:

a) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

b) $(a < b \wedge c > d) \to \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{d}$.

c) $(a > 1 \wedge b > 1) \to ab + 1 > a + b$.

d) $(a > 1 \wedge b > 1) \to 2(ab+1) > (a+1)(b+1)$.

e) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

f) $a^3b + ab^3 \leq a^4 + b^4$.

g) $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(h) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

6. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales positivos:

a) $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$.

b) $(a^2 + b^2 + c^2) \geq (bc + ca + ab)$.

c) $(b + c)(c + a)(a + b) \geq 8abc$.

7. Efectúe las siguientes operaciones de conjuntos de números reales y grafique el resultado.

a) $(\mathbb{R} - \{2\}) - \{3\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} : x > 3 \vee x < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 7\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge x \neq 2\} \cup \{1\}$.

d) $\left(\{1\} \cup]0, 1[\right) \ \cap \ \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$.

e) $\left([-1, 5] \ \cap \ \mathbb{R}^+\right) - \left(]-2, 1[\ \cap \ \mathbb{R}^+\right)$.

f) $[-1, 5[\ \cup \ [-2, 3[\ \cup \ [-3, 2[$.

g) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 1 \wedge x \geq 3)\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \ (x < 0 \wedge x \geq -5) \vee (x \leq -1)\}$.

8. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$.

a) $|x^2 - 5x + 1| = 2$.

b) $|x^2 + 1| = |2x|$.

c) $|x + 2| + |5 - x| = 0$.

d) $|x - 2| = -(x^2 + 1)$.

9. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$.

a) $x - |x| > 2$.

b) $|x + 3| \geq 2$.

c) $|x - 4| > x - 2$.

d) $|x + 2| > |3 - x|$.

e) $|x - 7| < 5 < |5x - 25|$.

10. Resuelva las siguientes inecuaciones cuadráticas en $\mathbb{R}$

(a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

(b) $x^2 + \dfrac{3}{4}x > 0$

(c) $2x^2 - 8x + 15 \leq 0$

(d) $x^2 - 4x < 0$

(e) $x^2 - \dfrac{1}{4} \leq 0$

(f) $x^2 + 4 < 0$

11. Resuelva los siguientes problemas:

(a) Encuentre las dimensiones que puede tener una cancha, si no debe pasar de 88 metros de superficie y su largo debe ser tres metros más que su ancho.

(b) Encuentre el valor que pueden tener dos múltiplos consecutivos de siete, si su producto debe ser mayor que 294.

c) Una editorial publica un total de no más de 100 títulos cada año. Por lo menos 20 de ellos no son de ficción, pero la casa editorial siempre publica por lo menos tanta ficción como no ficción. Encuentre un sistema de desigualdades que represente las cantidades posibles de libros de ficción y de no ficción que la editorial puede producir cada año de acuerdo con estas políticas. Grafique el conjunto solución.

d) Un hombre y su hija fabrican mesas y sillas sin acabado. Cada mesa requiere de 3 horas de aserrado y 1 hora de ensamble. Cada silla requiere de 2 horas de aserrado y 2 horas de ensamble. Entre los dos pueden trabajar aserrando hasta 12 horas y ensamblando 8 horas todos los días. Formule un sistema de desigualdades que describa todas las combinaciones posibles de mesas y sillas que pueden fabricar cada día. Grafique el conjunto solución.

e) Un fabricante de alimento para gatos utiliza subproductos de pescado y carne de res. El pescado contiene 12 gramos de proteína y 3 gramos de grasa por cada 30 gramos.La carne de res contiene 6 gramos de proteína y 9 gramos de grasa por cada 30 gramos. Cada lata de alimento para gato debe contener por lo menos 60 gramos de proteína y 45 gramos de grasa. Plantee un sistema de desigualdades que describa el número posible de gramos de pescado y carne de res que se pueden usar en cada lata para cumplir con estas condiciones mínimas. Grafique el conjunto solución.

12. Encuentre los valores de $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}(rx^2 - r(r-1)x + 2r < 0).$$

13. ¿Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$, la ecuación $(1-r)x^2 + x + (1-r) = 0$ tiene sus soluciones reales e iguales?.

14. ¿Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\forall x \in \mathbb{R}((r-1)x^2 + 2(r-3)x + r > 3)?$$

15. Determine los valores de $r \in \mathbb{R}$ de modo que el número 3 esté, entre las raíces de la ecuación

$$4x^2 - (r+1)x + 2 - r = 0$$

16. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 6} < 3.$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 3} < 0.$

c) $\dfrac{x^2 - 6x + 7}{x - 2} < 0.$

d) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} > \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}.$

e) $x(x^4 - 7x^2 + 12) > 0.$

f) $1 + \dfrac{6}{x^2 + 3x + 2} > \dfrac{6}{x + 2}.$

g) $\dfrac{2x - 25}{x^2 + 2x - 3} + \dfrac{2x + 11}{x^2 - 1} > \dfrac{2}{x + 3}.$

h) $\dfrac{x^4 - 49x + 96}{x^2 - 7x + 12} > 7.$

i) $|x^2 - x| + x > 1.$

j) $\left|\dfrac{x+2}{3-x}\right| < 1.$

k) $\left|\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4}\right| < 1.$

l) $\left|\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x + 6}\right| > \dfrac{1}{5}.$

ll) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}.$

m) $|3x+2| \leq |x+1| + |2x+1|.$

n) $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$

o) $8x - 3 < \sqrt{(x-6)(x-9)}.$

p) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} < 3.$

q) $\sqrt{x^2+51} - \sqrt{(x-5)(x-7)} > 4.$

r) $\sqrt{(x-2)} - \sqrt{(x-6)} < 8.$

17. Determine cuál de las siguientes expresiones es mayor:

$$(x^3 + 1) \text{ o } (x^2 + x)\,.$$

18. De todos los triángulos de perímetro constante $2s$, determine el de mayor área.

19. De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa c, determine el de área máxima.

20. Determine los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ del trimonio $ax^2 + bx + c$ para que él se anule en $x = 8$ y tenga un máximo igual a 12 en $x = 6$.