

Su alcuni rapporti tra matematica e scale musicali

Stefano Isola

Scuola di Scienze e Tecnologie
Università di Camerino

1 Introduzione

L'uso di strumenti concettuali caratteristici delle scienze esatte per la modellizzazione di fenomeni acustico-musicali ha una storia molto lunga, risalente per lo meno alla *Sectio Canonis* di Euclide [14], dove alcuni aspetti del programma filosofico dei primi Pitagorici [8] vengono riformulati in uno schema coerente di divisione dell'ottava per mezzo della teoria delle proporzioni esposta negli *Elementi*, allo scopo di produrre schemi di intervalli consonanti adottabili nell'accordatura degli strumenti musicali. L'opera si apre affermando la relazione di proporzionalità sussistente tra l'altezza dei suoni e la velocità delle vibrazioni che li producono, un passo concettuale che secondo alcune fonti era stato compiuto dal tarantino Archita, contemporaneo di Platone. Sempre ad Archita è attribuita una dimostrazione della terza proposizione, nella quale si afferma che poiché nessuna radice di 2 è esprimibile con una frazione, nessun medio proporzionale può essere inserito tra 1 e 2, e dunque non è possibile suddividere l'ottava in intervalli uguali che formino rapporti razionali con l'ottava stessa. Com'è noto, l'approccio 'pitagorico' è stato oggetto di controversie protrattesi per oltre due millenni, intrecciandosi in vario modo con la vicenda della progressiva affermazione nella pratica musicale occidentale di quella particolare 'stilizzazione' dell'alfabeto musicale nota come *temperamento equabile*.

In questo lavoro, dopo aver introdotto alcuni elementi basilari per una rappresentazione razionale dei principali sistemi di accordatura, discuteremo alcuni aspetti più astratti del rapporto tra matematica e teoria musicale alla luce di un recente risveglio d'interesse per la modellizzazione matematica di fenomeni acustico-musicali, in particolare nella ricerca di principi strutturali, e in certa misura universali, nella formazione delle scale musicali, ricerca che mette insieme strumenti concettuali di teoria dei numeri, teoria dei gruppi, sistemi dinamici e combinatoria sulle parole, e che negli ultimi decenni ha prodotto interessanti risultati e una consistente letteratura (vedi ad esempio [1], [5], [16] [21], [23]). In questa prospettiva, adotteremo un punto di vista critico riguardo all'utilizzo di strumenti matematici 'universalizzati' in un contesto caratterizzato da un numero limitato di elementi percettibili distinti. Cerchiamo di chiarire questo punto. Innanzitutto, per formulare matematicamente la nozione di *intervallo* tra due note con frequenze a e b , si parte dal fatto che se a e b dipendono dalla scelta dell'unità di frequenza, il loro rapporto a/b no. Così, ad esempio, dire che l'intervallo tra a e b è un'ottava, significa che $a/b = 2$; dire che è una *quarta pura* significa che $a/b = 4/3$, mentre un *quinta pura* corrisponde a $a/b = 3/2$. Questi sono i

principali intervalli di riferimento considerati nella tradizione ‘pitagorica’. Diversamente, dire che l’intervallo tra a e b è una *quinta temperata* significa che $a/b = 2^{\frac{7}{12}}$, un numero irrazionale. D’altra parte, se consideriamo gli intervalli come grandezze additive, la quinta pura corrisponde al numero $\log_2(3/2)$, che è irrazionale, mentre la quinta temperata corrisponde a $7/12$ di ottava, un numero razionale. Dal punto di vista puramente aritmetico non possiamo dunque dire che una quinta o l’altra sia irrazionale, ma solo che lo è il loro rapporto. Ora, se quest’affermazione ha perfettamente senso ove vi sia la possibilità di operare in un insieme infinito di numeri reali, non ne ha alcuno dal punto di vista prettamente musicale, dove i meccanismi percettivi non possono accedere che a un numero finito di intervalli distinti. Come vedremo, l’intervallo musicale di quinta può essere rappresentato da enti teorici distinti, potremmo dire da distinte ‘razionalità’: da una parte una quinta pura, pari al rapporto razionale di frequenze $3/2$, dall’altra una serie di ‘quinte temperate’, corrispondenti a frazioni dell’ottava individuate dai convergenti di $\log_2(3/2)$, ovvero $3/5$, $7/12$, $31/53$, ...

Ciascuna di esse è in grado di determinare un particolare schema di accordatura, ma la prima e le seconde non possono essere messe in relazione tra loro se non all’interno di uno schema teorico più ‘grande’, come l’albero di Stern-Brocot che discuteremo più avanti, il quale comprende elementi che non corrispondono ad alcunchè di percepibile. In particolare, ciò rafforza l’idea che la percezione musicale di un intervallo o di un altro non è una questione di precisione numerica, ma sembra piuttosto legata alla capacità di distinguere un dato elemento entro un insieme predefinito e strutturato da certe simmetrie. Un tema che occupa da millenni la teoria musicale è appunto quello di organizzare l’insieme dei suoni utilizzati in modo da formare un sistema di note, chiamato *scala musicale*, adottabile nella pratica. Generalmente, si adotta l’intervallo di ottava (*diapason*) come lo ‘spazio’ entro il quale va organizzato l’intero sistema delle note di una scala, cosicché scale diverse corrispondono a diverse partizioni di questo intervallo di riferimento. A questo punto lo studio delle scale può essere caratterizzato da due componenti basilari, interdipendenti ma distinte, che possiamo chiamare rispettivamente *costitutiva* e *strutturale*. La prima consiste nella selezione di un insieme di intervalli fondamentali per mezzo dei quali generare tutti gli altri. La seconda consiste nella particolare disposizione di questi intervalli fondamentali all’interno della scala stessa.

2 La scala pitagorica

Nella cosiddetta scala pitagorica, oltre all’ottava $2/1$, vi è un solo intervallo fondamentale, la quinta pura $3/2$. Osservando che $3/2 = (2/1)/(4/3)$, le sue note si possono ottenere applicando ripetutamente le due regole seguenti: moltiplicare per $3/2$ = salire di una quinta; dividere per $4/3$ = scendere di una quarta. Applicando in successione questa coppia di regole a partire da *Do*, si giunge alla *scala maggiore diatonica* di sette note riportata nel seguente schema:

<i>Do</i>	<i>Re</i>	<i>Mi</i>	<i>Fa</i>	<i>Sol</i>	<i>La</i>	<i>Si</i>	<i>Do</i>
1/1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2/1

Vediamo che la *struttura* della scala diatonica così ottenuta è caratterizzata dalla seguente sequenza

di intervalli tra note successive¹: $T - T - S - T - T - T - S$, dove $T = 9/8$ è detto *tono intero*; $S = 256/243$ è detto *semitono diatonico pitagorico*.

Già Archita nel IV sec. a.C. aveva dimostrato che gli intervalli della forma $(n+1)/n$, in particolare il tono intero $9/8$, non si possono dividere in due intervalli uguali per mezzo di numeri razionali. Così, un semitono diatonico S non è proprio la metà di un tono T , ma quasi. Il complementare S' di S in T (ovvero $S' + S = T$) si chiama *semitono cromatico pitagorico*, $S' = (9/8)/(256/243) = 2187/2048$, e il sistema pitagorico si basa sul fatto che la differenza tra semitono diatonico e semitono cromatico è molto piccola (poco più di un nono di tono):

$$\frac{2187/2048}{256/243} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1,0136432647705...$$

Tale differenza è detta *comma pitagorico*. Per cogliere il suo significato possiamo procedere così. Se poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k r_n, \quad 1 \leq r_n < 2, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

è facile rendersi conto che partendo da $z_0 = 1$, cioè dal *Do* centrale, e variando n , il fattore r_n rappresenta la nota ottenuta applicando la combinazione delle due regole pitagoriche n volte e poi riportando la nota all'ottava iniziale applicando la prima regola un numero k di volte, pari al numero di ottave di cui siamo allontanati da quella iniziale. Ad esempio per $n = -4, -3, -2, \dots, 6, 7, 8$ si trovano i valori di r_n :

$$\begin{aligned} \frac{128}{81} La \flat &\rightarrow \frac{32}{27} Mi \flat \rightarrow \frac{16}{9} Si \flat \rightarrow \frac{4}{3} Fa \rightarrow \frac{1}{1} Do \rightarrow \frac{3}{2} Sol \rightarrow \frac{9}{8} Re \\ &\rightarrow \frac{27}{16} La \rightarrow \frac{81}{64} Mi \rightarrow \frac{243}{128} Si \rightarrow \frac{729}{512} Fa \sharp \rightarrow \frac{2187}{2048} Do \sharp \rightarrow \frac{6561}{4096} Sol \sharp \end{aligned}$$

Osserviamo ora che l'intervallo tra $La \flat$ e $Sol \sharp$ vale precisamente un comma pitagorico:

$$\frac{128/81}{6561/4096} = \frac{531441}{524288}$$

e per questo diremo che $La \flat$ e $Sol \sharp$ formano una *coppia enarmonica*. Infine, non è difficile rendersi conto che il sistema di intervalli risultante dall'applicazione ripetuta delle regole pitagoriche non è chiuso. Prendendo il logaritmo in base due in (1) si ottiene

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2) \quad (2)$$

Se il sistema si chiudesse allora vi sarebbero due numeri interi n_1 e n_2 tali che $n_1 \neq n_2$ e $r_{n_1} = r_{n_2}$. In tal caso avremmo che $n_1\alpha - k_1 = n_2\alpha - k_2$ e quindi $\alpha = (k_1 - k_2)/(n_1 - n_2) \equiv p/q$ cioè α sarebbe un numero razionale. Ma allora si avrebbe $3/2 = 2^{p/q}$ ovvero $3^q = 2^{p-q}$. D'altra parte il primo termine è sempre dispari mentre il secondo è sempre pari. In particolare α è irrazionale.

¹La scala diatonica, caratterizzata da cinque toni e due semitoni, prende il nome da uno dei tre generi della musica greca antica: diatonico, enarmonico e cromatico, che erano le tre forme con cui si potevano manifestare i diversi modi, o armonie, della musica ellenica (dorico, eolio, misolidio, frigio, ipofrigio, lidio, ipolidio), ciascuno legato ad un *ethos* specifico radicato nella regione di provenienza.

Nota 2.1. Adottando un linguaggio diverso ed osservando che

$$2^i 3^j = 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q, \quad p = i + j, \quad q = j, \quad (3)$$

possiamo riassumere quanto visto fin qui dicendo che la scala pitagorica può essere identificata con $\langle 2, 3 \rangle$, il sottogruppo moltiplicativo di \mathbb{R}_+ generato da 2 e 3. Come vedremo più oltre, il comma pitagorico costituisce in questo sistema una “migliore approssimazione dell’identità”, nel senso che ogni altro elemento > 1 del gruppo, se più vicino all’identità deve avere numeratore più grande. Infine, voler *temperare* la scala pitagorica, identificando le coppie enarmoniche come La^b e Sol^\sharp , sarebbe equivalente a voler imporre la *relazione* $2^{-19}3^{12} \equiv 1$ nel gruppo abeliano libero $\langle 2, 3 \rangle$.

Nota 2.2. In termini di trasformazione di un oggetto geometrico, la scala pitagorica può essere generata iterando una rotazione irrazionale. Se $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è il cerchio unitario, $\alpha \in (0, 1)$ e $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ la rotazione $R_\alpha(x) := x + \alpha \pmod{1}$, allora la (2) può allora essere riscritta nella forma

$$\log_2 r_n = R_\alpha^n(0) \equiv \{n\alpha\} \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

dove $\{x\} = x \pmod{1}$. Com’è noto, la sequenza $\{n\alpha\}$ è uniformemente distribuita su S^1 e la struttura degli intervalli generati dall’iterazione di una rotazione irrazionale è descritta dal cosiddetto *teorema delle tre distanze* [26], il quale afferma che, se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la sequenza $\{n\alpha\}$ con $0 \leq n < N$ partiziona il cerchio unitario in N intervalli le cui lunghezze assumono al più tre valori, uno dei quali uguale alla somma degli altri due. In questo caso, prendendo $N = 7$, si trovano due lunghezze possibili: quella corrispondente al tono T, cioè $\ell_1 = \log_2 9 - \log_2 8 = 2\alpha - 1$ e quella corrispondente al semitono diatonico S, cioè $\ell_2 = \log_2(256) - \log_2(243) = 3 - 5\alpha$. Aumentando N , compaiono progressivamente altre lunghezze, la prima delle quali è proprio quella corrispondente al semitono cromatico S' , ovvero $\ell_3 = \ell_1 - \ell_2 = \log_2(2187) - \log_2(2048) = 7\alpha - 4$. Riprenderemo questo aspetto più avanti.

3 La scala naturale di Zarlino

Il sistema pitagorico rimase in uso fino al basso Medioevo, soddisfacendo le esigenze della composizione monodica e della prima polifonia medievale, in cui le voci parallele procedevano nota contro nota ad intervalli di quarta o di quinta. Successivamente si affermò un uso sempre più frequente degli intervalli di terza e sesta, che nella scala pitagorica risultano poco consonanti. Nel XVI secolo il teorico musicale Gioseffo Zarlino (1517-1590), riprendendo idee più antiche, propose la costruzione di un sistema di accordatura che includesse anche il rapporto di *terza maggiore* $5/4$ come intervallo fondamentale. Zarlino ottenne tale sistema estendendo l’insieme dei numeri interi per mezzo dei quali costruire gli intervalli consonanti dal *quaternario* pitagorico $\{1, 2, 3, 4\}$ al *senario* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ma la scala che ne risulta ha preso poi anche il nome di *scala naturale* perchè può essere ottenuta prendendo un certo numero di *armonici*:

$$\nu, \quad 2\nu, \quad 3\nu, \quad 4\nu, \quad 5\nu, \quad 6\nu, \quad 7\nu \dots$$

di un suono fondamentale di frequenza ν e riportandoli all'ottava di partenza. In questo modo si ottengono ad esempio i rapporti

$1/1$ per la prima, seconda, quarta, \dots , 2^k -esima armonica

$3/2$ per la terza, sesta, dodicesima, \dots , $3 \cdot 2^k$ -esima armonica

$5/4$ per la quinta, decima, \dots , $5 \cdot 2^k$ -esima armonica

$7/4$ per la settima, quattordicesima, \dots , $7 \cdot 2^k$ -esima armonica

e così via. L'estensione zarliniana si ottiene dunque considerando le prime tre serie (invece che soltanto le prime due, come nel sistema pitagorico). Identifichiamo poi la *terza minore* con il rapporto $6/5$, la *sesta maggiore* con $5/3$ e la *sesta minore* con $8/5$, osservando che $(5/4) \cdot (6/5) = 3/2$ (terza maggiore + terza minore = quinta pura), e $(5/3) \cdot (6/5) = (8/5) \cdot (5/4) = 2/1$ (sesta maggiore + terza minore = sesta minore + terza maggiore = ottava). Gli intervalli tra note successive lungo la scala diatonica così ottenuta sono riportati nella tabella seguente, che riporta anche quelli della scala pitagorica per confronto.

Nota	<i>Do</i>	<i>Re</i>	<i>Mi</i>	<i>Fa</i>	<i>Sol</i>	<i>La</i>	<i>Si</i>	<i>Do</i>
Scala pitagorica	1/1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2/1
Scala di Zarlino	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

Vi sono ora *due* tipi di tono intero e un tipo di semitono: *tono maggiore* $T = 9/8$, *tono minore* $T' = 10/9$, *semitono diatonico naturale* $S' = 16/15$, alternati come $T - T' - S' - T - T' - T - S'$. Inoltre, confrontando la scala pitagorica con quella naturale zarliniana, troviamo una discrepanza comune a tutti gli intervalli modificati:

$$\frac{81}{64} / \frac{5}{4} = \frac{27}{16} / \frac{5}{3} = \frac{243}{128} / \frac{15}{8} = \frac{81}{80}$$

Tale discrepanza, detta *comma sintonico*, si osserva anche internamente alla scala naturale, confrontando ad esempio l'intervallo $[Do, Sol]$, che vale $3/2$, con l'intervallo $[Re, La]$, che vale $40/27$.

4 Scale naturali e temperamenti

Abbiamo già osservato più sopra (cf. Nota 2.1) che la scala pitagorica può essere identificata con $P_2 = \langle 2, 3 \rangle$, il sottogruppo abeliano libero di \mathbb{R}_+ generato dai primi due numeri primi. In modo analogo, se osserviamo che

$$2^i 3^j 5^k = 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r, \quad p = i + j + 2k, \quad q = j, \quad r = k \quad (4)$$

la scala naturale zarliniana può essere identificata con $P_3 = \langle 2, 3, 5 \rangle$. Se poi indichiamo con P_n il gruppo abeliano libero di \mathbb{R}_+ generato dai primi n numeri primi, è evidente che P_n è un sottogruppo di P_{n+1} . Posto $P_1 = \langle 2 \rangle$ si ha dunque $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots$.

Ora, ogni numero razionale si può esprimere nella forma $2^i 3^j 5^l 7^m \dots$ con $i, j, l, m \in \mathbb{Z}$. Ad esempio $2^{-2} 5^1$ rappresenta una terza maggiore, e $2^8 3^{-5}$ un semitono diatonico pitagorico. Così, dal momento che le scale naturali possono essere definite come quelle in cui tutti gli intervalli sono espressi da numeri razionali (che devono contenere il numero 2), possiamo dare la seguente

Definizione 4.1. Se p è un numero primo, una *scala naturale di ordine p* è una scala che usa solo numeri razionali il cui numeratore e denominatore si fattorizzano per mezzo di numeri primi minori o uguali a p (eventualmente ripetuti). Tale scala è identificabile con il gruppo P_n (di rango n) con $p = n$ -esimo numero primo.

Concentriamoci ora sulla scala naturale di ordine 5 identificata con il gruppo P_3 . Si vede facilmente (usando (4) e l'unicità della fattorizzazione degli interi) che la mappa

$$\phi : 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \in P_3 \longleftrightarrow (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \quad (5)$$

stabilisce un isomorfismo tra P_3 e il gruppo \mathbb{Z}^3 . D'altra parte, se ci limitiamo a considerare solo gli intervalli di P_3 ristretti all'ottava $[1, 2)$, possiamo costruire una proiezione $\pi : P_3 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ data da

$$\pi : 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \rightarrow (q, r)$$

che suddivide P_3 in classi di equivalenza costituite dagli stessi intervalli trasposti su tutte le ottave, ciascuna delle quali ha un rappresentante in $[1, 2)$. Ad esempio gli intervalli $5/4, 10/4, 5/8, 5/1$ stanno tutti nella stessa classe di equivalenza, e il loro rappresentante in $[1, 2)$ è $5/4$. Tale proiezione soddisfa $\pi(1) = (0, 0)$, $\pi(x^{-1}) = -\pi(x)$ e $\pi(xy) = \pi(x) + \pi(y)$, $\forall x, y \in P_3$, ed è dunque un omomorfismo di gruppi il cui nucleo è P_1 . Una porzione del gruppo quoziente $P_3/P_1 = \{xP_1 : x \in P_3\}$, isomorfo a \mathbb{Z}^2 , è mostrata nel seguente schema, dove nella riga orizzontale centrale si possono facilmente individuare gli elementi della scala pitagorica, mentre, ad esempio, la scala diatonica naturale si può individuare tra gli elementi centrali della prima e della seconda riga.

				$\uparrow r$						
		25/18	25/24	25/16	75/64	225/128	675/512			
	40/27	10/9	5/3	5/4	15/8	45/32	135/128	405/256		
128/81	32/27	16/9	4/3	1/1	3/2	9/8	27/16	81/64	243/128	$\rightarrow q$
	256/135	64/45	16/15	8/5	6/5	9/5	27/20	81/80		
		265/225	128/75	32/25	48/25	36/25	27/25			

Più in generale, ogni scala naturale di ordine 5 può essere individuata come un sottoinsieme di P_3/P_1 . In particolare, la scala cromatica naturale discussa in precedenza è esattamente contenuta nel rettangolo di vertici $25/24, 4/3, 9/8$ e $225/128$. Per ulteriori considerazioni su questa costruzione e varianti che utilizzano diversi generatori rimandiamo a [19].

L'unicità della fattorizzazione degli interi implica che P_n è un gruppo libero per ogni n e la scala corrispondente non può essere un sottogruppo discreto di \mathbb{R}_+ . Così, come il sistema pitagorico, anche la scala naturale zarliniana non forma un sistema chiuso, e le frazioni che compaiono nella rappresentazione riportata sopra sono tutte distinte. Se ad esempio, partendo da $Si \flat (16/9)$, ci muoviamo quattro passi verso destra, passando per $Fa (4/3)$, $Do (1/1)$, $Sol (3/2)$ e arrivando al $Re (9/8)$, e poi uno verso il basso (4 quinte - 2 ottave - 1 terza maggiore) arriviamo ad un $Si \flat (9/5)$, che è più grande di quello di partenza di un comma sintonico $81/80$.

In generale, possiamo dire che nell'ambito delle scale naturali i rapporti tra le frequenze all'interno dell'ottava non si possono fissare una volta per tutte senza creare leggere distorsioni, in modo analogo a come non è generalmente possibile schiacciare in maniera perfetta una superficie curva su un piano, e quindi occorre decidere che cosa conservare più fedelmente e cosa meno. Ciò dà origine appunto all'esistenza di microintervalli, detti *comma* e di loro combinazioni dette *scisma*, caratteristici di ciascun tipo di accordatura. Ad esempio, l'esistenza del comma sintonico fa sì che uno strumento ad intonazione fissa accordato secondo la scala naturale di Do suona bene solo nella tonalità di Do . Per cambiare la tonica (modulazione) bisogna cambiare strumento, o riaccordarlo. *Temperare* uno o più di questi microintervalli significa costruire sistemi di note in cui essi spariscono [4]. Diversi possibili temperamenti sono stati elaborati ed utilizzati nella storia della musica, come ad esempio i *temperamenti irregolari*, in uso ai tempi di Bach [5], o come il *temperamento mesotonico*, introdotto dallo stesso Zarlino per temperare il comma sintonico, in cui si mantiene fisso il rapporto $5/4$ per le terze maggiori e i restanti intervalli si interpolano rendendoli più omogenei possibile. Ne risulta una scala con cinque toni ($\sqrt{5}/2$) e due semitoni ($8/5^{5/4}$). L'intervallo di quinta diviene $5^{1/4}$, abbassandosi di un quarto di comma sintonico [5].

5 Il temperamento equabile

Il temperamento equabile è il sistema per la costruzione della scala basato sulla suddivisione dell'ottava in intervalli uguali, con l'evidente vantaggio di ricondurre in sol colpo l'alfabeto musicale a un sistema chiuso. Già descritto da Aristosseno, il più importante musicologo dell'antichità, come parte di uno schema di divisione dell'ottava alternativo a quello pitagorico [3], questo sistema fu ripreso nel XVI secolo da vari autori, tra cui il padre di Galileo, il teorico musicale e liutista Vincenzo Galilei (1525-1591), il filosofo e matematico veneziano Giovanni Battista Benedetti (1530-1590), il matematico fiammingo Simon Stevin (1548-1620). Tuttavia la sua adozione è stata molto graduale, sia per obiezioni di natura estetica e concettuale che continuano ancora oggi ad alimentare controversie, sia a causa delle difficoltà nell'accordatura degli strumenti (per mancanza di intervalli giusti di riferimento). Una storia dell'affermazione del temperamento equabile nella musica occidentale è narrata in [20].

Dividendo ad esempio l'ottava in dodici semitoni uguali, l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

$$a^{12} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{1/12}$$

e dunque a è ora un numero irrazionale. Poiché $2^{1/12} \simeq 1,059$, un semitono equabile è appena più grande del semitono pitagorico $256/243 \simeq 1,053$. Il tono $2^{2/12} \simeq 1,122$ è invece più piccolo di quello naturale $9/8 \simeq 1,125$. Tuttavia, al contrario di quello, si può dividere in due parti

esattamente uguali. Anche la quinta $2^{7/12} \simeq 1,498$ è un po' più piccola di $3/2$. È evidente che in questo temperamento il vantaggio di avere un'approssimazione costante si paga con il fatto che nessun intervallo si accorda con gli armonici. In generale, il problema risolto dal temperamento equabile, oltre a quello di determinare una limitazione artificiale dell'infinità dei suoni producibili, è quello di fare in modo che le scale risultino il più consonanti possibile su tutte le tonalità. Essendo l'intervallo di quinta pura il più consonante (dopo l'ottava), si cerca di dividere l'immagine logaritmica di un'ottava in un numero di parti uguali in modo tale che il numero irrazionale

$$\log_2(3/2) = 0,584962500721 \dots$$

sia ben approssimato. Apriamo ora una breve parentesi.

5.1 Frazioni continue

Lo sviluppo in *frazione continua* di un numero $x \in \mathbb{R}_+$ è un'espressione del tipo

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] \quad (6)$$

dove i numeri interi (non negativi) a_i si chiamano *quozienti parziali*, e sono tutti strettamente positivi ad eccezione di $a_0 = [x]$ che è nullo se $0 \leq x < 1$. I successivi quozienti parziali possono essere calcolati con un semplice algoritmo derivato da quello euclideo per il calcolo del m.c.d. Se invece x è irrazionale allora lo sviluppo è infinito. In questo caso, le approssimazioni razionali

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n] \quad , \quad n \geq 0,$$

ottenute troncando lo sviluppo in frazione continua si chiamano *convergenti*, e soddisfano la formula ricorsiva [17]: $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, $n \geq 0$, con $p_{-2} = q_{-1} = 0$ e $p_{-1} = q_{-2} = 1$. Una conseguenza immediata è l'espressione

$$x = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{r} \right] = \frac{r p_n + p_{n-1}}{r q_n + q_{n-1}} \quad , \quad n \geq 1 \quad (7)$$

per ogni $a_{n+1} \leq r < a_{n+1} + 1$, da cui si può ricavare la stima:

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < (-1)^n \left(x - \frac{p_n}{q_n} \right) < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad , \quad n \geq 1 \quad (8)$$

Tornando al temperamento equabile, lo sviluppo in frazione continua dell'ampiezza logaritmica dell'intervallo di quinta inizia con

$$\log_2(3/2) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \dots]$$

e i suoi primi convergenti sono

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{24}{41}, \quad \frac{31}{53}, \quad \frac{179}{306}, \quad \frac{389}{665}, \quad \frac{9126}{15601}, \quad \dots \quad (9)$$

Ciascuna di queste approssimazioni razionali può essere usata per dividere l'ottava in intervalli elementari uguali, in numero pari al suo denominatore, in modo che l'intervallo di quinta corrisponda ad un numero di tali intervalli uguale al suo numeratore. Così, ad esempio, l'approssimazione $3/5$ divide l'ottava in 5 intervalli uguali e 3 di essi corrispondono a una quinta (scala pentatonica), mentre l'approssimazione $7/12$ divide l'ottava in 12 intervalli uguali (semitoni) e 7 di essi corrispondono a una quinta.

5.2 Approssimazioni multiple e circolo delle quinte

Tornando alla scala equabile di 12 note, che ne è delle altre consonanze? Gli intervalli considerati più consonanti visti finora (unisono, terza minore, terza maggiore, quarta pura, quinta pura, sesta minore, sesta maggiore, ottava) formano la sequenza

$$\frac{1}{1} < \frac{6}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1}$$

e soddisfano

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2, \quad \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$$

dunque i logaritmi binari di questi intervalli sono combinazioni lineari di 1, $\log_2(3/2)$ e $\log_2(5/4)$ con coefficienti $\{0, 1, -1\}$, e l'errore nell'approssimazione con la scala uniforme non supera il massimo tra gli errori per $\log_2(3/2)$ e $\log_2(5/4)$. D'altra parte si ha

$$\log_2(5/4) = 0,3219280\dots = [0; 3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 18, \dots]$$

e i suoi convergenti sono

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{9}{28}, \quad \frac{19}{59}, \quad \frac{47}{146}, \quad \frac{207}{643}, \quad \frac{1289}{4004}, \quad \frac{2785}{8651}, \quad \dots \quad (10)$$

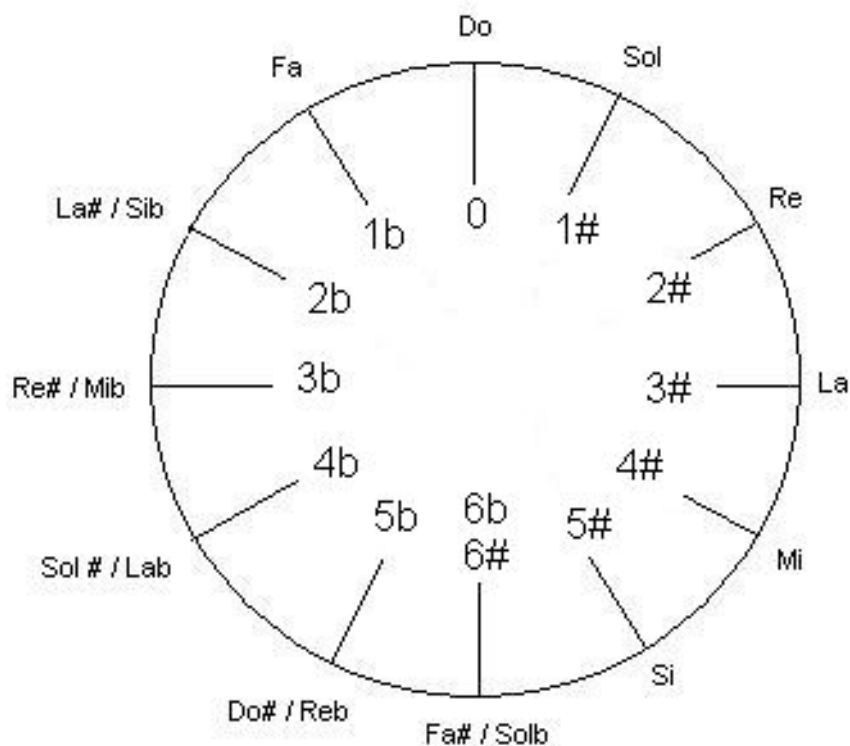
Pertanto si possono approssimare simultaneamente $\log_2(3/2)$ e $\log_2(5/4)$ con lo stesso denominatore:

$$\log_2(3/2) \simeq \frac{7}{12} \quad \text{e} \quad \log_2(5/4) \simeq \frac{4}{12}$$

con un errore più piccolo di

$$\max\{(3 \cdot 28)^{-1}, (12 \cdot 41)^{-1}\} = (3 \cdot 28)^{-1} = 1/84$$

Ciò garantisce che il temperamento equabile di dodici semitoni uguali dia una buona approssimazione razionale simultanea dei due intervalli fondamentali $3/2$ e $5/4$ e dunque dell'intera serie dei sette intervalli consonanti. Il sistema equabile 'tempera' tutti i possibili microintervalli determinando il sistema chiuso di dodici note, detto *circolo delle quinte*, riportato nella figura seguente.



6 Il ciclo armonico con 31 intervalli

Un altro temperamento equabile interessante è quello del *ciclo armonico*, descritto per la prima volta dal compositore Nicola Vicentino (1511-1572) e ripreso da Christiaan Huygens (1629-1695), che consiste nella divisione dell'ottava in 31 parti uguali². In questo sistema, l'intervallo di quinta (corrispondente a 18 di tali parti) è un'eccellente approssimazione della quinta mesotonica, mentre la terza maggiore è molto ben approssimata dalla terza del ciclo, corrispondente a 10 intervalli elementari. Per spiegare queste consonanze ricorriamo ancora una volta alle frazioni continue. Innanzitutto, l'ampiezza logaritmica dell'intervallo mesotonico di quinta $5^{1/4}$ è

$$\frac{1}{4} \log_2(5) = 0,580482024... = [0; 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 7, 78, 2, 13, 5, \dots]$$

e i suoi primi convergenti sono

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{18}{31}, \frac{101}{174}, \frac{119}{205}, \dots$$

²Le varie 'soluzioni' che i problemi posti dalla divisione dell'ottava hanno avuto nel corso della storia hanno prodotto anche interessanti ricadute sul piano della costruzione di particolari strumenti ad intonazione fissa, spesso realizzati più con l'intento di studio delle sonorità che non a fini esecutivi. In relazione al ciclo armonico va segnalato il clavicembalo costruito dal veneziano Vito Trasuntino nel 1606, e ancora visibile nel Museo internazionale e Biblioteca della musica di Bologna, con 31 tasti per ottava.

Da ciò risulta evidente che, oltre alla scala equabile con 12 note, anche quella con 31 note fornisce una naturale, e ovviamente migliore, approssimazione della quinta mesotonica (osserviamo che il denominatore 31 si trova subito prima del denominatore, molto più grande, 174). Abbiamo inoltre detto che la terza maggiore naturale è molto ben approssimata da dieci intervalli elementari del ciclo armonico. D'altra parte, tra i convergenti del logaritmo della terza maggiore naturale $5/4$, mostrati in (10), non compare il denominatore 31. Come spiegare dunque questo accordo? A questo fine occorre introdurre una nuova classe di convergenti.

7 I semiconvergenti

Facendo riferimento alla (7), vediamo che se $x \in \mathbb{R}_+$ ha lo sviluppo $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, allora per ogni $n \geq 1$ vi sono esattamente a_n *semiconvergenti* della forma

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, 1], \quad [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, 2], \quad \dots, \quad [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

In altri termini, per ogni $n \geq 1$ e $1 \leq r \leq a_n$ il semiconvergente di ordine

$$m = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + r \tag{11}$$

è il numero

$$\frac{r_m}{s_m} = \frac{rp_{n-1} + p_{n-2}}{rq_{n-1} + q_{n-2}} \tag{12}$$

L'ultimo dei semiconvergenti è anche un convergente: se $r = a_n$, e dunque $m = \sum_{k=0}^n a_k$ allora $r_m/s_m = p_n/q_n$. Si vede facilmente che r_m/s_m fornisce la migliore approssimazione razionale *unilatera* di x il cui denominatore non superi s_m , nel senso che se $r < a_n$ ci può essere un convergente con denominatore più piccolo e più vicino ad x , ma dall'altra parte di x .

ESEMPIO. Tornando alla scala di 31 toni, i primi cinque convergenti di $\log_2(\frac{5}{4}) = [0; 3, 9, 2, 2, 4, \dots] = 0,321\dots$ sono

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{9}{28}, \quad \frac{19}{59}, \quad \frac{47}{146}, \quad \frac{207}{643}$$

ma entro lo stesso grado di accuratezza vi sono $3 + 9 + 2 + 2 + 4 = 20$ semiconvergenti

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, & \frac{1}{4}, & \frac{2}{7}, & \frac{3}{10}, & \frac{4}{13}, & \frac{5}{16}, & \frac{6}{19}, & \frac{7}{22}, & \frac{8}{25}, & \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{28}}, \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & \frac{10}{31}, & \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{59}}, & \frac{28}{87}, & \frac{\mathbf{47}}{\mathbf{146}}, & \frac{66}{205}, & \frac{113}{351}, & \frac{160}{497}, & \frac{\mathbf{207}}{\mathbf{643}} \end{array}$$

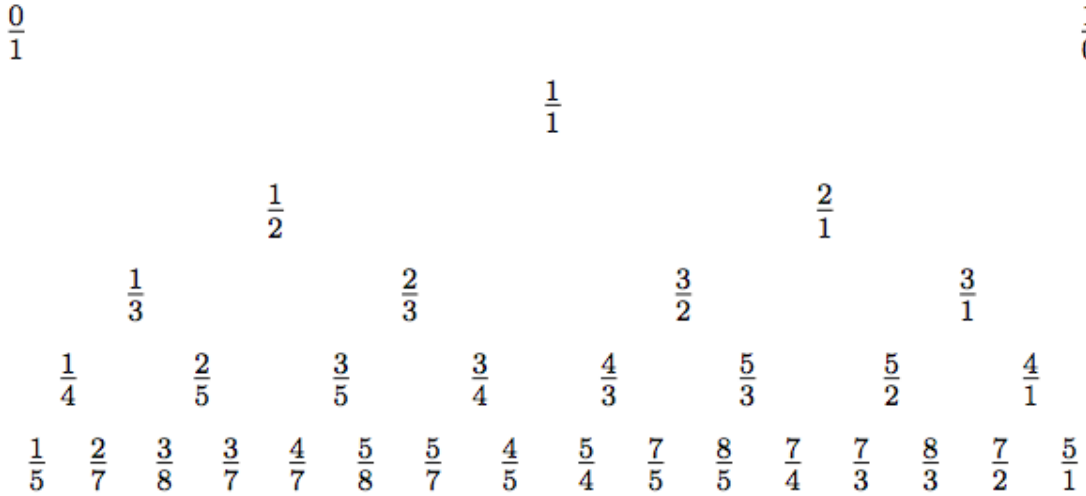
Dal valore $10/31$ del tredicesimo convergente deduciamo infine che la terza maggiore naturale è ben approssimata dalla decima nota della scala di 31 toni.

8 L'albero di Stern-Brocot: cammini, indirizzi, parole

La sequenza dei semiconvergenti può essere riguardata come un cammino su un albero binario \mathcal{A} , detto *albero di Stern-Brocot*³. Si tratta di un modo di ordinare l'insieme dei numeri razionali (positivi) in modo che ogni numero compaia una e una sola volta. L'operazione di base necessaria a costruire l'albero è la *somma di Farey*: dati $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ in \mathbb{Q}_+ poniamo

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'} \quad (13)$$

È facile verificare che il *mediante* $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$ è sempre ridotto ai minimi termini se lo sono i 'genitori' $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$, ed inoltre si trova sempre tra di essi: se $p/q < p'/q'$ allora $p/q < (p+p')/(q+q') < p'/q'$. L'operazione \oplus conserva inoltre la relazione di *unimodularità* $qp' - pq' = 1$. Per mezzo di essa si può costruire l'albero \mathcal{A} una generazione dopo l'altra partendo dagli *antenati* $0/1$ e $1/0$:



Se chiamiamo *profondità* di un elemento di \mathcal{A} la 'generazione' alla quale appartiene (a partire dalla radice $1/1$ che ha profondità uguale a uno), si può mostrare [6] che ogni $p/q \in \mathbb{Q}_+$ compare esattamente una volta in \mathcal{A} e corrisponde ad un unico cammino finito che parte dalla radice $1/1$ e il cui numero $d \geq 1$ di vertici, ovvero la profondità di p/q , soddisfa

$$d = \sum_{i=0}^n a_i \quad (14)$$

dove $p/q = [a_0; a_1, \dots, a_n]$. Viceversa, i 2^{d-1} elementi di \mathcal{A} con profondità $d \geq 1$ sono tutti e soli quei numeri $p/q \in \mathbb{Q}_+$ il cui sviluppo in frazione continua soddisfa (14).

³Perchè scoperto indipendentemente dal matematico tedesco Moritz Stern (1807-1894) [27] e dal costruttore di orologi francese Achille Brocot (1817-1878) [7].

Nota 8.1. Se \mathcal{A}_d denota l'insieme dei $p/q \in \mathbb{Q}_+$ con profondità d , vale la curiosa proprietà

$$\sum_{p/q \in \mathcal{A}_d} 1/pq = 1 \quad (15)$$

Per rendersene conto possiamo ragionare come segue. Chiamiamo le frazioni $p/(p+q)$ e $(p+q)/q$ *discendenti* di p/q . Ora, se $p/q = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ allora $p/(p+q) = [0; 1, a_0, a_1, \dots, a_n]$ e $(p+q)/q = [a_0 + 1; a_1, \dots, a_n]$ e dunque se p/q ha profondità d , i suoi discendenti hanno profondità $d+1$. Ovviamente i discendenti degli elementi di una generazione formano esattamente la generazione successiva. A questo punto si procede per induzione in d . La proprietà cercata è vera per $d=1$. D'altra parte si ha $1/pq = 1/p(p+q) + 1/(p+q)q$, dunque essa si trasmette da una 'generazione' all'altra. Osserviamo infine che se vogliamo risalire da una frazione p/q alla sua *antecedente* p'/q' (ovvero la frazione dalla quale discende) allora se $p > q$ si avrà $q' = q$ e $p' = p - q$; se invece $q > p$ allora $p' = p$ e $q' = q - p$.

8.1 Cammini

Un modo per 'muoversi' lungo i rami dell'albero si ottiene osservando che ogni $x \in \mathbb{Q}_+$ può essere decomposto in modo unico come $x = \frac{m}{s} \oplus \frac{n}{t}$ con $ns - mt = 1$, e dunque le colonne della matrice $X \in SL(2, \mathbb{Z})$ $X = \begin{pmatrix} n & m \\ t & s \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ sono i genitori di x sull'albero di Stern-Brocot in ordine invertito. In questo modo, la radice dell'albero non è altro che la matrice identità: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mentre le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rappresentano le frazioni $1/2$ e $2/1$, rispettivamente. Ora, l'elemento x considerato sopra ha a sua volta un'unica coppia di 'figli' (mediante sinistro e mediante destro), dati rispettivamente da

$$\frac{m}{s} \oplus \frac{m+n}{s+t} \quad \text{e} \quad \frac{m+n}{s+t} \oplus \frac{n}{t}$$

Ma

$$\begin{pmatrix} n & m \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+n & m \\ s+t & s \end{pmatrix} \iff \frac{m}{s} \oplus \frac{m+n}{s+t}$$

e

$$\begin{pmatrix} n & m \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m+n \\ t & s+t \end{pmatrix} \iff \frac{m+n}{s+t} \oplus \frac{n}{t}$$

Quindi le matrici A e B , fatte agire da destra, muovono verso i medianti sinistro e destro, rispettivamente. Se invece applichiamo A e B da sinistra si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & m \\ t & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m \\ n+t & m+s \end{pmatrix} \iff \frac{n+m}{n+m+t+s}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & m \\ t & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+t & m+s \\ t & s \end{pmatrix} \iff \frac{n+m+t+s}{s+t}$$

In questo modo le matrici A e B muovono verso i discendenti sinistro e destro, e vale le seguente

Proposizione 8.1. *Ad ogni $x = [a_0; a_1, \dots, a_n] \in \mathcal{A}$, con profondità $d > 1$, corrisponde un unico elemento $X \in SL(2, \mathbb{Z})$, per il quale vi sono le due possibilità:*

- $n \text{ pari} \implies X = B^{a_0} A^{a_1} \dots A^{a_{n-1}} B^{a_n-1}$
- $n \text{ dispari} \implies X = B^{a_0} A^{a_1} B^{a_2} \dots A^{a_n-1}$

Nota 8.2. Possiamo anche definire la *sequenza di Farey* \mathcal{F}_n , citata nell'Introduzione, come l'insieme delle frazioni $p/q \in \mathbb{Q}_+$ tali che $(p, q) = 1$ e $\max(p, q) \leq n$, ordinate secondo la loro grandezza crescente [15]. Ad esempio,

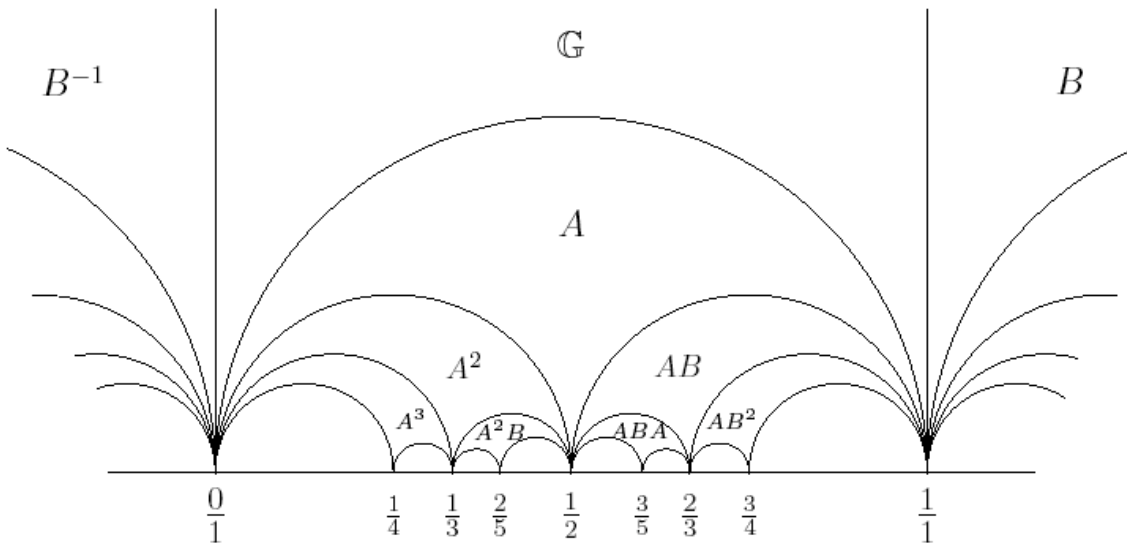
$$\mathcal{F}_5 = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1} \right\} \quad (16)$$

Per ogni coppia p/q e p'/q' di frazioni contigue in \mathcal{F}_n si ha $p'q - pq' = 1$, e inoltre \mathcal{F}_n si ottiene da \mathcal{F}_{n-1} inserendo tra due frazioni contigue la loro somma di Farey $(p + p')/(q + q')$ (posto che $\max\{p + p', q + q'\} \leq n$). Inoltre si ha $|\mathcal{F}_n| + 1 = 2 \sum_{k=1}^n \varphi(k) \sim 6n^2/\pi^2$ dove $\varphi(k) = |\{0 < i \leq k : m.c.d.(i, k) = 1\}|$ è la funzione di Eulero.

Nota 8.3. Vale osservare che i cammini della Proposizione 8.1 sono in corrispondenza biunivoca con le cosiddette *geodetiche di scattering* nel semipiano superiore $\mathbb{H} = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+\}$ (intesa come varietà riemanniana con la metrica iperbolica $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$). In effetti, se consideriamo la tassellazione di \mathbb{H} ottenuta prendendo tutte le immagini del triangolo geodetico

$$\mathbb{G} = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$$

con le isometrie A and B , intese come trasformazioni di Möbius (una porzione della quale è mostrata nella figura seguente). allora ad X associato come sopra ad $x = p/q$ possiamo associare la geodetica verticale $c_{p/q}$ in \mathbb{H} proveniente da ∞ e convergente a p/q , ovvero alla cuspidale centrale di $X(\mathbb{G})$, e viceversa.



8.2 Indirizzi

Abbiamo detto che l'albero \mathcal{A} determina un ordinamento dell'insieme dei numeri razionali positivi, ma quale? L'ordinamento più naturale è quello ottenuto 'leggendo' l'albero come un testo, cioè riga per riga da sinistra a destra, partendo dalla radice. Se indichiamo con e_k il k -esimo numero razionale in questo ordinamento allora si ha

$$e_1 = \frac{1}{1}, \quad e_2 = \frac{1}{2}, \quad e_3 = \frac{2}{1}, \quad e_4 = \frac{1}{3}, \quad e_5 = \frac{2}{3}, \quad e_6 = \frac{3}{2}, \quad e_7 = \frac{3}{1}, \quad e_8 = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Dato $x \in \mathbb{Q}_+$ di profondità d , possiamo mettere in corrispondenza la sua rappresentazione come elemento della successione e_k e il codice binario $\sigma(x)$ che identifica il cammino ad esso associato. Innanzitutto osserviamo che la sequenza simbolica $\sigma(x)$ di $x \in \mathbb{Q}_+$ può essere ottenuta rapidamente basandosi sull'osservazione fatta in precedenza su come costruire la sequenza degli antecedenti di x (cfr. Nota 8.1). Illustriamolo con un esempio. Consideriamo la frazione $75/64$. Il suo sviluppo in frazione continua è $[1; 5, 1, 4, 2]$ e dunque ha profondità $1 + 5 + 1 + 4 + 2 = 13$. Costruiamo la sequenza dei suoi antecedenti sostituendo ogni volta al più grande tra numeratore e denominatore la differenza con l'altro termine. Otteniamo così le dieci frazioni

$$\frac{75}{64}, \quad \frac{11}{64}, \quad \frac{11}{53}, \quad \frac{11}{42}, \quad \frac{11}{31}, \quad \frac{11}{20}, \quad \frac{11}{9}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{1}$$

Costruiamo ora una sequenza binaria associando 1 ad ogni frazione > 1 e 0 ad ogni frazione ≤ 1 . La sequenza trovata è 1000001000011. Confrontando con lo sviluppo in frazione continua si vede che coincide con $\sigma(x)1$, cioè la sequenza simbolica di x con l'aggiunta di un 1 finale. Non si tratta di una coincidenza ma di un fatto facilmente dimostrabile utilizzando la rappresentazione matriciale vista sopra. Chiamiamo *indirizzo* di x il numero intero k la cui rappresentazione binaria (con potenze decrescenti di 2) è $1\sigma(x)$ (ottenuta cioè piazzando in testa l'uno finale della sequenza costruita con gli antecedenti). Allora si ha $x = e_k$. Nel caso considerato si trova $1\sigma(x) = 1100000100001$ e dunque $k = 2^{12} + 2^{11} + 2^5 + 2^0 = 6177$, ovvero $75/64$ è il seimilacentosettantasettesimo numero razionale nell'ordinamento di Stern-Brocot. La validità di questa 'regola' segue facilmente per induzione osservando che se la rappresentazione binaria di k è $s \in \{0, 1\}^*$ allora la rappresentazione binaria di $k + 1$ si ottiene sommando 1 (mod 2) ad s . Esempio: $1001 + 1 = 1010$, oppure $1111 + 1 = 10000$.

8.3 Parole

Associando alla somma di Farey (13) la corrispondente operazione di concatenamento su $\{0, 1\}^*$ si può stabilire un'interessante corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'albero \mathcal{A} e un insieme \mathcal{P} di parole binarie, che chiameremo *parole di Farey-Christoffel*.⁴

Definizione. Posto $w_{\frac{0}{1}} = 0$ e $w_{\frac{1}{0}} = 1$, se p/q and p'/q' sono frazioni consecutive in \mathcal{A} , con $qp' - pq' = 1$, e se $p''/q'' = p/q \oplus p'/q'$, allora $w_{\frac{p''}{q''}} = w_{\frac{p}{q}} w_{\frac{p'}{q'}}$.

⁴Studiate per la prima volta da Christoffel nel 1875 come 'parole automatiche' [11]. Per le loro proprietà in connessione al tema generale della combinatoria sulle parole vedi [22].

Alcune proprietà delle parole così ottenute sono riportate nella seguente⁵

Proposizione 8.2. 1. $\forall w \in \mathcal{P}$ si ha $w = w_{\frac{p}{q}}$ con $\frac{p}{q} = \frac{|w|_1}{|w|_0}$ (e dunque $|w| = p + q$).

2. $\forall w \in \mathcal{P}$ si ha $w = 0c1$ con $c \in \{0, 1\}^*$ palindroma: $c = \tilde{c}$.

3. Se $w_{\frac{p}{q}} = 0c1$ allora $w_{\frac{q}{p}} = 0\hat{c}1$.

4. Le parole associate ai medianti sinistro e destro di $w = 0c1 \in \mathcal{P}$ sono

$$0(0c)^-1 = 0(c0)^+1 \quad e \quad 0(1c)^-1 = 0(c1)^+1$$

dove u^- e u^+ sono i palindromi più brevi con suffisso, risp. prefisso, dato da u .

5. Ogni $w \in \mathcal{F}$ con $|w| > 1$ può essere fattorizzata in modo unico come $w = uv$, dove u e v sono parole palindrome non vuote. Inoltre, se $w = w_{\frac{p''}{q''}} = w_{\frac{p}{q}} w_{\frac{p'}{q'}}$, allora $|u| = p' + q'$ e $|v| = p + q$.

Dimostrazione. La prima tesi segue subito dalla definizione, mentre la terza e la quarta seguono facilmente dalla seconda. Vediamo dunque quest'ultima, ragionando per induzione rispetto alla profondità. Per la radice $\frac{1}{1}$ si ha $c = \epsilon$, la parola vuota, dunque la tesi è banale. Supponiamo sia vera fino alla profondità $n > 1$, e consideriamo $\gamma \in \mathcal{A}$ con profondità n . Si ha $w_\gamma = 0c1$ con c palindroma. D'altra parte γ è il mediante di due 'genitori' α e β , uno di profondità $n - 1$ e l'altro di profondità $n - k$, per qualche $k = 2, \dots, n$ (il caso in cui o α o β sia un 'antenato' è lasciato al lettore). Poniamo $w_\alpha = 0a1$ e $w_\beta = 0b1$, con $a = \tilde{a}$ e $b = \tilde{b}$. Allora $c = a10b = \tilde{b}01\tilde{a}$. Consideriamo ora un 'figlio' δ of γ . Se δ è il figlio destro allora per costruzione $w_\delta = 0c10b1 = 0a10b10b1 = 0d1$ con $d = a10b10b = \tilde{b}01\tilde{a}10b$, che è evidentemente palindroma. Se δ è il figlio sinistro lo stesso argomento dà $w_\delta = 0d'1$ con $d' = a10\tilde{b}01\tilde{a}$.

Per mostrare l'ultima affermazione, osserviamo che da quanto appena detto segue che per $w = 0c1 \in \mathcal{F}$, il palindromo c ha sempre la struttura $c = a10b = \tilde{b}01\tilde{a}$, con $a = \tilde{a}$ e $b = \tilde{b}$. Quindi possiamo scrivere $w = uv$ con $u = 0\tilde{b}0$ e $v = 1\tilde{a}1$, entrambe palindrome. Il fatto che la fattorizzazione sia unica segue facilmente dalla corrispondenza biunivoca tra \mathcal{A} and \mathcal{P} , mentre la formula per lunghezza di u and v segue dalla prima affermazione e dalla definizione di \mathcal{P} . \square

Ora, dato $x \in \mathbb{Q}_+$, possiamo chiederci quale relazione sussista tra la sequenza $\sigma(x)$ che codifica il cammino necessario a raggiungere x sull'albero di Stern-Brocot e la parola di Farey-Christoffel $w(x)$ ad esso associata. Tale relazione si può ottenere facilmente dalla Proposizione 8.2.4: data una parola palindroma $u \in \{0, 1\}^*$ e un simbolo $s \in \{0, 1\}$, poniamo

$$\Phi_s(u) = (us)^+ = (su)^- \tag{17}$$

Ad esempio $\Phi_0(0110) = 01100110$ e $\Phi_1(0110) = 011010110$. Inoltre si ha $\Phi_s(\epsilon) = s$.

⁵Usiamo qui la seguente notazione: se $w = s_1 \dots s_n$ poniamo $\tilde{w} = s_n \dots s_1$ e $\hat{w} = \hat{s}_1 \dots \hat{s}_n$, dove per $s \in \{0, 1\}$ abbiamo posto $\hat{s} = 1 - s$. Sia poi $|w|$ la lunghezza di w e $|w|_s$ il numero di occorrenze del simbolo $s \in \{0, 1\}$ in w .

Proposizione 8.3. Sia $\sigma(x) = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in \{0, 1\}^*$ il cammino associato a $x \in \mathcal{A}$ e $w(x) = 0c1 \in \mathcal{P}$ la sua parola di Farey-Christoffel. Allora si ha

$$c = \Phi_{\sigma_k} \circ \Phi_{\sigma_{k-1}} \circ \cdots \circ \Phi_{\sigma_1}(\epsilon)$$

Ad esempio, per $x = 3/5$ si ha $\sigma(x) = 010$ e $w(x) = 00100101$. Infatti, $\Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0(\epsilon) = \Phi_0 \circ \Phi_1(0) = \Phi_0(010) = 010010$.

8.3.1 Parole sturmiane e parole derivate

Esiste un'interessante interpretazione geometrica delle parole di Farey-Christoffel, che ritroveremo più avanti. Innanzitutto, ad ogni parola $w \in \{0, 1\}^*$ possiamo associare un cammino su \mathbb{Z}^2 costruito muovendosi di un passo in verticale (risp. in orizzontale) per ogni occorrenza del simbolo 1 (risp. 0). Ovviamente, i cammini corrispondenti a w e \tilde{w} si incontrano nell'origine $(0, 0)$ e nel punto $(|w|_0, |w|_1)$. Per questo motivo, data $w \in \mathcal{P}$ chiamiamo $|w|_1/|w|_0$ la *pendenza* di w . D'altra parte $w \in \mathcal{P}$ è formata concatenando i suoi 'genitori', $w = uv$, e una breve riflessione mostra che i cammini su \mathbb{Z}^2 associati a u e v si ottengono tagliando il cammino associato a w nel punto di \mathbb{Z}^2 più vicino al segmento di pendenza $|w|_1/|w|_0$ che unisce $(0, 0)$ e $(|w|_0, |w|_1)$. Una conseguenza di questo fatto è che una parola $w \in \mathcal{P}$ di pendenza p/q si può riguardare come il cammino su \mathbb{Z}^2 sottostante e più vicino al tratto di semiretta $y = (p/q)x$, $x \geq 0$, che va dall'origine al punto (q, p) . A sua volta, ciò si può riformulare (vedi ad es. [24], Cap. 6) con il fatto che una parola $w \in \mathcal{P}$ di pendenza p/q è la *sequenza sturmiana* di angolo $\alpha = p/q/(1 + p/q) = p/(p + q) = |w|_1/|w|$, ovvero la rappresentazione simbolica dell'orbita $\{R_\alpha^k(0)\}_{k=1}^{p+q}$ rispetto alla partizione binaria $S^1 = [0, 1 - \alpha) \cup [1 - \alpha, 1)$. In modo ancora più esplicito, se $w = s_1 s_2 \cdots s_{p+q}$, allora

$$s_k = [k\alpha] - [(k-1)\alpha] \quad , \quad k = 1, \dots, p+q \quad (18)$$

Reciprocamente, una sequenza sturmiana di angolo $\alpha = p/(p+q)$, che soddisfa (18), è una parola di Farey-Christoffel di pendenza $\alpha/(1-\alpha) = p/q$.

Discutiamo infine qualche altro aspetto della relazione tra la frazione continua di un elemento $x \in \mathcal{A}$ e la sua parola di Farey-Christoffel $w \in \mathcal{P}$. Da quanto visto sopra si deduce facilmente che ogni parola di Farey-Christoffel w con $|w| = n$ e pendenza $|w|_1/|w|_0 = p/q \in (0, 1)$ può essere scritta nella forma

$$w = 0^{n_1} 1 0^{n_2} \cdots 0^{n_p} 1, \quad n_i \geq 1, \quad \sum_{i=1}^p n_i = q$$

Se invece $p/q > 1$ allora w ha la forma

$$w = 0 1^{n_1} 0 1^{n_2} \cdots 0 1^{n_q}, \quad n_i \geq 1, \quad \sum_{i=1}^q n_i = p$$

Inoltre, gli interi n_i possono assumere soltanto due valori: $[q/p]$ o $[q/p] + 1$ nel primo caso, $[p/q]$ o $[p/q] + 1$ nel secondo. Seguendo [25], chiamiamo $[q/p] \geq 1$ (o $[p/q]$) il *valore* di w , e costruiamo

la parola derivata w' per mezzo del seguente algoritmo: se la pendenza p/q di w è più piccola di uno e il suo valore è k (cioè $[q/p] = k$), allora il simbolo 1 è isolato e operiamo la sostituzione $0 \rightarrow 0$ e $0^k 1 \rightarrow 1$. Se invece $p/q > 1$ e $[p/q] = k$, allora il simbolo 0 è isolato e facciamo la sostituzione $1 \rightarrow 1$ e $01^k \rightarrow 0$. Iteriamo questa procedura fino ad arrivare ad una parola composta da un solo simbolo, 0 o 1, registrando i valori delle parole derivate a_0, a_1, \dots, a_n .

Proposizione 8.4. *Sia $x \in \mathcal{A}$ e $w \in \mathcal{P}$ la parola di Farey-Christoffel corrispondente. I valori delle parole derivate w', w'', \dots coincidono con i quozienti parziali della frazione continua di x .*

Dimostrazione. Una breve riflessione mostra che la procedura di derivazione corrisponde ad applicare alla pendenza delle parole la costruzione degli antecedenti (cfr. Nota 8.1). A sua volta, quest'ultima equivale ad iterare la mappa $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ data da

$$F : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases} \quad (19)$$

la cui azione sulle frazioni continue è

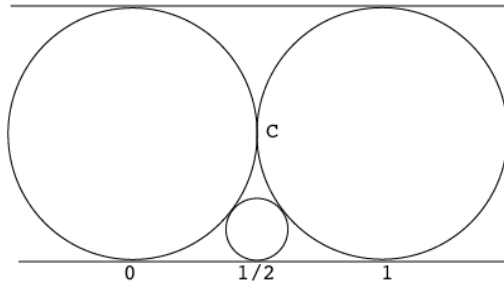
$$F : [a_0; a_1, a_2, \dots] \mapsto \begin{cases} [0; a_1 - 1, a_2, \dots], & a_0 = 0 \\ [a_0 - 1; a_1, a_2, \dots], & a_0 > 0 \end{cases} \quad (20)$$

Così, se w ha pendenza x e valore k , w' ha pendenza $F^k(x)$ e valore $[F^k(x)]$ o $[1/F^k(x)]$. \square

ESEMPIO. Partendo da $p/q = 3/5 = [0; 1, 1, 2]$ e $w = 00100101$ otteniamo il seguente schema.

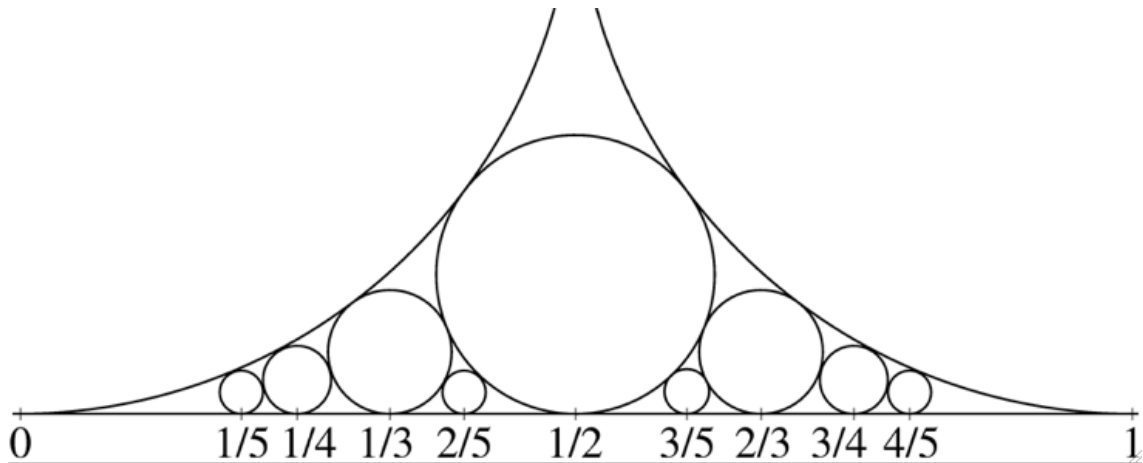
passo di derivazione	parola di Farey-Christoffel	pendenza	valore
0	00100101	3/5	1
1	01011	3/2	1
2	001	1/2	2
3	1	1/0	∞

Nota 8.4. Analogamente a come i cammini finiti su \mathcal{A} sono in corrispondenza con le geodetiche di scattering (cfr. Nota 8.3), possiamo costruire un'interessante corrispondenza tra le parole di Farey-Christoffel e i cerchi di Ford. Si tratta di una famiglia numerabile di circonferenze ortogonali ai lati dei triangoli geodetici considerati nella Nota 8.3, ciascuna delle quali, indicata con $C_{\frac{p}{q}}$, è tangente a \mathbb{R} in $\frac{p}{q}$ ed ha diametro $\frac{1}{q^2}$. I cerchi più grandi che si possono così ottenere hanno diametro unitario e corrispondono a C_n , $n \in \mathbb{Z}$ (in figura sono riportati C_0 , $C_{\frac{1}{2}}$ e C_1).



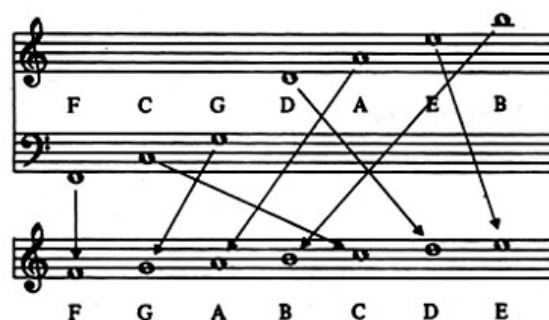
Proposizione 8.5. ([2], Teorema 5.6) Due cerchi di Ford $C_{\frac{p}{q}}$ e $C_{\frac{p'}{q'}}$, con $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$, o non si intersecano, oppure sono tra di loro tangenti se $p'q - pq' = 1$. Tre cerchi $C_{\frac{p}{q}}$, $C_{\frac{p'}{q'}}$ e $C_{\frac{p''}{q''}}$ con $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} < \frac{p''}{q''}$ sono tangenti tra di loro se e solo se $\frac{p''}{q''} = \frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$.

Immaginiamo ora di eseguire un esperimento con un *monocordo*, uno strumento costituito da una singola corda tesa tra due ponticelli fissati su una base rigida. Un terzo ponticello intermedio può essere spostato lungo la corda in modo da dividerla in due parti ottenendo suoni di altezza variabile. Pensato come apparato per eseguire esperimenti di acustica, si può immaginare fissata alla sua base una riga su cui segnare le posizioni del ponticello mobile corrispondenti alle note. Sul segmento di retta che la rappresenta come ente teorico, la posizione del ponticello può essere rappresentata da un'ascissa x variabile ad esempio nell'intervallo $(0, 1]$. Se pizzichiamo il tratto di corda antecedente il ponticello, otteniamo un suono la cui frequenza (misurata in un'unità di misura opportuna) è pari a $1/x$. Se invece rimuoviamo il ponticello e sfioriamo la corda con un dito, senza esercitare pressione, allora pizzicando la corda non sortirà alcun suono distinto se non quando l'ascissa x del punto di contatto corrisponde a una frazione irriducibile $p/q \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, o quantomeno è 'abbastanza vicina' a un tale valore. In tal caso il suono prodotto sarà un armonico naturale della corda libera ($x = 1$), di frequenza pari a q (nelle stesse unità di misura). E la 'facilità' con cui otteniamo tale armonico sarà proporzionale sia alla 'semplicità' della frazione p/q , sia alla 'prossimità' di x a p/q (non possiamo, né ci interessa qui, precisare ulteriormente le condizioni topologiche coinvolte in tali espressioni). L'esperienza mostra che il numero di armonici che possono in tal modo essere prodotti è comunque finito, e ristretto alla serie di Farey \mathcal{F}_n descritta nella Nota 8.2, dove n non supera generalmente un valore dell'ordine della decina. Ora, in virtù della Proposizione 8.5, è anche chiaro che l'insieme $\{C_{\frac{p}{q}} : \frac{p}{q} \in \mathcal{F}_n \cap (0, 1)\}$ coincide con l'insieme dei cerchi di Ford contenuti nella striscia compresa tra 0 e 1 e con diametro $\leq n^{-2}$ (nella figura seguente sono visibili quelli corrispondenti a $n = 5$). Come suggerito in [18], un'interessante analogia sussiste tra la difficoltà crescente di disegnare i cerchi di Ford e quella di produrre gli armonici corrispondenti sul monocordo. Se inoltre a $C_{\frac{p}{q}}$ associamo la *larghezza* $\ell = \log(p/q)$ e la *sonorità* $s = \log(pq)$ dell'intervallo p/q , allora $\text{diam}(C_{\frac{p}{q}}) = \exp[-(s - \ell)]$, ovvero la dimensione dei cerchi di Ford decresce esponenzialmente con la differenza tra sonorità e larghezza.

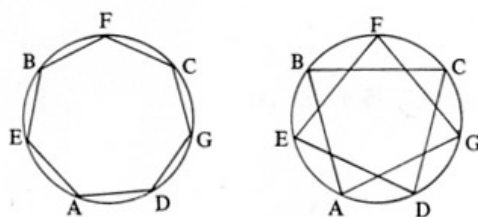


9 Scale ben formate

Nel 1989 Norman Carey e David Clampitt hanno sviluppato una teoria della ‘buona formazione’ delle scale musicali [9], [10].⁶ Si possono dare diverse caratterizzazioni strutturali di questa proprietà. Innanzitutto in termini di simmetria. Consideriamo ad esempio le scale diatoniche, cioè quelle formate da sette delle dodici note che compongono la scala cromatica, ordinate secondo una particolare successione d’intervalli di due sole specie, toni e semitoni, ad es. nella scala maggiore nell’ordine T – T – S – T – T – T – S. Sappiamo che tale scala si può ottenere da una progressione di quinte partendo da una nota prefissata, ad esempio da *Fa*. Tale sequenza è dunque *Fa–Do–Sol–Re–La–Mi–Si* e ad essa corrisponde la scala *Fa–Sol–La–Si–Do–Re–Mi*. L’intervallo di quinta funziona qui da *generatore*, nel senso che le note vengono inizialmente ottenute come multipli di esso, per poi essere riordinate in una scala.

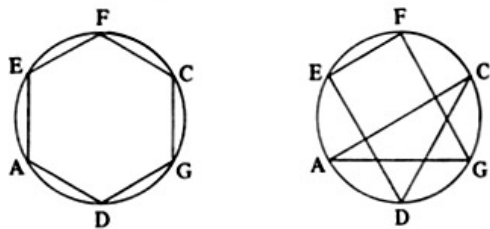


La ragione per cui la scala diatonica comunemente usata è formata da sette note e non da sei o otto, si può comprendere in termini del grado di simmetria rotazionale ottenuta quando i toni vengono arrangiati in circolo: sia la sequenza delle quinte che quella delle note lungo la scala hanno lo stesso grado di simmetria rotazionale. Detto altrimenti, il numero di toni compresi tra due multipli successivi del generatore (ivi incluso uno dei due) è costante, qui uguale a 4.

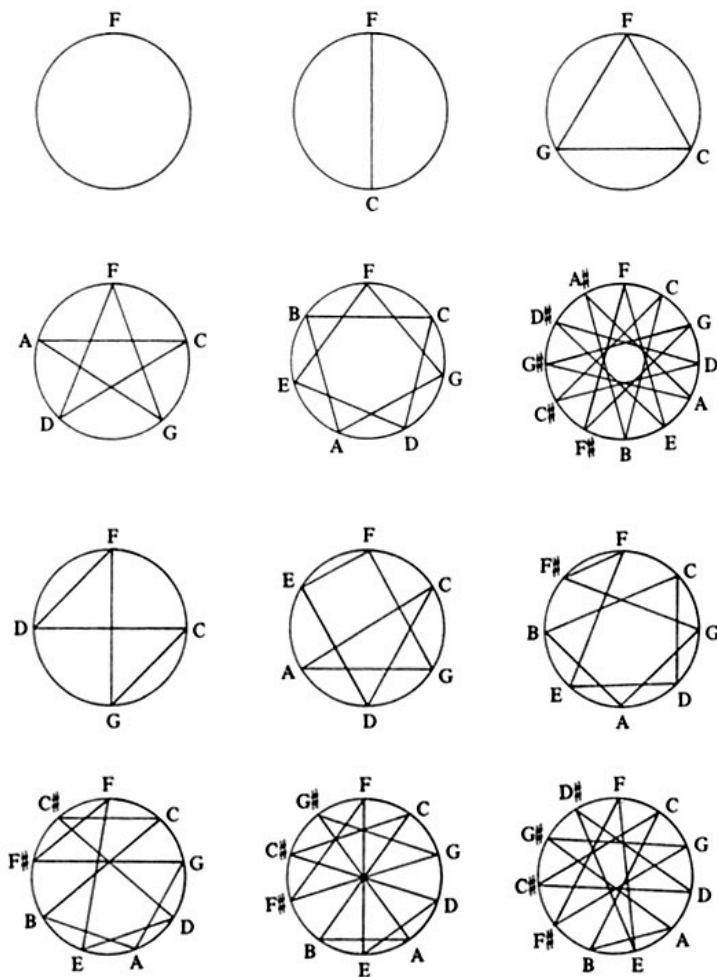


Tuttavia, in una scala di sei note con lo stesso sistema si perde questa simmetria: il numero di toni compresi tra due successivi multipli del generatore può essere uguale a 1, 3 o 4.

⁶Le figure mostrate in questa sezione sono riprese da [10] e utilizzano la notazione letterale: A = *La*, B = *Si*, C = *Do*, D = *Re*, E = *Mi*, F = *Fa*, G = *Sol*.



Le sole scale di N note ottenute usando la quinta come generatore che sono ben formate sono quelle con $N = 1, 2, 3, 5, 7, 12$, non lo sono quelle con $N = 4, 6, 8, 9, 10, 11$.



Ovviamente si possono costruire scale ben formate anche in altra maniera, ad esempio la scala a toni interi utilizzata da Debussy, come $Fa - Sol - La - Si - Do\sharp - Re\sharp$. Scale di questo genere si dicono *regolari*. Oppure le scale di otto toni con intervalli tra due note successive alternatamente di un semitono e un tono, come ad esempio $Do - Re - Mi\flat - Fa - Fa\sharp - Sol\sharp - La - Si - Do$.

I diagrammi circolari suggeriscono l'uso dell'aritmetica modulare, che fa uso degli insiemi $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, ovvero le classi di equivalenza degli interi modulo N . Se ad esempio consideriamo la progressione $Fa-Do-Sol-Re-La-Mi-Si$ sul cerchio e la mettiamo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{0, 1, \dots, 6\}$, allora usando l'aritmetica ordinaria la differenza tra gli elementi successivi vale 1 oppure -6 (da Si a Fa), ma essendo $-6 = 1 \pmod{7}$ la differenza è sempre uguale a 1 con l'aritmetica modulo 7. È facile rendersi conto poi che l'ordinamento delle note nella scala diatonica $Fa-Sol-La-Si-Do-Re-Mi$ può essere ottenuto per mezzo della moltiplicazione per 2 modulo 7, che agisce come segue:

$$0 \rightarrow 0, \quad 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 4, \quad 3 \rightarrow 6, \quad 4 \rightarrow 1, \quad 5 \rightarrow 3, \quad 6 \rightarrow 5$$

In altri termini l'automorfismo (permutazione) $\pi : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ che riordina le note per dare la scala è $\pi : k \rightarrow 2 \cdot k \pmod{7}$. Il numero 2 è qui il numero costante di note che compaiono sul cerchio delle quinte tra due note consecutive della scala (inclusa una delle due). Osserviamo che l'inverso $\pi^{-1} : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ agisce moltiplicando per $(2)^{-1} \pmod{7} = 4$, ovvero

$$0 \rightarrow 0, \quad 1 \rightarrow 4, \quad 2 \rightarrow 1, \quad 3 \rightarrow 5, \quad 4 \rightarrow 2, \quad 5 \rightarrow 6, \quad 6 \rightarrow 3$$

Il numero 4 è qui il numero costante di note che compaiono lungo la scala tra due successivi multipli del generatore (incluso uno dei due).

Cerchiamo di ricapitolare e generalizzare quanto visto fin qui adottando alcuni concetti introdotti in [13]. Se rappresentiamo una scala di N note con un sottoinsieme $\Sigma \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ di cardinalità N , possiamo associarvi una biiezione $\nu : \mathbb{Z}_N \rightarrow \Sigma$, detta *ordine di scala*, in modo tale che $\nu(k)$ sia la k -esima nota della scala, ovvero $0 \leq \nu(0) \leq \nu(1) \leq \dots < \nu(N-1) < 1$. Se inoltre $\Sigma = \{k\alpha \pmod{1}, k = 0, \dots, N-1\}$ allora diremo che Σ è *generata*. Il generatore α , che può essere scelto tra 0 e 1, determina a sua volta una biiezione $\phi : \mathbb{Z}_N \rightarrow \Sigma$, detta *ordine generativo*, in cui $\phi(k) = k\alpha \pmod{1}$ è la (o l'equivalente della) 'sequenza delle quinte'.

Definizione 9.1. Una scala generata Σ si dice *ben formata* se l'ordine di scala è una permutazione moltiplicativa dell'ordine generativo, ovvero se esiste un automorfismo $\pi : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$ che permuta \mathbb{Z}_N in modo da arrangiare i toni in ordine di scala, o ancora se $\exists q \in \mathbb{Z}$ con $(q, N) = 1$ tale che $\nu(k) = \{(kq) \pmod{N}\} \alpha$.

Osserviamo che la proprietà che abbiamo usato per definire una scala ben formata implica che il numero di toni compresi tra due multipli successivi del generatore (ivi incluso uno dei due) è costante. Infatti, se due note della scala $\{(mq) \pmod{N}\} \alpha$ e $\{(nq) \pmod{N}\} \alpha$ differiscono per il generatore α , allora si vede che $\{(m-n)q \pmod{N}\} \alpha = \alpha$ e dunque $p = m-n$ soddisfa $p = (q)^{-1} \pmod{N}$, e in particolare è costante. Riassumiamo quanto visto osservando che il moltiplicatore $q = (p)^{-1} \pmod{N}$ misura il numero di note che compaiono sul 'circolo delle quinte' tra due note consecutive della scala, mentre il suo 'duale' p misura il numero di note che compaiono sulla scala tra due 'quinte' successive.

Ora, adottando ancora come generatore l'intervallo di quinta $3/2$, ovvero $g = \log_2(3/2)$, e procedendo come sopra, si vede che al variare di N si ottengono scale ben formate solo quando $N =$

1, 2, 3, 5, 7, 17, 29, 41, 53, Perchè questi numeri interi e non altri? Per comprendere questo fatto osserviamo i primi dieci semiconvergenti di $g = \log_2(3/2)$ sono

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{10}{17}, \frac{17}{29}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53} \dots$$

Notiamo che i numeri interi che danno luogo a scale ben formate sono proprio i denominatori dei semiconvergenti del generatore. Che sia proprio questa la regola generale, si può comprendere sulla base di quanto visto in precedenza sulle rotazioni irrazionali (vedi più avanti).

Si può anche generalizzare questo esempio variando il generatore. Possiamo cioè scegliere un qualunque numero g che soddisfi $2^{1/2} \leq g \leq 2$ e costruire il *sistema pitagorico generalizzato*

$$P(g) = \{2^n g^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Il seguente risultato mette in relazione alcuni concetti illustrati fin qui.

Proposizione 9.1. *In un sistema pitagorico generalizzato $P(g)$, una scala di N note è una scala ben formata se e solo se p/N è un semiconvergente di $\log_2 g$. Inoltre, l'automorfismo $\pi : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$ che permuta \mathbb{Z}_N in modo da arrangiare i toni in ordine di scala è $\pi : k \rightarrow q \cdot k \pmod{N}$ dove $q = (p)^{-1} \pmod{N}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che se una scala di N note in $P(g)$ è ben formata allora N deve essere il denominatore di un semiconvergente del generatore $\alpha = \log_2 g$. Per l'implicazione opposta rimandiamo a ([9], Cap. III, Teorema 2). Ora, l'ipotesi fatta implica che $\{q\alpha\}$ è prima nota della scala dopo lo 0. Dall'identità $\alpha = [q\alpha]/q + \{q\alpha\}/q$ si evince dunque che non vi sono razionali $m/n \in ([q\alpha]/q, \alpha)$ con $n < q$. Pertanto $[q\alpha]/q < \alpha$ è un semiconvergente di α . Lo stesso argomento mostra che anche $(1 + [(N - q)\alpha])/(N - q) > \alpha$ è un semiconvergente. Trovandosi da parti opposte di α , almeno uno dei due è un convergente. Il loro mediente è dunque un semiconvergente ed ha la forma p/N con $p = 1 + [q\alpha] + [(N - q)\alpha]$. \square

Possiamo a questo punto mettere in corrispondenza le scale ben formate con particolari cammini sull'albero di Stern-Brocot (o, in modo equivalente, con sequenze di cerchi di Ford). Se alla scala ben formata di N toni associamo la frazione p/N dove p è la posizione della quinta lungo la scala, allora ad ogni fissato generatore g corrisponde un unico cammino sull'albero di Stern-Brocot che converge a $\log_2 g$, e gli elementi di tale cammino, cioè i semiconvergenti di tale numero, rappresentano ciascuno una scala ben formata. Ad esempio il cammino che corrisponde a $\log_2(3/2)$ inizia con 01001100010000011... come si evince dallo sviluppo $\log_2(3/2) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, \dots]$. Dunque le frazioni che lo compongono si possono rappresentare nella forma

$$\frac{1}{2} \iff A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{3} \iff AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{3}{5} \iff ABA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{4}{7} \iff ABAA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{7}{12} \iff ABAAB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

e così via. Si può notare che per tutti questi esempi vale la seguente regola:

$$\text{se } \frac{p}{N} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad p \cdot a_{22} = 1 \pmod{N}$$

dunque a_{22} sarebbe il moltiplicatore q della teoria di Carey e Clampitt. Che sia in generale proprio così lo si vede facilmente usando la proprietà di unimodularità $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1$ (vedi anche [28]):

$$p \cdot a_{22} = (a_{11} + a_{12})a_{22} = 1 + a_{12}(a_{21} + a_{22}) = 1 + a_{12} \cdot N$$

Vediamo ora un ultimo aspetto delle scale ben formate: la cosiddetta *proprietà di Myhill*⁷. Essa consiste nel fatto che gli intervalli tra due note successive, o comunque tra due note separate da un numero fissato di note, assumono soltanto due valori. Nel contesto della definizione generale data sopra essi sono: $a = \{q\alpha\}$ e $b = 1 - \{(N - q)\alpha\}$, che appaiono nell'ottava $N - q$ e q volte, rispettivamente. La differenza tra questi due valori viene detta *comma generalizzato*.

Ad esempio per $N = 2$ si trovano i due intervalli di quinta ($3/2$) e di quarta ($4/3$) e la loro differenza è il tono maggiore ($9/8$). Per $N = 7$ si trova il tono maggiore ($9/8$) e il semitono diatonico ($256/243$) e la loro differenza è il semitono cromatico ($2187/2048$). Passando alla scala logaritmica troviamo il seguente schema (dove $\alpha = \log_2(3/2)$).

N	primo intervallo	secondo intervallo	comma generalizzato	semiconv.
2	α (quinta)	$1-\alpha$ (quarta)	$2\alpha-1$ (tono maggiore)	$1/2$
3	$1-\alpha$ (quarta)	$2\alpha-1$ (tono maggiore)	$2-3\alpha$ (terza minore)	$2/3$
5	$2-3\alpha$ (terza minore)	$2\alpha-1$ (tono maggiore)	$3-5\alpha$ (semit. diatonico)	$3/5$
7	$2\alpha-1$ (tono maggiore)	$3-5\alpha$ (semit. diatonico)	$7\alpha-4$ (semit. cromatico)	$4/7$
12	$7\alpha-4$ (semit. cromatico)	$3-5\alpha$ (semit. diatonico)	$12\alpha-7$ (comma pitagorico)	$7/12$

Si può mostrare facilmente che la proprietà di Myhill è una diretta conseguenza del già ricordato Teorema delle tre distanze (cfr. Nota 2.2), osservando che le distanze in questo caso si riducono a due essendo il numero di termini considerati uguale al denominatore di un semiconvergente, e passando al denominatore successivo il nuovo intervallo è proprio il comma generalizzato della situazione precedente. Inoltre, come osservato nella Nota 2.1, nel contesto del sistema pitagorico il comma $3^{12}/2^{19}$ costituisce una migliore approssimazione dell'identità nel gruppo libero $\langle 2, 3 \rangle$, nel senso che ogni altro elemento > 1 del gruppo, se più vicino all'identità deve avere numeratore più grande. Ciò segue dal fatto che in scala logaritmica il comma pitagorico vale $12\alpha - 7 = q_4\alpha - p_4$, dove p_n/q_n è l' n -esimo convergente di $\alpha = \log_2(3/2)$, e dalla stima (8).

Una breve riflessione mostra che ogni comma generalizzato ha la forma $(-1)^n(s_m\alpha - r_m)$ o, in notazione moltiplicativa, $2^{(-1)^{n-1}(s_m+r_m)}3^{(-1)^n s_m}$, dove r_m/s_m è l' m -esimo semiconvergente di α e $n = m$ se $r_m/s_m = p_n/q_n$, altrimenti n è l'indice del convergente immediatamente successivo. Tutto ciò può essere facilmente esteso ai comma generalizzati di un sistema pitagorico qualunque $P(g)$.

Concludiamo con un ulteriore legame tra la teoria delle scale ben formate e il materiale sviluppato nelle sezioni precedenti, questa volta con la teoria combinatoria delle parole. In effetti, per quanto visto fin qui, a una scala ben formata Σ di N note con parametri (α, q) possiamo associare una

⁷Attribuita al matematico inglese John Myhill (1923-1987) dai teorici della musica John Clough and Gerald Myerson.

parola binaria $w_\Sigma \in \{0, 1\}^*$ che descrive il modo in cui i due possibili intervalli tra note successive si alternano lungo la scala. I simboli di tale sequenza sono dati da

$$w_\Sigma(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu(k) - \nu(k-1) = a = \{q\alpha\} \\ 1 & \text{se } \nu(k) - \nu(k-1) = b = 1 - \{(N-q)\alpha\} \end{cases} \quad k = 1, \dots, N \quad (21)$$

La seguente osservazione, riportata in [13], mette in relazione la teoria delle scale ben formate con la combinatoria delle parole (cfr. Sezione 8.3): dalla forma degli intervalli a e b si evince facilmente che $w_\Sigma(k)$ vale 0 o 1 a seconda che $(kq) \pmod{N} - ((k-1)q) \pmod{N}$ sia uguale a q o $q - N$ rispettivamente o, in modo equivalente, a seconda che $[kq/N] - [(k-1)q/N]$ sia 0 o 1. Pertanto $w_\Sigma(k) = [kq/N] - [(k-1)q/N]$. Confrontando con la (18), otteniamo la seguente.

Proposizione 9.2. *Una scala Σ di N note con parametri (α, q) è ben formata se e solo se w_Σ è una parola di Farey-Christoffel con pendenza $q/(N-q)$.*

Nota 9.1. Una famiglia di scale duale alla famiglia di scale ben formate è quella in temperamento equabile ottenuta usando i semiconvergenti direttamente come generatori. Ricordiamo che scegliere un determinato convergente p/N come approssimazione razionale di un generatore irrazionale α equivale a suddividere l'immagine logaritmica di un'ottava in N parti uguali, mentre l'intervallo corrispondente ad α stesso corrisponde ad un numero p di tali parti.

Nota 9.2. La teoria di Carey e Clampitt fornisce un interessante approccio allo studio dei sistemi tonali, nel senso che le scale ben formate possono servire come scale di riferimento per la musica tonale. Tuttavia tale teoria riesce a descrivere soltanto scale generate da un generatore g (oltre all'ottava), cioè scale costruite con un sistema pitagorico generalizzato. Ricordiamo che una scala naturale di ordine 5 richiede due generatori, come ad esempio $3/2$ e $5/4$. La possibilità di descrivere scale ben formate in un sistema naturale di ordine 5 o superiore si offre dunque come un problema aperto.

References

- [1] C. AGON, M. ANDREATTA, G. ASSAYAG, E. AMIOT, J. BRESSON, J. MANDEREAU (EDS.), *Mathematics and Computation in Music*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 6726, Springer, 2011
- [2] T. M. APOSTOL, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 1976.
- [3] C. A. BARBERA, *Arithmetic and geometric division of the tetrachord*, Journal of Music Theory **21** (1977), 294-323.
- [4] J. M. BARBOUR, *Tuning and Temperaments. A Historical Survey*, East Lansing, Mich. 1951, reprint: New York, 1972.
- [5] D. J. BENSON, *Music. A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2007

- [6] C. BONANNO, S. ISOLA, *Orderings of the rationals and dynamical systems*, Colloquium Mathematicum **116** (2009), 165-189
- [7] A. BROCAT, *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode*, Revue Chronométrique 6 (1860), 186-194.
- [8] W. BURKERT, *Lore and science in ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press, 1972.
- [9] N. CAREY, *Distribution modulo 1 and musical scales*, PhD-Thesis, 1998.
- [10] N. CAREY, D. CLAMPITT, *Aspects of well-formed scales*, Music Theory Spectrum **11** (1989), 187-206.
- [11] E. B. CHRISTOFFEL, *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 6 (1875), 148-152.
- [12] H. F. COHEN, *Quantifying Music: The Science of Music at the First Stage of Scientific Revolution, 1580-1650*, Dordrecht, 1984.
- [13] M. DOMÍNGUEZ, D. CLAMPITT, T. NOLL, *WF Scales, ME Sets, and Christoffel Words*, in T. Klouche and T. Noll (Eds.): MCM 2007, CCIS 37, pp. 477-488, Springer-Verlag 2009.
- [14] EUCLIDE, *Sectio Canonis*, (III sec. a.C.), (in Euclide, Tutte le opere, a cura di F. Acerbi, Bompiani (2007))
- [15] J. FAREY, *On a curious property of vulgar fractions*, London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. **47** (1816), 385.
- [16] J. FAUVEL, R. FLOOD, R. WILSON Eds., *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*, Oxford University Press 2003.
- [17] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, 1979.
- [18] Y. HELLEGOUARCH, *Gammes naturelles*, Prima parte in Gazette SMF 81 (1999) 25-39; Seconda parte in Gazette SMF 82 (1999), 13-25.
- [19] A. HONINGH, *Group theoretic description of just intonation*, Proceedings UCM, Caserta, 2003.
- [20] S. ISACOFF, *Temperamento*, (trad. it. EDT, Torino, 2005).
- [21] F. JEDRZEJEWSKI, *Mathematical Theory of Music*, Collection "Musique/Sciences", IRCAM/Delatour France, 2006.
- [22] M. LOTHARIE, *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.

- [23] T. NOLL, *Facts and Counterfacts: Mathematical Contributions to Music-theoretical Knowledge*, in Bab, S., et al. (eds.) *Models and Human Reasoning - Bernd Mahr zum 60. Geburtstag*. W&T Verlag, Berlin (2006).
- [24] N. PYTHEAS FOGG, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, LNM 1794, Springer 2002.
- [25] C. SERIES, *The geometry of Markoff numbers*, The Mathematical Intelligencer 7 (1985), 20-29.
- [26] N. B. SLATER, *Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$* , Proc. Camb. Phil. Soc. **63** (1967), 1115-1123.
- [27] M. STERN, *Über eine zahlentheoretische Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 55 (1858), 193-220.
- [28] D. VICINANZA, *Paths on Stern-Brocot tree and winding numbers of modes*, Proceedings of the ICMC, Barcellona, 2005.