UBA
Universidad de Buenos Aires

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Departamento
de Matemática

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO II “A”(61.03)
y
ANÁLISIS MATEMÁTICO II (81.01)

1er. cuatrimestre 2022

Profesor responsable: José Luis Mancilla Aguilar

La elaboración de las guía de trabajos prácticos fue realizada por
María Inés Troparevsky, Eduardo Zitto, Silvia Gigola y Ricardo O. Sirne

Bibliografía

– Apostol T.M., *Análisis Matemático* - 2^0 Ed., Reverté, 1976.
– Apostol T.M., *Calculus*, Vol. II, Reverté, 1992.
– Courant R., John F., *Introducción al cálculo y al análisis matemático* Vol. 2, Limusa, 1999.
– Edwards C.H. Jr., Penney D.E., *Cálculo con geometría analítica* - 4^0 Ed., Prentice-Hall Hispanoamericana, 1994.
– Marsden J., Tromba A.J., *Cálculo Vectorial*, Ed. Addison-Wesley, 1998.
– Pita Ruiz C., *Cálculo vectorial*, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
– Santaló L.A., *Vectores y tensores con sus aplicaciones*, Eudeba, 1993.
– Spiegel M.R., *Cálculo Superior*, Mc-Graw Hill, 1991.

Bibliografía complementaria para ecuaciones diferenciales

– Blanchard P., Devaney R., Hall G., *Ecuaciones Diferenciales*, Editorial Thomson, 1999.
– Kreider D.L., Kuller R.G., Ostberg D.R., *Ecuaciones Diferenciales*, Fondo Educativo Interamericano, 1973.
– Zill D.G., *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.

Publicaciones de la cátedra

Se trata del material didáctico publicado a través del “Campus” o la “Página Web” oficiales de la cátedra, incluyendo:

– La Guía de Trabajos Prácticos.
– Ayudas didácticas y apuntes de cátedra.
– Resolución de temas de evaluaciones parciales e integradoras.

IMPORTANTE: La cátedra no se responsabiliza por el contenido de apuntes, ayudas didácticas y ejercicios resueltos que pudieran publicarse por distintos medios, sin importar quién o quiénes sean sus autores. Sólo son válidas la bibliografía y las publicaciones de la cátedra que se indican.

Índice general

I – Geometría del plano y del espacio.

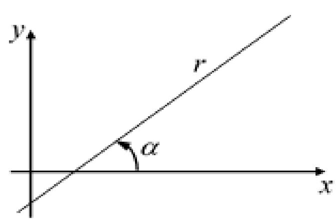
1. Puntos y conjuntos de puntos

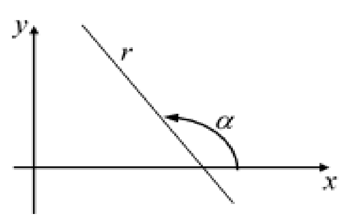
1. En el espacio que se indica, realice un gráfico del conjunto de puntos que satisface la ecuación dada.

En $\mathbb{R}^2$:	$a)$ $x = 4$	$b)$ $y = 2$	$c)$ $x^2 + y^2 = 9$	
En $\mathbb{R}^2$:	$d)$ $2\,x + y = 4$	$e)$ $y = x^2$	$f)$ $x^2 + y^2 = 0$	$g)$ $4\,x^2 + y^2 = 16$
En $\mathbb{R}^3$:	$h)$ $2\,x + y = 4$	$i)$ $y = x^2$	$j)$ $x^2 + y^2 = 0$	$k)$ $4\,x^2 + y^2 = 16$
En $\mathbb{R}^2$:	$l)$ $x^2 - 4\,y^2 = 16$	$m)$ $y^2 - x^2 = 4$	$n)$ $x\,y = 4$	$o)$ $(x-1)^2 + y^2 = 0$

2. Halle, en cada caso, una ecuación cartesiana para el conjunto de puntos del plano xy que se especifica y grafíquelo.
   a) Recta que contiene a los puntos $(2, 3)$ y $(3, 5)$.
   b) Circunferencia de radio $R = 3$ con centro en el punto $(3, 0)$.
   c) Elipse que contiene a los puntos $(2, 5)$ y $(1, 3)$, tiene ejes paralelos a los ejes coordenados y centro en $(2, 1)$.
   d) Parábola que contiene al punto $(0, 6)$, tiene vértice en $(3, 2)$ y eje de ecuación $y = 2$.

3. En los gráficos, realizados con la misma escala en ambos ejes, se muestra el ángulo α cuya tangente determina la pendiente de la recta oblicua r. Siendo $y = m\,x + b$ la ecuación de la recta, su pendiente es $m = \mathrm{tg}(\alpha)$ con $\alpha \neq \pi/2$ y $0 \leq \alpha < \pi$.





Calcule el valor de α en los siguientes casos:
a) $x + y = 2$, b) $x - y = 4$, c) $y = \sqrt{3}\,x + 5$, d) $y = -\sqrt{3}\,x + 5$, e) $x + \sqrt{3}\,y = \sqrt{3}$

4. En $\mathbb{R}^3$, halle una ecuación para:
   a) La recta que contiene al punto $A = (1, 2, 4)$ y está dirigida por el vector $\vec{r} = (1, 2, 1)$.
   b) La recta que contiene a los puntos $A = (1, 2, 4)$ y $B = (2, 5, 7)$.
   c) El segmento $\overline{AB}$ de puntos extremos $A = (1, 2, 4)$ y $B = (2, 5, 7)$, y determine el punto medio de dicho segmento.

5. Halle, en cada caso, la ecuación cartesiana de un plano que satisfaga las condiciones dadas; grafíquelo.
   a) Es paralelo al plano $x = 0$ y contiene el punto $P = (1, 2, -3)$.
   b) Es perpendicular al eje z y pasa por el punto $P = (1, -1, 2)$.
   c) Contiene a los puntos $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$ y $(3, 2, -1)$.
   d) Contiene al punto $(2, 0, 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{r} = (3, 2, -1)$.

6. El ángulo α entre dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es, por definición, aquel $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\ \cos(\alpha)$.
   a) Calcule el ángulo entre: a_1) $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 4)$, a_2) $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -4)$.
   b) Calcule el ángulo entre: $\vec{u} = (1, 2, 5)$ y $\vec{v} = (2, 4, 6)$.
   c) Demuestre que las componentes de un versor $\breve{r}$ (o vector unitario), son los cosenos de los ángulos entre $\breve{r}$ y los versores canónicos del espacio (cosenos directores y ángulos directores del versor). Interprete gráficamente en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.
   d) Un vector no nulo $\vec{r}$ tiene los mismos ángulos directores que su correspondiente versor $\breve{r} = \vec{r}/||\vec{r}||$. Halle un vector cuyos ángulos directores sean iguales: en $\mathbb{R}^2$, ídem para $\mathbb{R}^3$; indique en ambos casos cuál es la medida de dichos ángulos.

7. Dados los vectores $\vec{u} = 2\,\breve{\imath} + \breve{\jmath} - 2\,\breve{k}$ y $\vec{v} = 2\,\breve{\imath} - 2\,\breve{\jmath} - \breve{k}$ calcule/halle:
   a) el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$,
   b) $||\vec{u}||$,
   c) $3\,\vec{u} - 2\,\vec{v}$,
   d) un vector unitario paralelo a $\vec{u}$,
   e) la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

8. Calcule el área del paralelogramo tal que dos de sus lados son los segmentos que unen el origen con $(1, 0, 1)$ y $(0, 2, 1)$.

9. Demuestre que el triángulo de vértices $A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 3, 8)$ y $C = (2, 0, 1)$ tiene un ángulo recto.

2. Conjuntos definidos mediante inecuaciones

10. Describa gráficamente las regiones del plano xy definidas por:

$a)$ $x + y \leq 1$

$b)$ $x^2 + y^2 \geq 1\,, x \geq 0$

$c)$ $x^2 + 4\,y^2 < 9\,, x \geq 2$

$d)$ $x^2 - 2\,x + y^2/4 - y \leq 14$

$e)$ $x - y^2 > 1$

$f)$ $2\,x^2 - x + y \leq 1$

$g)$ $y^2 - 4\,x^2 < 1$

$h)$ $2\,x + y^2 - y \leq 1$

$i)$ $x\,y \geq 1$

$j)$ $x\,y > -1, x + y \geq 0$

$k)$ $y < \ln(x)$

$l)$ $x \leq e^{-y}$

$m)$ $y \geq 2\,x\,, y \leq \pi\,\mathrm{sen}(x)$

$n)$ $\mathrm{sen}(x) \leq y \leq -\cos(x)\,, x \in [-\pi, \pi]$

11. Describa en coordenadas cartesianas las siguientes regiones planas:

$a)$ Interior del círculo centrado en $(0, 0)$ y radio 2.

$b)$ Cuadrado de lado 1 con ejes paralelos a los ejes coordenados y vértice inferior izquierdo en $(1, 1)$.

$c)$ Conjunto abierto y acotado cuya frontera es la elipse centrada en $(0, 0)$, ejes paralelos a los coordenados y semiejes de longitudes 2 y 4. ¿Existe respuesta única?.

12. Describa mediante inecuaciones y/o ecuaciones el interior y la frontera de los conjuntos dados por:

$a)$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

$b)$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y < 0\}$

$c)$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| + |y| \leq 1\}$

$d)$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$e)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$

$f)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\}$

$g)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > x^2 + y^2\}$

$h)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$

$i)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > x^2 - y^2\}$

$j)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4\,z^2 \leq 4\}$

$k)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < x^2 + y^2 - 4\}$

$l)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < x^2 - y^2 - 4\}$

13. Halle, cuando sea posible, un punto exterior, un punto frontera y un punto interior a los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$. Determine cuáles son compactos y cuáles son arco-conexos.

$a)$ $x + y > 2$

$b)$ $x^2 + y^2 \leq 4$

$c)$ $y - 2x^2 \geq 2$

$d)$ $x\,y < 0$

$e)$ $2 < x < 3,\ y^2 < 1$

$f)$ $(x - 2y)(y - x^2) = 0$

II – Funciones, límite, continuidad. Curvas y superficies.

1. Conjuntos de nivel

1. En los siguientes casos, determine y grafique el dominio natural de f y analice si es un conjunto cerrado, abierto, acotado. Describa también los conjuntos de nivel de f y esboce su gráfico.

   a) $f(x,y) = 3\,(1 - x/2 - y/2)$ *b*) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$

   c) $f(x,y) = 25 - x^2$ *d*) $f(x,y) = 9\,x^2 + 4\,y^2$

   e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\,y^2}$ *f*) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 16)^{-1/2}$

   g) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ *h*) $f(x,y,z) = \ln(4 - x - y)$

   i) $f(x,y,z) = x + y + 2\,z$ *j*) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2-z^2}$

2. Grafique, si quedan definidos, el conjunto de nivel 0 y el conjunto de nivel 4 de:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x \geq -2 \\ 0 & \text{si } x < -2 \end{cases}$ *b*) $f(x,y) = \operatorname{sen}(y - x)$

3. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-10,10],\ y \in [-10,10]\} = [-10,10] \times [-10,10]$ una placa metálica en la cual $T(x,y) = 64 - 4\,x^2 - 8\,y^2$ representa la temperatura de cada punto $(x,y) \in D$. Los conjuntos de nivel de T se denominan *isotermas* porque sus puntos tiene igual temperatura, dibuje algunas de dichas isotermas.

4. Si $U(x,y)$ es el potencial electrostático de cada punto $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, los conjuntos de nivel de U se denominan *equipotenciales* porque sus puntos tienen igual potencial. Trace algunas líneas equipotenciales si $U(x,y) = k/\sqrt{x^2+y^2}$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$, donde k es una constante positiva.

2. Función vectorial de una variable. Curvas

5. Analice la existencia de los siguiente límites:

   a) $\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(u)}{|u|}, \sqrt{u}\right)$ *b)* $\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{e^u-1}{u}, u^2\right)$ *c)* $\lim\limits_{t\to 0}(t\ \operatorname{sen}(3/t), 4+t\ \ln(t))$

6. Analice en cada caso si la función es continua y determine si su conjunto imagen es una curva. Halle una expresión cartesiana del conjunto imagen y grafíquelo.

   a) $\vec{g}:[0,1]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\vec{g}(t)=(t,t^2)$ *b)* $\vec{g}:[0,1]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\vec{g}(t)=(1-t,(1-t)^2)$

   Observe que en *a)* y *b)* se obtiene el mismo conjunto imagen pero con orientaciones opuestas.

   c) $\vec{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\vec{g}(x)=(x,2\,x+1)$

   d) $\vec{g}:[0,\pi]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\vec{g}(t)=(2\ \cos(t),3\ \operatorname{sen}(t))$

   e) $\vec{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3/\vec{g}(t)=(\cos(t),\operatorname{sen}(t),3\,t)$

   f) $\vec{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3/\vec{g}(t)=(t-1,2\,t,t+1)$

7. Dados los siguientes conjuntos de puntos descriptos mediante ecuaciones cartesianas, expréselos paramétricamente mediante una ecuación vectorial e indique si con la parametrización adoptada el conjunto cumple con la definición de curva.

   a) Puntos del plano xy que satisfacen la ecuación:

   $a_1)$ $y=x^2$ $a_2)$ $y+2\,x=4$ $a_3)$ $x^2+y^2=9$ $a_4)$ $x\,y=1$

   b) Puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen las ecuaciones:

   $b_1)$ $y=x^2\,,\ \ x+z=y$ $b_2)$ $x+y=5\,,\ \ z=x^2+y^2$

3. Límite y continuidad de campos

8. En los siguientes casos determine, si existe, el límite indicado; fundamente la respuesta.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} x\,y-y^2$ *b)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} x\,y^{-1/2}$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$ *d)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$

   e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{x^2\,(y-2)^2}{x^2+(y-2)^2}$ *f)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|},\sqrt{x}\right)$

   g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(y\cos(x^{-1}),\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{2\,x}, x-y\right)$ *h)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{x-y}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ *j*) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\,y+y^5}{x^2+y^4}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2}$ *l*) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\ln(x^2+y^2)$

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ *n*) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2\,y^2-x^2-x\,y}{y-x}$

9. Determine los puntos de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{cuando } x-y>0 \\ 0 & \text{cuando } x-y\le 0 \end{cases}$ *b*) $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & \text{si } x\neq 2\,y \\ 3 & \text{si } x=2\,y \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{cuando } x\,y\neq 0 \\ 1 & \text{cuando } x\,y=0 \end{cases}$ *d*) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(2,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(2,0) \end{cases}$ *f*) $f(x,y)=\begin{cases} x & \text{si } 4\,x^2+y^2<1 \\ 2\,x+y & \text{si } 4\,x^2+y^2\ge 1 \end{cases}$

10. Sea $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x\,(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,-1) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,-1) \end{cases}$. Determine, si es posible, el valor de k para que f resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

11. Sea $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$.
   a) Halle las curvas de nivel de f.
   b) Determine las intersecciones de la gráfica de f con los planos coordenados.
   c) Realice un gráfico aproximado de f.

12. Sean $L=\lim\limits_{\vec{X}\to\vec{A}} f(\vec{X})$ y el límite por curva $L_C=\lim\limits_{\vec{X}\xrightarrow{C}\vec{A}} f(\vec{X})$ donde $C\subset\mathbb{R}^n$ con $n>1$ es una curva incluida en el dominio de f que contiene al punto $\vec{A}$, tomando –para el análisis de L_C– únicamente puntos $\vec{X}\in C$.
   a) Proponga un ejemplo de campo escalar f con algún L_C finito, pero que no exista L.
   b) Demuestre que si existe L, existe L_C para toda C.

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y el punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Definimos las funciones $\vec{g}$ y $\vec{h}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ mediante:
$$\vec{g}(x) = (x, b, f(x, b)) \;\text{ y }\; \vec{h}(y) = (a, y, f(a, y)).$$
   a) Estudie las relaciones entre el gráfico de f y los gráficos de los conjuntos imagen de $\vec{g}$ y $\vec{h}$.
   b) Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $(a, b) = (1, 2)$, halle las expresiones de $\vec{g}$ y $\vec{h}$. Grafique.
   c) Si f es continua en (a, b), ¿es $\vec{g}$ continua en a?. Justifique.
   d) Proponga un ejemplo para mostrar que $\vec{g}$ puede ser continua en a sin que f sea continua en (a, b).

4. Superficies

14. Verifique que -en cada caso- el conjunto imagen de la función vectorial que se indica es una superficie, halle una expresión cartesiana para la misma y represéntela gráficamente.
   a) $\vec{F}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ con $u^2 + v^2 \leq 9$
   b) $\vec{F}(u, v) = (2\cos(u), 2\,\mathrm{sen}(u), v)$ con $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2]$
   c) $\vec{F}(x, y) = (x, y, 2 - 4\,x - 6\,y)$ con $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\,x + 3\,y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
   d) $\vec{F}(x, y) = (x, y, 4 - x^2)$ con $(x, y) \in [-2, 2] \times [0, 3]$

15. Halle una ecuación vectorial para las siguientes superficies.
   a) $x^2 + y^2 = 16$
   b) $z = x\,y$
   c) $y = x$
   d) $x^2 - 4\,x + y^2 - z = 0$

16. Determine la ecuación de las líneas coordenadas de las siguientes superficies. Interprete gráficamente.
   a) $\vec{F}(u, v) = (\cos(u), \mathrm{sen}(u), v)$ con $(u, v) \in [0, 2\,\pi] \times [0, 2]$
   b) $\vec{F}(u, v) = (u, v, u^2 + 4\,v^2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$
   c) $\vec{F}(x, y) = (x, y, 1 + x + y)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
   d) $\vec{F}(x, y) = (x, y, \sqrt{10 - x^2 - y^2})$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y^2 \leq 9$

III – Derivabilidad. Diferenciabilidad.

1. Derivada de función vectorial de una variable. Recta tangente y plano normal a curvas

1. Calcule, si quedan definidas, las derivadas que se indican en cada caso.
   a) $\vec{g}\,'(0)$, si $\vec{g}(t) = (2\,\text{sen}(t), t\,\cos(t))$ con $t \in \mathbb{R}$
   b) $\vec{\sigma}\,'(0)$, si $\vec{\sigma}(t) = \begin{cases} (\text{sen}(t)/t, 2e^t) & \text{si } t \neq 0 \\ (\quad 1 \quad , 2\ ) & \text{si } t = 0 \end{cases}$
   c) $\vec{g}\,'(\pi)$, si $\vec{g}(t) = \left(\dfrac{\text{sen}(2\,t)}{t-\pi}, \cos(t/2)\right)$ con $t \in \mathbb{R} - \{\pi\}$, siendo $\vec{g}(\pi) = (2, 0)$
   d) $\vec{\sigma}\,'(0)$, si $\vec{\sigma}(x) = \begin{cases} (\ x, \quad x^2 \quad) & \text{si } x \geq 0 \\ (\ x, \ x^2+1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. Sea C la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (R\,\cos(t), R\,\text{sen}(t)), t \in [0, 2\pi)$, $R > 0$ constante. Halle la ecuación de su recta tangente en $\vec{\sigma}(\pi/4)$. Grafique la curva y la recta tangente indicando la orientación de la curva.

3. Sea C la curva imagen de la función vectorial $\vec{\sigma}(t) = (t^2, t^3+1, t^3-1), t \in [1, 4]$.
   a) Halle la ecuación de su recta tangente y su plano normal en el punto $(4, 9, 7)$.
   b) Calcule el módulo de su vector tangente $\vec{\sigma}\,'(t_0)$, si $\vec{\sigma}(t_0) = (4, 9, 7)$.
   c) Verifique que C es una curva plana.
   d) Halle la intersección de C con el plano de ecuación $y + z = 2$.

4. Sea C la curva de ecuación $\vec{X} = (t, \sqrt[3]{t}\,), t \in [-1, 8]$.
   a) Grafique la curva en el espacio xy.
   b) Halle ecuaciones para su recta tangente y su recta normal en el punto $(1, 1\,)$.

5. Si $\vec{X} = \overbrace{(\sqrt{5}\,\cos(t), \sqrt{5}\,\text{sen}(t))}^{\vec{g}(t)}$, $t \in \mathbb{R}$ es la posición de un punto material en el plano xy en función del tiempo t, su velocidad es $\vec{v}(t) = \vec{g}\,'(t)$ y su aceleración es $\vec{a}(t) = \vec{g}\,''(t)$.

   a) Calcule y grafique la velocidad y la aceleración del punto material cuando pasa por $(1, 2)$.

   b) Verifique que en este ejemplo el módulo de la velocidad (rápidez) y el de la aceleración se mantienen constantes; indique las correspondiente unidades de medida cuando las coordenadas de la posición se dan en metros (m) y el tiempo en segundos (s).

6. En los siguientes casos, halle una parametrización regular de la curva definida por el par de ecuaciones y obtenga una ecuación para su recta tangente en el punto que se indica.

   a) $y = 4 - x$, $z = 4 - x^2$, $\quad A = (1, 3, 3)$

   b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad A = (0, 1, 1)$

   c) $z = x + y^2$, $x = y^2$, $\quad A = (4, 2, 8)$

   d) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z = x^2 + y^2$, $\quad A = (1, 1, 2)$

7. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Una abeja vuela ascendiendo a lo largo de la curva intersección de $z = x^4 + x\,y^3 + 12$ con $x = 1$. En el punto $(1, -2, 5)$ sigue a lo largo de la recta tangente en el sentido de las y crecientes. ¿En qué punto la abeja cruza al plano $y = 1$?.

   b) Una partícula se mueve en el plano de manera que su posición en el tiempo t es $\vec{r}(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t))$ con $t \in \mathbb{R}$. Calcule los valores máximos de los módulos de su velocidad y de su aceleración. Dibuje aproximadamente la trayectoria y los vectores velocidad y aceleración.

   c) Una partícula se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la parte superior de la parábola de ecuación $y^2 = 2\,x$, con rapidez constante de 5 metros/segundo. ¿Cuál es su vector velocidad al pasar por el punto $(2, 2)$?.

2. Derivadas de funciones de varias variables

8. En los siguientes casos, calcule las funciones derivadas parciales de f y luego evalúelas en los puntos indicados.

   a) $f(x, y) = x\,y + x^2$, en $(2, 0)$

   b) $f(x, y) = \text{senh}(x^2 + y)$, en $(1, -1)$

   c) $f(x, y, z) = \dfrac{x\,z}{y + z}$, en $(1, 1, 1)$

d) $f(x,y,z)=\ln(1+x+y^2\,z)$, en $(1,2,0)$ y en $(0,0,0)$

e) $f(x,z)=\operatorname{sen}(x\sqrt{z})$, en $(\pi/3,4)$.

f) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, en $(-3,4)$

g) $f(x,y)=\int_x^{y^2}\operatorname{sen}(\ln(1+t^3))\,dt$, en $(1,2)$

9. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones en el origen. Analice la continuidad de las funciones y de sus derivadas parciales en el origen.

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2\,x^3-y^3}{x^2+3\,y^2} & \text{para } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{para } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2\,y^2}{x-y} & \text{para } x\neq y\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{cuando } x\,y\neq 0\\ 1 & \text{cuando } x\,y=0\end{cases}$

10. Determine el dominio natural y obtenga las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones, indicando el dominio natural de dichas derivadas:

a) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$

b) $f(x,y,z)=x\,\operatorname{sen}(y)+y\,\cos(z)$

c) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}(x/y)$

d) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$

e) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z+1)$

11. Dada $f(x,y)=e^x\operatorname{sen}(y)$, demuestre que f es armónica (f es de clase C^2 y satisface $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$).

12. Dada $f(x,y)=\begin{cases}9-x^2-y^2 & \text{cuando } x^2+y^2\leq 9\\ 0 & \text{cuando } x^2+y^2>9\end{cases}$. Analice la continuidad y la existencia de derivada parcial respecto de y en el punto $(3,0)$.

13. Analice la existencia de las derivadas direccionales de la siguientes funciones en los puntos y direcciones dadas:

a) $f(x,y)=3\,x^2-2\,x\,y \qquad P_0=(0,2) \qquad \breve{v}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x\,y} & \text{si } x\,y\geq 0\\ x+y & \text{si } x\,y<0\end{cases} \qquad P_0=(0,0) \qquad \breve{v}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $\breve{v}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

14. Analice la existencia de derivadas direccionales en el origen según distintas direcciones e indique si, en dicho punto, existen direcciones de derivada nula.

a) $f(x,y)=\dfrac{x+1}{x^2+y^2+1}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}x\,y\,\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f(x,y)=\sqrt{x^n+y^n}\ ,\ n\in\mathbb{N}-\{1\}$

d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3. Diferenciabilidad. Plano tangente y recta normal a superficies

15. Halle las matrices jacobianas de los siguientes campos. Cuando sea posible, también exprese los gradientes correspondientes.

a) $\vec{F}(x,y)=(3\,x^2y,x-y)$

b) $\vec{G}(x)=(x^2+1,2\,x)$

c) $h(x,y,z)=x\,y+z^2x$

d) $\vec{L}(x,y)=(x^2y,y,x-x\,y)$

e) $\vec{N}(x,y,z)=(2\,x\,y,x^2-z\,e^y)$

f) $f(x,y)=x\ \text{sen}(2\,x-y)$

16. Sea $f(x,y)=x\sqrt{x\,y}$ y el punto $A=(1,4)$ interior a su dominio natural.

a) Indique razones suficientes para asegurar que f es diferenciable en A.

b) Halle los versores según los cuales las derivadas direccionales de f en A resultan máxima, mínima y nula, e indique los valores de dichas derivadas.

17. Sabiendo que $f\in C^1$ y que $f'(A,(0.6,0.8))=2$ y $f'(A,(0.8,0.6))=5$ son los valores de sus derivadas en A según los versores que se indican, calcule la máxima derivada direccional de f en A e indique en qué dirección se produce (el versor correspondiente).

18. Dada la superficie S de ecuación $z=f(x,y)$ que admite plano tangente de ecuación $3\,x+y+2\,z=6$ en el punto $A=(2,1,z_0)$, analice si la recta normal a S en A interseca a la superficie de ecuación $y=x^2$.

19. Siendo $\vec{X} = (1+2\,u,\ 3\,u-1,\ 5\,u)$ con $u \in \mathbb{R}$ una ecuación de la recta normal a la superficie Σ en $A = (5,5,10)$, analice si el plano tangente a Σ en A tiene algún punto en común con el eje x.

20. Demuestre que si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n > 1$ es una transformación lineal, la derivada direccional de L en A según $\breve{r} \in \mathbb{R}^n$ resulta $L'(A, \breve{r}) = L(\breve{r})$, independiente del punto $A \in \mathbb{R}^n$.

21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en todo el plano. Sabiendo que el plano tangente a la superficie gráfico de f en el punto $(1, -\frac{1}{2}, f(1, -\frac{1}{2}))$ tiene ecuación $2x - 4y - 2z = -6$, calcule $f(1, -\frac{1}{2})$ y $\nabla f(1, -\frac{1}{2})$.

22. Dado el campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ interior a D, y teniendo en cuenta que la ecuación vectorial de su gráfica puede expresarse como:

$$\vec{X} = (x\,, y\,,\ f(x,y)) \ \text{ con } \ (x,y) \in D,$$

demuestre que el vector $\vec{N_0} = (-\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(P_0), 1)$ es normal a la gráfica de f en $Q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. En particular, para los siguientes casos:

- Justifique sintéticamente que f es diferenciable en P_0.
- Represente el gráfico de f, el plano tangente a la superficie en Q_0 y el vector $\vec{N_0}$ aplicado en el punto Q_0.

a) $f(x,y) = 5 + 2\,x - 3\,y$, $P_0 = (0,0)$

b) $f(x,y) = x^2 - 2\,x + y^2$, $P_0 = (-1,2)$

c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $P_0 = (1,-1)$

23. ¿Cuáles son los puntos de la superficie gráfico de $f(x,y) = x\,y\,e^{x\,+\,y}$, para los cuales resulta el plano tangente horizontal (paralelo al plano xy)?.

24. Sea $f(x,y,z) = e^{x\,z\,+\,x\,y^2}$. Calcule un valor aproximado de $f(0.1,\ 0.98,\ 2.05)$ utilizando una aproximación lineal.

25. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $f(1,2) = 5$. Sabiendo que su derivada direccional en $(1,2)$ es máxima en la dirección del versor $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y que $f'_x(1,2) = 3\sqrt{2}$:

a) Halle una ecuación para el plano tangente a la superficie gráfica de f en el punto $(1, 2, f(1,2))$.

b) Calcule un valor aproximado de $f(1.01,\ 1.98)$ utilizando una aproximación lineal.

26. Demuestre que $\ln(2\,x + 1/y) \cong 1 + 2\,x - y$ en un entorno de $(x_0, y_0) = (0,1)$.

27. Halle una expresión lineal que permita aproximar $f(x,y,z) = (x+1)^2 \ln(1+y+z)$ en un entorno de $(0,0,0)$.

28. La elevación de una montaña sobre el nivel del mar está dada por $f(x,y) = 1500\, e^{-(x^2+y^2)/200}$. El semieje positivo de las x apunta hacia el este y el de las y hacia el norte.
    a) Halle y dibuje algunas curvas de nivel de f.
    b) Un alpinista está en el punto $(10, 10, 1500/e)$. Si se mueve hacia el noreste, ¿asciende o desciende?, ¿con qué pendiente?.

29. Considere la superficie S de ecuación vectorial $\vec{X} = \overbrace{(u+v, u-v, u\,v)}^{\vec{F}(u,v)}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
    a) Halle una ecuación cartesiana para S.
    b) Halle una ecuación para el plano tangente a S en $(3,-1,2)$.
    c) Analice si la reta normal a S en $(3,-1,2)$ tiene algún punto en común con el eje y.

30. Determine ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la superficies siguientes en los puntos que se indican:
    a) Paraboloide elíptico de ecuación cartesiana $4\,x^2 + y^2 - 16\,z = 0$ en el punto $(2,4,2)$
    b) Porción de superficie cilíndrica elíptica de ecuación vectorial:
    $$\vec{X} = (v, 2+\cos(u), 2\,\mathrm{sen}(u)),\ 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 4,\ Q_0 = (2, 3/2, \sqrt{3})$$
    c) Porción de superficie cónica circular recta de ecuación vectorial:
    $$\vec{X} = (v\,\cos(u), 2\,v, v\,\mathrm{sen}(u)),\ 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 3,\ Q_0 = (0,4,2)$$
    d) Porción de hiperboloide de una hoja de ecuación vectorial:
    $\vec{X} = (\cos(u)\cosh(v) + 1, \mathrm{sen}(u)\cosh(v), \mathrm{senh}(v)),\ D = [0,\pi] \times [-1,1],\ Q_0 = (1,1,0)$

31. Sea $\vec{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{\Phi}(u,x) = (x, 2\cos(u), 2\sin(u))$ con $D = [0, 2\pi] \times [0,1]$.
    a) Demuestre que $\vec{\Phi}$ permite parametrizar una porción de superficie cilíndrica. Grafique el conjunto imagen de $\vec{\Phi}$.
    b) Halle una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $(1, \sqrt{3}, 1)$ y analice si este plano interseca a los tres ejes de coordenadas.

32. Se desea estimar el área de un rectángulo, cuyos lados medidos en metros son $a = 10 \pm 0{,}1$ y $b = 100 \pm \Delta b$. Determine con qué precisión mediría el lado b (Δb) para que la contribución de la incerteza en la medición de a y b en el error del área sean del mismo orden.

33. El período de oscilación de un péndulo ideal es $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ donde l es la longitud del hilo y g es la aceleración de la gravedad. Calcule cotas para los errores absoluto y relativo que se cometen en la determinación de g si el período es $T = 2$ segundos (s) con error menor a $0{,}02$ s y $l = 1\,\mathrm{m}$, con error inferior a $0{,}001$ m (considere $\pi = 3{,}1416$).

4. Ítems que permiten reafirmar conceptos teóricos

34. Demuestre que si un campo es diferenciable en un punto, entonces es continuo y derivable en toda dirección en ese punto.

35. Demuestre que si $f \in C^2$, entonces $f \in C^1$. Recuerde que f'' es $(f')'$.

36. Si la derivada de f en A según el versor $\breve{r} = (u, v)$ es $f'(A, \breve{r}) = 2\,u^2 + v \;\; \forall \breve{r} \in \mathbb{R}^2$, ¿qué se puede afirmar acerca de la diferenciabilidad de f en A?.

37. Dada $f(x, y) = \dfrac{x^2\,\text{sen}(y)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$.
    a) Verifique que f es continua y derivable en toda dirección en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.
    b) Halle los cuatro versores según los cuales la derivada direccional de f en $(0, 0)$ es nula.

38. Dada $f(x, y) = \dfrac{x\,y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$.
    a) Verifique que f es continua y derivable en toda dirección en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.
    b) Halle los versores según los cuales la derivada direccional de f en $(0, 0)$ es máxima, mínima y nula, indicando los correspondientes valores de dichas derivadas.

39. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2\,y^2}{x^2 + y^2}$ para $(x, y) \neq (0, 0)$. Demuestre que si se define $f(0, 0) = 0$, la función f resulta diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

40. Analice la continuidad y la diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen.
    a) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$
    b) $f(x, y) = \dfrac{x^2\,y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$

41. Sea $f(x, y) = \begin{cases} x\,y\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{cuando } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{cuando } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Verifique que las derivadas cruzadas de f en $(0, 0)$ existen y son distintas. Analice si $f \in C^2$.

42. <u>*Optativo*</u>: Dada $f(x, y) = (x^2 + y^2)\,\text{sen}(1/(x^2 + y^2))$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$, demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$ pero sus derivadas parciales de 1° orden no son continuas en dicho punto.

IV – Funciones compuestas e implícitas.

1. Composición de funciones

1. Dadas las funciones f y g, calcule **sin realizar la composición** la matriz jacobiana de $h = f \circ g$ en el punto que se indica.
   a) $f(u,v) = u\,v^2 + 2\,u\,v, \quad \vec{g}(x,y) = (x\,\sqrt{y+1}, y - x), \quad A = (2,3)$
   b) $\vec{f}(u,v) = (u\,v,\, u + v^2,\, \ln(v)), \quad \vec{g}(x,y) = (x^2 - y^2, x\,y), \quad A = (1,2)$
   c) $f(x,y) = x^3 + y^2, \quad \vec{g}(t) = (\operatorname{sen}(t) - 1, 2 + t + t^2), \quad t_0 = 0$

2. Dada $f(x,y) = \operatorname{sen}((x-2)^2 + y - 1)$ exprésela como composición de dos funciones, $f(x,y) = g(h(x,y))$, indicando dominio y codominio de cada una de ellas.

3. Dadas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\vec{g}(x,y) = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,, \ln(x^2 + 4\,y^2 - 16)\right)$, ¿es posible definir $h = f \circ g$?

4. Demuestre que $f(x,y) = \dfrac{4\,x^4 + 12\,x^2y^2 + 9\,y^4}{4 - 2\,x^2 - 3\,y^2}$, es constante en los puntos de la elipse de ecuación $2\,x^2 + 3\,y^2 = 1$.

5. Dadas $\vec{f}(x,y) = (x\,y^4 + y^2x^3, \ln(x))$ y $\vec{g}(u,v) = (v\sqrt{u}, \operatorname{sen}(u-1)/u)$.
   a) Halle sus dominios naturales y las expresiones de $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$ y de $\vec{w} = \vec{g} \circ \vec{f}$.
   b) Calcule $\vec{h}'_v(1, \mathrm{e})$ aplicando la regla de la cadena y usando $\vec{h}(u,v)$ hallada en "*a*)".

6. Dada $h(u) = f(\vec{g}(u))$, calcule $h'(0)$ sabiendo que $f(x,y) = x^2 + 2\,y$ y $\vec{g}(u) = (|u|, u^2 + u)$. ¿Pudo aplicar la regla de la cadena?

7. Si $h = f \circ \vec{g}$, calcule $\nabla h(A)$ en los siguientes casos.
   a) $A = (0,1)\,,\ f(u,v) = \sqrt{u/v}$ y $\vec{g}(x,y) = (1 + \ln(x+y), \cos(x\,y))$
   b) $A = (1,0)\,,\ \vec{g}(x,y) = (x, x\,e^{y^2}, x - y)\,,\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y $\nabla f(1,1,1) = (3,1,2)$

8. Siendo $z = e^x - x^2y - x$ con $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2\,t^2 \end{cases}$ resulta $z = h(t)$. Determine las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tales que $h = f \circ \vec{g}$. Demuestre que $h(1)$ es un máximo relativo.

9. Sea $w = e^{x-y} - z^2\,y + x$ con $x = v - u$, $y = u + u^3\,\ln(v-1)$, $z = u\,v$. Halle la dirección de máxima derivada direccional de $w = w(u, v)$ en el punto $(1, 2)$ y el valor de dicha derivada máxima.

10. Demuestre que $z = f(x/y)$ satisface la ecuación $x\,z_x + y\,z_y = 0$, ¿qué hipótesis supuso?.

11. Si $f(x, y) = x + y$ y $g(u) = (u - 1)^2$, verifique que $\nabla(g \circ f)$ resulta nulo en todos los puntos de la recta de ecuación $x + y = 1$.

12. *Campo escalar en puntos de una curva*: Sea f un campo escalar diferenciable, C una curva regular parametrizada mediante la función $\vec{g}$ y considere que los puntos de C son interiores al dominio de f. Demuestre que si $\vec{g}(t_0) \in C$, $(f \circ g)'(t_0) = \nabla f(\vec{g}(t_0)) \cdot \vec{g}\,'(t_0)$. Indique cómo ha utilizado las hipótesis enunciadas.

13. Sea $f \in C^1(D)$ una función escalar de dos variables, el punto A interior a D y $\nabla f(A) \neq \bar{0}$. Demuestre que $\nabla f(A)$ es perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por A, y está localmente orientado hacia los niveles crecientes.
Verifíquelo gráficamente para $f(x, y) = x^2 + y^2$ en los puntos $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ y $(-1, -1)$ pertenecientes a la curva de nivel 2.

14. Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \vec{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ una función biyectiva y C^2 que satisface
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{f}(1, -2) = (1, 2).$$
    a) Halle un vector tangente en $(1, 2)$ a la curva imagen por $\vec{f}$ de la circunferencia de ecuación $u^2 + v^2 = 5$.
    b) Halle un vector tangente en $(1, -2)$ de la preimagen por $\vec{f}$ de la recta de ecuación $y = 2\,x$.

15. Sea S la superficie parametrizada por $\vec{F}(u, v) = (u\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v), u)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y C la curva de ecuación $v = u^2 - 1$ en el plano uv.
    a) Halle una parametrización regular para la curva C^*, imagen de C a través de $\vec{F}$.
    b) Sea A un punto cualquiera de C^*, pruebe que el plano tangente a S en A contiene a la recta tangente a C^* en dicho punto.

16. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Parametrice la superficie S definida por $z = y\,g(x/y)$ con $y > 0$. Pruebe que el plano tangente a S en cada uno de sus puntos, pasa por el origen.

17. Suponiendo que f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes y $z = f(x, y)$ donde $x = 2\,s + 3\,t$ e $y = 3\,s - 2\,t$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

18. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función armónica (f es de clase C^2 y satisface $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$), demuestre que $f(x^3 - 3\,x\,y^2, 3\,x^2\,y - y^3)$ también es armónica.

2. Funciones definidas en forma implícita

19. Demuestre que las ecuaciones dadas definen implícitamente la variable z en función de las variables x e y en un entorno del punto (x_0, y_0), cuyo gráfico pasa por $A = (x_0, y_0, z_0)$. Calcule $\nabla f(x_0, y_0)$ en cada caso.
   a) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $A = (4, 5, z_0)$, $z_0 > 0$
   b) $z = 2 - \ln(z + 3\,x - y^2)$, $A = (1, 2, 2)$

20. Demuestre que $(x^2 + \ln(x + z) - y\,,\, y\,z + e^{x\,z} - 1) = (0, 0)$ define una curva C regular en un entorno de $(1, 1, 0)$ y halle una ecuación para el plano normal a C en dicho punto.

21. Si la ecuación $(x, y) = (u^3 + v^3,\ u\,v - v^2)$ define implícitamente $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ con ambas gráficas que pasan por $(2, 0, 1)$, calcule $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ en $(2, 0)$.

22. Demuestre que el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x\,y^2 + z\,u + v^2 & = & 3 \\ x^3\,z + 2\,y - u\,v & = & 2 \\ x\,u + y\,v - x\,y\,z & = & 1 \end{array} \right.$$

que se satisface para $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1, 1)$, define las variables x, y, z como funciones de u, v en un entorno de (u_0, v_0) y calcule $y'_u(u_0, v_0)$.

23. Un cierto gas satisface la ecuación $p\,V = T - \dfrac{4\,p}{T^2}$, donde p es la presión, V el volumen, T la temperatura y $(p_0, V_0, T_0) = (1, 1, 2)$.
   a) Calcule $\partial T / \partial p$ y $\partial T / \partial V$ en (p_0, V_0).
   b) Suponiendo $p = 1$ y $V = 1$, la relación entre las variables se verifica para $T = 2$. Analice si existe algún valor real $T \neq 2$ que también satisfaga la mencionada relación.
   c) Si mediciones de p y V arrojaron valores $p = 1 \pm\ 0.001$ y $V = 1 \pm\ 0.002$, acote el error asociado a la estimación de la temperatura mediante $T = 2$.

24. Halle una ecuación cartesiana para la recta tangente a C en los siguientes casos

   a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 + 2\,x\,y = 4\}$, en $(1, 1)$

   b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x\,y + \ln(y) = e^x\}$, en $(0, \mathrm{e})$

   c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x\,y + z, y + x - 2) = (3, 5)\}$, en $(1, 6, -3)$

25. Demuestre que la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y la superficie cónica de ecuación $z^2 = a^2\,x^2 + b^2\,y^2$ son ortogonales en todo punto de su intersección.

26. Sea C la curva definida como intersección de las superficies de ecuaciones $y = x^2$ y $e^{x\,z - 1} - x\,y + \ln(y\,z) = 0$. Si L_0 es la recta tangente a C en $A = (1, 1, 1)$, calcule la distancia desde A hasta el punto en que L_0 interseca al plano de ecuación $x + y = 8$.

27. El siguiente sistema de ecuaciones define implícitamente una curva en un entorno del punto $A = (5, 0, 4)$
$$\begin{cases} \ln(x - z) + y + x = 5 \\ e^{y\,z} + z - x = 0 \end{cases}$$
Halle la intersección de la recta tangente a dicha curva en el punto A con el plano de ecuación $x + z = 10$.

28. *Propiedad del plano tangente a una superficie*: Sea S una superficie que admite plano tangente Π_0 en el punto A. Demuestre que para toda curva C trazada sobre S que admite recta tangente en A, dicha recta está incluida en Π_0.
Considere S definida en forma implícita y C en forma paramétrica vectorial. Indique las hipótesis que supone para las funciones que permiten dichas definiciones.

V – Polinomio de Taylor. Extremos y extremos condicionados.

1. Polinomio de Taylor

1. Exprese el polinomio $p(x,y) = x^3 - 2\,x\,y + y^2$ en potencias de $(x-1)$ e $(y+1)$.
2. Obtenga el polinomio de Taylor de 2° orden de f en A.
   a) $f(x,y) = e^{x+y}\cos(y-1)$, $A = (-1,1)$
   b) $f(x,y) = \cos(x+y)$, $A = (0,0)$
   c) $f(x,y,z) = \sqrt{x\,y}\,\ln(z)$, $A = (1,4,1)$
3. Aproxime el valor $1.01^{1.98}$ utilizando el polinomio de Taylor de primer orden (aproximación lineal) de una función adecuada en el punto $A = (1,2)$.
4. Demuestre que en un entorno del punto $(1,2)$ resulta $e^{x-1}\ln(y-1) \cong y-2$.
5. Sabiendo que la ecuación $y - z + e^{z\,x} = 0$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ cuyo gráfico pasa por el punto $(0,0,1)$, calcule un valor aproximado para $f(0.01,-0.02)$ mediante el polinomio de Taylor de 2° orden.
6. Sabiendo que $p(x,y) = x^2 - 3\,x\,y + 2\,x + y - 1$ es el polinomio de Taylor de 2° orden de f en el punto $(2,1)$, halle una ecuación cartesiana para el plano tangente a la gráfica de f en $(2,1,z_0)$.
7. Sea $w = f(u,v)$ definida en forma implícita por $3\,v + u\,e^{2\,w} - w = 1$ con $f(7,-2) = 0$. Si $u = x - 2\,y$ y $v = x + y$, halle el polinomio de Taylor de primer orden para $w(x,y)$ en el punto $(1,-3)$ y utilícelo para calcular aproximadamente el valor de w cuando $x = 0.97$ e $y = -3.01$.

2. Extremos

8. Analice la existencia de extremos locales (o relativos) de f en su dominio natural. ¿Se puede determinar si alguno de los extremos hallados es absoluto en dicho dominio?

   a) $f(x,y)=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$ *b*) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

   c) $f(x,y)=\sqrt{(x-1)\,y}$ *d*) $f(x,y)=\sqrt{\ln(2-x^2-y^2)}$

   e) $f(x,y,z)=(x^2+y^2)(2-e^{z^2})$ *f*) $f(x,y)=\ln(1+x^4+y^4)$

   g) $f(x,y)=x^3+y^3+48/x+48/y$ *h*) $f(x,y)=(2\,x-3\,y+4)^2$

   i) $f(x,y)=x^3+y^3+3\,x^2-2\,y^2-8$ *j*) $f(x,y)=(x-3\,y)^2+(x+y)^4$

9. Calcule los extremos de $f(x,y)=x^2+x\,y+y^2-a\,x-b\,y$, para $a,b\in\mathbb{R}$ constantes.

10. Proponga una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, que produzca un único máximo local en el punto $(1,-2)$ de valor 5.

11. Dada $f(x,y)=a\,x^3+b\,x\,y+c\,y^2$, halle todos los valores de a,b y c de manera que $(0,0,0)$ sea un punto silla de la gráfica de f y que $f(1,1)$ sea un mínimo local de los valores de f. ¿Es $f(0,0)$ un extremo local?.

12. Sea f una función positiva y C^3 cuyo gradiente se anula sólo en los puntos $P_1=(1,-1)$ y $P_2=(-1,1)$. Sabiendo que el determinante hessiano en esos puntos no es nulo, que $f(P_1)=10$ es un máximo local y que $f(P_2)=3$ es un mínimo local, estudie los extremos de $g(x,y)=1/f(x,y)$.

13. Sea $f(x,y)=h(g(x,y))$, donde $g(x,y)=2-3\,\dfrac{(x-1)^2}{2}-(y-2)^2+2\,(x-1)(y-2)$ y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función C^2 que satisface $h'(u)>0$, $\forall\,u\in\mathbb{R}$. Analice los extremos de f. Justifique.

14. Resuelva:

    a) Halle una ecuación para el plano tangente en $(1,2,4)$ a la superficie de ecuación $z=f(x,y)+x^2$, sabiendo que f es C^2 y que $f(1,2)=3$ es un máximo relativo de los valores de f.

    b) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función C^3 que satisface $\nabla f(1,2)=(1,0)$, y cuya matriz hessiana en $(1,2)$ es $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$. Halle k de manera que $g(x,y)=f(x,y)+k\,x+(y-2)^2$ tenga extremo relativo en $(1,2)$. ¿Qué tipo de extremo es?.

c) Sea la función $G \in C^2$. Sabiendo que G produce un máximo relativo de valor 0 en $(1, 2, 3)$, halle una ecuación para el plano tangente en $(1, 2, 3)$ a la superficie de ecuación $G(x, y, z) = 4\,x - y^2$.

15. Halle los extremos locales de $f(x, y) = 27\,x + y + (x\,y)^{-1}$ en el primer cuadrante ($x, y \in \mathbb{R}^+$).

16. Demuestre que $f(x, y, z) = 4\,x\,y\,z - x^4 - y^4 - z^4$ tiene un máximo local en $(1, 1, 1)$.

17. Halle los extremos relativos de los valores de f definida en su dominio natural.
    a) $f(x, y, z) = -x^3 + 3\,x + 2\,y^2 + 4\,y\,z + 3\,y + 8\,z^2$
    b) $f(x, y, z) = y + x/y + z/x + 1/z$

18. Halle b de manera que $f(x, y) = (b^{-1} - 1)\,(y - 2)^2 + (x - 1)^2 - 2\,(y - 2)^2$ tenga un extremo local en el punto $(1, 2)$ y clasifíquelo.

19. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Demuestre que $f(0, 0)$ es extremo local y clasifíquelo en función del valor de la constante k. ¿Para qué valores de k también es un extremo absoluto en $\mathbb{R}^2$?

20. La función C^2, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ evaluada en puntos de la recta de ecuación $y = 3\,x + 2$ resulta $x^2 - \ln(x - 1) + 3$. ¿Es posible asegurar que f no tiene un extremo local en $(2, 8)$?.

21. Demuestre que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z + 2$ tiene un mínimo relativo en $(-1, 1, 12)$ cuando se la evalúa en puntos del plano de ecuación $\vec{X} = (u - 3, v + 4, 2\,u - 2\,v + 2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. ¿El punto hallado resulta punto crítico de la función en su dominio?.

3. Extremos condicionados

22. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$ en ...
    a) ... la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
    b) ... el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.

23. Halle los extremos de $f(x, y, z) = x\,z - y\,z$ evaluada en puntos de la curva intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + z^2 = 2$ e $y\,z = 2$.

24. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = 2\,x\,(y - 1) - x - y$ en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 4)$ (interior y frontera).

25. Un cuerpo tiene forma de paralelepípedo rectangular de volumen V y su superficie frontera tiene área A. Determine las dimensiones del paralelepípedo si se desea que dicha área sea mínima para un volumen V dado.

26. Un envase cilíndrico debe tener 1 litro de capacidad, el material para las tapas cuesta $0.02\,\$/\mathrm{cm}^2$ mientras que el de la cara lateral $0.01\,\$/\mathrm{cm}^2$. Calcule las dimensiones del envase para que el costo sea mínimo.

27. Calcule el máximo valor de $f(x,y,z) = x^2 + x\,y + y^2 + x\,z + z^2$ sobre la superficie esférica de radio 1 con centro en el origen.

28. Calcule la distancia entre los planos de ecuaciones $x + y - z = 4$ y $z = x + y + 7$.

29. Halle el punto de la parábola de ecuación $y = x^2$ más cercano al punto $(1, 1/2)$, aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange y realizando la composición correspondiente.

30. Halle los puntos de la superficie de ecuación $z = \sqrt{x\,y + 1}$ más cercanos al origen. Observe que la superficie está definida para los puntos (x,y) que satisfacen $x\,y \geq -1$, por lo tanto deberá analizar los extremos en el abierto $x\,y > -1$ y en el borde $x\,y = -1$.

VI – Ecuaciones diferenciales - 1ra. parte.

1. Conceptos básicos

1. Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)
   - Indique su orden e identifique cuáles son lineales
   - A la derecha de cada EDO se indica una relación entre sus variables, verifique que dicha relación es una solución de la ecuación y analice si es la solución general.

	Ecuación diferencial	Solución a analizar
a)	$y' = 3\,y$	$y = C\,e^{3\,x}$
b)	$y' + 4\,y = 8\,x$	$y = 2\,x - e^{-4\,x} - 1/2$
c)	$y'' - 2\,y/x^2 = 0$	$y = C\,x^2 - x^{-1}$
d)	$y''' + y'' - y' - y = 1$	$y = -1 + 2\,e^x$
e)	$x\,y' = 2\,y$	$y = x^2$
f)	$y\,dy + 4\,x\,dx = 0$	$y^2 + 4\;x^2 = C$

2. Dada la ecuación diferencial $y = x\,y' - e^{y'}$, verifique que $y = C\,x - e^C$ es su solución general, mientras que $y = x\,\ln(x) - x$ es una solución singular.

3. En los siguientes casos, para cada EDO se indica su SG. Verifique que la SG dada es correcta y grafique a mano alzada la solución particular (SP) que satisface las condiciones dadas.

	Ecuación diferencial	Solución General	Condiciones
a)	$y' - 3\,y = -3$	$y = 1 + C\,e^{3\,x}$	$y(0) = 2$
b)	$y'\,y = x$	$y^2 - x^2 = A$	$y(0) = 1$
c)	$y' = x\,y/(x^2 - 1)$	$x^2 + C\,y^2 = 1$	$y(0) = 2$
d)	$y'' - y' - 2\,y = 0$	$y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2\,x}$	$y(0) = 2, y'(0) = -3$

4. Halle una ecuación diferencial tal que la familia de curvas dada sea su solución general.
   a) $x\,y = C$.
   b) $4\,x^2 - 2\,y^3 = C$.
   c) Parábolas con eje x y vértice en el origen de coordenadas.
   d) Rectas que pasan por $(2,2)$.
   e) Circunferencias en el plano xy con centro en $(C,0)$ y radio R, con $A, R \in \mathbb{R}$.

2. Resolución de ecuaciones diferenciales

5. Dada la ecuación diferencial $y' + 2\,x\,y = 4\,x$ (tipo: *variables separables*), halle la solución que pasa por $(0,3)$.

6. Dada la ecuación diferencial $y' + x^{-1}y = 3\,x$ (tipo: *lineal de* 1° orden), halle la solución que pasa por $(1,4)$.

7. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales. En lo casos que se indican condiciones adicionales, obtenga la correspondiente solución particular.
   a) $x\,dy = dx$, $y(-1) = 3$
   b) $x\,\frac{dy}{dx} - y^2 = x\,y^2$
   c) $y' + 3\,y = 2$
   d) $y\,y' = x\ \mathrm{sen}(x^2)$
   e) $y' + y\ \mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(2\,x)$
   f) $x\,y' = x\,y - x,\ y(1) = 2$
   g) $y' + 2\,x^2y = x^2,\ y(0) = 2$
   h) $y' + y = 1,\ y(0) = 5/2$
   i) $x\,y' + y = x^2,\ y(3) = 0$
   j) $2\,x\,dx + x^2y^{-1}\,dy = 0$

8. Halle la familia de curvas tales que, en cada punto...
   a) ... la recta normal en el punto pasa por el origen de coordenadas.
   b) ... la recta tangente en el punto pasa por el origen de coordenadas.
   c) ... la recta tangente en el punto tiene ordenada al origen igual al doble de la ordenada del punto.
   d) ... la recta tangente en el punto tiene ordenada al origen igual a la suma de las coordenadas del punto.
   e) ... la recta tangente en el punto tiene abscisa al origen igual a cuatro veces la abscisa del punto.

3. Familias de curvas ortogonales

9. Halle en cada caso la familia de curvas ortogonales a la familia dada. Ilustre mediante un gráfico.
   a) $y = C\,x^2$
   b) $x\,y = C$
   c) $x^2 + y^2 = K$
   d) $2\,x + y = C$
   e) $x - 3 = B\,y^2$
   f) $y - 1 = K\,x$

4. Líneas de campo

10. En los siguientes casos verifique que la curva parametrizada mediante la función $\vec{g}$ es una línea de campo del $\vec{F}$ dado.
    a) $\vec{g}(t) = (t^2, 2\,t - 1, \sqrt{t})$ con $t > 0$, $\vec{F}(x, y, z) = (y + 1, 2, 1/(2\,z))$
    b) $\vec{g}(t) = (t^{-3}, e^t, t^{-1})$, $\vec{F}(x, y, z) = (-3\,z^4, y, -z^2)$
    c) $\vec{g}(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t), e^t)$, $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$

11. Halle una expresión para la familia de líneas de campo en los siguientes casos. Además, salvo en el caso "*e*)", dibújelas e indique su orientación.

    a) $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$
    b) $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$
    c) $\vec{F}(x, y) = \left(\dfrac{1}{2\,x - y}, \dfrac{1}{x}\right)$
    d) $\vec{F}(x, y) = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\right)$
    e) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2, z)$
    f) $\vec{F}(x, y) = (2\,x - y, y)$
    g) $\vec{F}(x, y) = (x^2, x\,y)$
    h) $\vec{E}(\vec{X}) = \vec{X}/||\vec{X}||^3$ con $\vec{X} = (x, y) \neq \vec{0}$.

VII – Integrales de línea o curvilíneas.

1. Parametrización y orientación de curvas

1. Para las siguientes curvas en $\mathbb{R}^3$, halle dos parametrizaciones que las oriente en sentidos opuestos y grafíquelas.

   a) $C : \begin{cases} x + 2\,y - z = 4 \\ y = 2\,x - 1 \end{cases}$ en el primer octante

   b) $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

   c) $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2\,x \end{cases}$ en el primer octante

   d) $C : \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{3} = 4 \\ 2\,x + y = 1 \end{cases}$

   e) Segmento de puntos extremos $A = (1, 2, 4)$ y $B = (2, 2, 5)$

2. Sea $\vec{g} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \;/\; \vec{g}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. El conjunto imagen de $\vec{g}$ es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, orientada a partir del punto $(1, 0)$ en sentido antihorario.

   a) Suponiendo que la parametrización dada describe, en función del tiempo t, el movimiento de un punto material que recorre la curva, demuestre que la velocidad ($\vec{g}\,'$) del punto tiene módulo constante (rapidez constante).

   b) Reparametrice el movimiento del punto de manera que recorra la misma curva pero cuatro veces más rápido, conservando la orientación. Dibuje los vectores velocidad y aceleración cuando el punto pasa por $(0, 1)$.

   c) Reparametrice el movimiento del punto de manera de recorrer la misma curva pero 2 veces más lento e invirtiendo la orientación. ¿Cuál es su rapidez en este caso?. Dibuje los vectores velocidad y aceleración cuando el punto pasa por $(0, 1)$.

2. Integral de campos escalares a lo largo de curvas

3. Calcule $\int_C f\, ds$ en los siguientes casos.

   a) $f(x,y) = 1/(x^2+y^2)$, $C : x^2+y^2 = 4$, $y \geq 0$.

   b) $f(x,y,z) = 2\,x - y\,z$, C recta intersección de los planos de ecuaciones $2\,y - x + z = 2$ y $x - y + z = 4$ desde $(7,4,1)$ hasta $(4,2,2)$.

4. Calcule la longitud de:

   a) La curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (t, \frac{2}{3}\,t^{3/2}, 2)$, $0 \leq t \leq 3$. Repita el cálculo pero parametrizándola por longitud de arco.

   b) La hélice de ecuación $\vec{X} = (3\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t), 4\,t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Repita el cálculo pero parametrizándola por longitud de arco tomando el punto $(0, 3, 2\,\pi)$ como origen de abscisas curvilíneas.

5. Calcule la masa de un alambre cuya forma es la de la curva intersección de las superficies de ecuaciones $z = 2 - x^2 - 2\,y^2$ y $z = x^2$ entre $(0,1,0)$ y $(1,0,1)$ en el primer octante, si su densidad es $\delta(x,y,z) = k\,x\,y$ con k constante.

6. Halle la masa de un alambre en forma de V en $\mathbb{R}^2$, cuya forma es la de la curva $y = |x|$ entre $(-1,1)$ y $(1,1)$, si su densidad en cada punto es proporcional al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto.

7. Calcule la masa de un hilo metálico cuya densidad en cada punto es proporcional al producto de las distancias desde el punto a los planos coordenados, si la forma del alambre coincide con la de la curva intersección de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $z = 2$.

8. Halle el centro de masa y la densidad media de un alambre en forma de hélice de ecuación $\vec{X} = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$, cuya densidad en cada punto queda definida por $\delta(x,y,z) = k\,(x^2+y^2+z^2)$ con k constante positiva.

9. Calcule el momento de inercia respecto de cada eje coordenado de un alambre homogéneo cuya forma es la de la curva parametrizada por $\vec{\sigma} : [-a,a] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \;/\; \vec{\sigma}(t) = (t, \cosh(t))$, si su densidad δ_0 es constante.

10. Sean $R > 0$, $f : D \to \mathbb{R} \;/\; f(x,y) = R - \sqrt{x^2+y^2}$ con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq R\}$.

    a) Justifique geométricamente que los valores de la función representan la distancia de cada punto del dominio a la circunferencia de radio R centrada en el origen.

    b) Calcule el valor medio de f sobre la curva de ecuación $\vec{X} = (t, m\,t)$ con $t \in [-a,a]$, donde m es constante y $a = \frac{R}{\sqrt{1+m^2}}$. Interprete el resultado obtenido.

11. Suponga que la curva C parametrizada por $\vec{\lambda}:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ de clase C^1 es la curva de nivel 3 de la función continua $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y su longitud es 4. Calcule $\int_C f\,ds$. ¿Cuál es el valor medio de f sobre la curva?.

3. Integral de campos vectoriales a lo largo de curvas (circulación)

12. Calcule la circulación de $\vec{f}(x,y)=(y,-x)$ desde el punto $(1,0)$ hasta el punto $(0,-1)$ a lo largo de ...
    a) ... un segmento que une los puntos.
    b) ... las 3/4 partes de la circunferencia de radio 1.

13. Calcule:
    a) $\int_{C^+}(2\,x,-y)\cdot d\vec{s}$, donde C es el cuadrado $|x|+|y|=1$.
    b) $\int_{C^+}(x\,y,x^2)\cdot d\vec{s}$, siendo C la frontera de la región del primer cuadrante definida por: $x\,y\le 1$, $y\le x^2$, $8\,y\ge x^2$.

14. Resuelva:
    a) Sea C parametrizada por $\vec{\sigma}(t)=(t,t^2,2\,t)$ con t desde 0 hasta 2. Exprese C como intersección de dos superficies y grafíquela. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de C cuando $\vec{f}(x,y,z)=(x\,y,x,z\,y)$, respetando la orientación impuesta por la parametrización dada. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?.
    b) Ídem al inciso anterior para $\vec{\sigma}(t)=(t+1,2\,t+1,t)$ con t desde -1 hasta 2, cuando $\vec{f}(x,y,z)=(x+2\,y+z,2\,y,3\,x-z)$.

15. Calcule el trabajo que realiza una fuerza constante de magnitud 2 con dirección y sentido del versor $\breve{\jmath}$, sobre una partícula puntual que sigue la trayectoria $(0,-1)\to(1,0)\to(0,1)$ a lo largo de la semicircunferencia unitaria con centro en $(0,0)$.

16. Sea $\vec{f}(x,y,z)=(2\,g(x,y,z),x\,y-9\,x\,g(x,y,z),3\,y\,g(x,y,z))$ donde g una función escalar continua en $\mathbb{R}^3$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ desde $(1,y_0,z_0)$ hasta $(8,y_1,z_1)$ a lo largo de la curva C cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $z=x-y^2$, sabiendo que la proyección de C sobre el plano xy cumple con la ecuación $x=y^3$.

17. Dado $\vec{f}(x,y,z)=(x+g(x\,y+z),\,y+g(x\,y+z),2\,z)$ con g función escalar continua, demuestre que la circulación de $\vec{f}$ desde $A=(2,0,3)$ hasta $B=(3,-1,6)$ a lo largo del segmento $\overline{AB}$ no depende de g.

3.1. Campos de gradientes

18. Analice si el campo dado admite función potencial, en caso afirmativo hállela (¿es única?).
    a) $\vec{f}(x,y) = (2\,x + y^2\,\text{sen}(2\,x), 2\,y\,\text{sen}^2(x))$
    b) $\vec{f}(x,y,z) = (x\,y, x + z\,y, y\,z)$
    c) $\vec{f}(x,y,z) = (y - 2\,x\,z + 1, x + 2\,y, -x^2)$
    d) $\vec{f}(x,y,z) = ((1 + x\,z)e^{x\,z}, x\,e^{xz}, y\,x^2 e^{x\,z})$

19. Sea $\vec{f}(x,y) = (y + x\,g(x)\,,\,3\,y + x\,g(x))$ con $\vec{f}(1,1) = (3,5)$, halle $g(x)$ tal que $\vec{f}$ admita función potencial en el semiplano $x > 0$.

20. Siendo $\vec{f}$ un campo de gradientes, demuestre -considerando las hipótesis necesarias- que las líneas de campo son ortogonales a sus conjuntos equipotenciales.
    En particular, dado $\vec{f}(x,y) = (2\,x, 1)$ cuya función potencial es nula en el punto $(1,1)$, halle las familias de líneas de campo y de líneas equipotenciales. Realice un gráfico a mano alzada, identificando las líneas de ambas familias que pasan por el punto $(-1,0)$.

21. Sea $\vec{f}(x,y) = (x, x - y^2)$.
    a) Demuestre que $\vec{f}$ no admite función potencial.
    b) Calcule la circulación de $\vec{f}$ en sentido positivo a lo largo de la curva frontera de la región descripta por $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y^2$.

22. Sea $\vec{f}(x,y,z) = (4\,x/z, 2\,y/z, -(2\,x^2 + y^2)/z^2)$ con $z \neq 0$.
    a) Demuestre que $\vec{f}$ admite función potencial para $z > 0$ y describa las superficies equipotenciales de $\vec{f}$ para el caso en que el potencial del punto $(1,1,1)$ es igual a 3.
    b) Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva descripta por:
    $$x = 1 + \log(1 + |\,\text{sen}(t)|),\; y = e^{t\,(\pi - t)},\; z = 1 + t/\pi \;\text{ con }\; t \in [0,\pi].$$

23. Si f y g son campos escalares C^2 en D abierto y conexo, y C es una curva suave incluida en D que se la recorre desde A hasta B, verifique que:
    a) $\int_C (f\,\nabla g + g\,\nabla f)\cdot d\vec{s} = f(B)\,g(B) - f(A)\,g(A)$
    b) $\int_C (2\,f\,g\,\nabla f + f^2\,\nabla g)\cdot d\vec{s} = f^2(B)\,g(B) - f^2(A)\,g(A)$
    c) Si $g \neq 0$ en D, entonces $\int_C \frac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2}\cdot d\vec{s} = f(B)/g(B) - f(A)/g(A)$

24. Calcule el trabajo que realiza $\vec{f}(x,y,z) = (y^2\cos(x) + z^3)\,\breve{\imath} + (2\,y\,\text{sen}(x) - 4)\,\breve{\jmath} + (3\,x\,z^2 + 2)\,\breve{k}$ sobre una partícula cuya trayectoria es la curva parametrizada por:
    $$x = \text{arc sen}(t),\; y = 1 - 2\,t, z = 3\,t - 1 \;\text{ con }\; 0 \le t \le 1.$$

25. Un campo conservativo es un campo de fuerzas $\vec{f}$ que admite función potencial ϕ, es decir $\vec{f} = \nabla\phi$. En este caso, en física interesa calcular el *trabajo en contra del campo* que es $-\int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -[\phi(B) - \phi(A)]$. Para sostener el concepto de calcular mediante la diferencia de potencial entre punto final (B) e inicial (A) del recorrido, en física se acostumbra trabajar definiendo la función potencial $U = -\phi$.
Verifique que en este caso $\vec{f} = -\nabla U$, resultando: $-\int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(B) - U(A)$.

26. Siendo $\vec{f}$ un campo de fuerzas y C una arco de curva cerrado, demuestre que:
    a) Si $\vec{f}$ es conservativo, $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$.
    b) Si $\vec{f}$ es conservativo y $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$, entonces el arco de curva C no es necesariamente cerrado, alcanza con que los puntos extremos A y B pertenezcan al mismo conjunto equipotencial de $\vec{f}$.
    c) Si $\vec{f}$ es proporcional a la velocidad no es conservativo.
    Nota: Suponga C de ecuación $\vec{X} = \vec{\sigma}(t)$ con $t \in [a, b]$, siendo t el tiempo.

27. Sea $\vec{H} = H\,\breve{T}$ donde $H = ||\vec{H}||$ es constante y $\breve{T}$ es el versor tangente principal [1] a la curva suave y simple C de longitud L. Demuestre que $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H\,L$ y que, por lo tanto, $\vec{H}$ **no puede ser** un campo de gradientes.
    Nota: En el análisis básico de circuitos magnéticos, $\vec{H}$ es el vector *campo magnético* y la expresión $H\,L$ es típica para el cálculo de la circulación de $\vec{H}$ en cada tramo del circuito. H es la *intensidad* del campo magnético.

28. Halle valores de a y b para que resulte conservativo el campo de fuerzas
$$\vec{f}(x, y, z) = (a\,x\,\text{sen}(\pi\,y)\,,\; x^2\cos(\pi\,y) + b\,y\,e^{-z}\,,\; y^2 e^{-z})\;,$$
para esa elección de a y b calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \text{sen}(2\,t), \text{sen}^2(t))$ con $0 \le t \le \pi$.

29. ¿Para qué valores de a y b , y en qué dominio que contenga a $(1, 1, 1)$, resulta conservativo el campo $\vec{f}(x, y, z) = (a\,x\,\ln(z))\,\breve{\imath} + (b\,y^2\,z)\,\breve{\jmath} + (x^2/z + y^3)\breve{k}$?. Para esa elección de a y b calcule la circulación de $\vec{f}$ desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el $(2, 1, 2)$ a lo largo del segmento que los une.

30. Verifique que $\int_C (3\,x - 2\,y^2)\;dx + (y^3 - 4\,x\,y)\;dy$ no depende de C, sólo de los puntos inicial y final del arco de curva. Calcule la integral cuando se circula desde $(1, 3)$ hasta $(2, 4)$.

31. Evalúe $\int_C (e^x\;\text{sen}(y) + 3\,y)\;dx + (e^x\;\cos(y) + 2\,x - 2\,y)\;dy$, a lo largo de la elipse de ecuación $4\,x^2 + y^2 = 4$. Indique gráficamente el sentido de circulación elegido.

[1] Versor tangente orientado en el sentido de los arcos crecientes.

32. Sea $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, demuestre que $\vec{f} = \varphi \nabla \varphi$ es un campo de gradientes y calcule $\int_{\lambda_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ sabiendo que $\varphi(B) = 7$ y que $\int_{\lambda_{AB}} \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = 4$. Se supone que A y B son los puntos inicial y final del arco de curva suave λ_{AB}.

Comentario: *El análisis de la existencia de función potencial en regiones que no son simplemente conexas se contempla en la práctica de teoremas integrales.*

VIII – Integrales múltiples.

1. Integrales dobles

1. Grafique las siguientes regiones planas y calcule su área mediante una integral doble.
   a) Definida por $y \geq x^2$, $y \leq x$.
   b) Definida por $x + y \leq 2$, $y \leq x$, $y \geq 0$.
   c) Limitada por $y = x^3$ e $y = x$.
   d) Limitada por la línea de nivel 4 de $f(x, y) = |x| + |y|$.
   e) Limitada por las curvas de nivel 2 y 4 de $f(x, y) = x + 2\,y$ en el 1° cuadrante.

2. Grafique la región de integración y exprese la integral invirtiendo el orden de integración.
   a) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y)\, dy$ *b*) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\, dxdy$
   c) $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)\, dydx$ *d*) $\int_{-1}^1 dy \int_0^{e^y} f(x, y)\, dx$

3. Calcule la masa y la posición del centro de masa correspondiente a una placa plana definida por $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje y.

4. Calcule la masa de la placa plana definida por $|x| \leq y \leq 2$ cuando la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto a la recta de ecuación $x = 1$.

5. Sea la placa plana definida por $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, cuya densidad superficial en cada punto es $\delta(x, y) = k\,|x|$ con k constante positiva. Calcule la densidad media de la placa.

6. Calcule el momento de inercia respecto del eje x de la placa plana D cuya densidad δ_0 es constante, cuando $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| \leq y \leq 2\}$.

7. Interprete gráficamente la región de integración y calcule las siguientes integrales, en algunos casos puede convenirle invertir el orden de integración.

   a) $\int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{1} 2\,x\;dxdy$ *b)* $\int_{-2}^{2}\int_{\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} x\;dydx$

   c) $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{x^2}\;dxdy$ *d)* $\iint_D y\;dxdy$, D es el disco de radio 1 centrado en el origen

8. *Optativo*: Sea $f:[0,2]\times[0,2]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua. Si $F(x,y)=\int_0^x du\int_0^y f(u,v)\,dv$, con (x,y) interior al dominio de f, demuestre que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,y)=f(x,y).$$

1.1. Cambio de variables en integrales dobles

9. Calcule las siguientes integrales aplicando una transformación lineal conveniente.
   a) $\iint_D x\;dxdy$, D descripto por $1\le x+y\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge x$. Sugerencia: aplique el cambio de variables definido por $(x,y)=(v,u-v)$.
   b) $\iint_D e^{(y-x)/(x+y)}\;dxdy$, D descripto por $x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.
   c) $\iint_D (x-y)^2\operatorname{sen}^2(x+y)\;dxdy$, D descripto por $-\pi\le y-x\le\pi,\ \pi\le x+y\le 3\,\pi$.
   d) $\iint_D (x+y)^3\;dxdy$, D descripto por $1\le x+y\le 4,\ -2\le x-2\,y\le 1$.

10. Resuelva utilizando coordenadas polares. ¿En qué casos merece especial cuidado el análisis de la integrabilidad de la función en el dominio indicado?.
    a) Calcule el área de un círculo de radio 3 con centro en el origen de coordenadas, inténtelo también en coordenadas cartesianas.
    b) $\iint_D 2\,x\;dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;/\;x^2+y^2\le 16,\ x+y\ge 0\}$.
    c) $\iint_D y^2\;dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;/\;1\le x^2+y^2\le 16,\ y\ge |x|\}$.
    d) $\iint_D x\,y\;dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;/\;(x-1)^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$.
    e) $\iint_D e^{x^2+y^2}\;dxdy$, D círculo de radio R con centro en $(0,0)$.
    f) $\iint_D \frac{x+y}{x^2}\;dxdy$, D descripto por $0\le y\le x,\ x+y\le 2$.
    g) $\iint_D (x+y)^{-1}\;dxdy$, D descripto por $x\ge 0,\ x+y\le 2,\ y\ge x$.
    h) Calcule área(D), D descripto por $x^2+y^2\le 4\,a^2,\ x^2+y^2\ge 2\,a\,x$, con $a>0$.

11. Resuelva los siguientes ejercicios utilizando los cambios de coordenadas propuestos.
    a) Calcule área(D), $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|+|y|\le 2\}$, usando $(x,y)=(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})$.

b) Calcule $\iint_D e^{x+y}\, dxdy$, D descripto por $1 \leq x+y \leq 4$ en el 1° cuadrante, usando $x+y=u$, $x=v$.

c) Calcule el área de la región plana definida por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ constantes, usando $(x,y)=(a\,r\cos(\theta), b\,r\,\mathrm{sen}(\theta))$.

d) Calcule $\iint_D\; x^{-1}dxdy$, D descripto por $x^2 \leq y \leq 4\,x^2$, $x \geq 1$, $y \leq 9$, usando la transformación $(x,y)=(v/u, v^2/u)$.

12. Sea f una función continua tal que $\int_0^4 f(t)\; dt = 1$. Calcule $\iint_D f(x^2+y^2)\; dxdy$ siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ el disco descripto por $x^2+y^2 \leq 4$.

2. Integrales triples

13. En los siguientes casos, grafique el cuerpo D en el espacio xyz y calcule lo pedido resolviendo una integral triple en coordenadas cartesianas.

    a) Volumen de $D=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,/\,x+z \leq 3\,,\, y \geq x\,,\, y \leq 4\,,\, x \geq 0\,,\, z \geq 0\}$.

    b) Masa de D definido por: $z \leq 4-x^2\,,\, z \geq y\,,$ 1° octante, si la densidad es constante.

    c) Volumen de $D=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,/\,x+y+z \leq 4 \,\wedge\, z \geq x+y \,\wedge\, x \geq 0 \,\wedge\, y \geq 0\}$.

    d) $\iiint_D 3\,x\; dxdydz$, D descripto por: $z \geq 2\,x^2+y^2+1\,,\, z \leq 5-y^2$.

2.1 Cambio de variables en integrales triples

14. En los siguientes casos, grafique el cuerpo en el espacio xyz y calcule lo pedido en coordenadas cilíndricas.

    a) Masa de $D=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,/\,x^2+y^2 \leq 4,\, y \geq x,\, |z| \leq 2\}$, si la densidad es $\delta(x,y,z)=k\,x^2$ con k constante positiva.

    b) Volumen de $D=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,/\,x^2+z^2 \leq 9\,,\, x+y \leq 3\,,\, y \geq 0\}$.

    c) $\iiint_H 2\,y\; dxdydz$, con H definido por: $x^2+y^2 \leq 2\,x\,,\, 0 \leq z \leq y$.

15. En los siguientes casos, grafique el cuerpo en el espacio xyz y calcule lo pedido en coordenadas esféricas.

    a) Volumen de $D=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,/\,x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\, 0 \leq y \leq x\}$.

    b) $\iiint_D 2\,y\; dxdydz$, con D definido por: $x^2+y^2+z^2 \leq 4\,, z \leq 1$.

    c) Masa de $H=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,/\,x^2+y^2+z^2 \leq 2\,y\,,\, y \leq x\}$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

2.2 Cálculos con integrales triples en el sistema de coordenadas más conveniente

16. Calcule el volumen del cuerpo D en los siguientes casos.

    a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y \leq z \leq 1 \,\wedge\, x \geq 0 \,\wedge\, y \geq 0\}$.

    b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \,\wedge\, y^2 + z^2 \leq 1\}$.

    c) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \,\wedge\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

    d) D limitado por $z = 2\,x^2 + y^2$, $z + y^2 = 8$.

    e) D definido por: $y \geq x^2$, $y \leq x$, $z \geq x + y$, $x + y + z \leq 6$.

    f) D interior a la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4\,r^2$, con $x^2 + y^2 \geq 2\,r\,x$, en el 1° octante. $(r > 0)$.

17. Demuestre que $V = \frac{9}{2}a^3$ es el volumen del tetraedro en el primer octante limitado por los planos coordenados y el plano tangente a la superficie de ecuación $x\,y\,z = a^3$ en el punto (x_0, y_0, z_0) de la misma $(a \neq 0)$.

18. Calcule la masa del cuerpo limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con $y \geq x^2 + z^2$ cuando la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje y.

19. Calcule el momento estático del cuerpo H respecto del plano xz si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy. H está en el 1° octante definido por: $x + y + z \leq 2$, $z \geq x + y$, $y \leq x$.

20. Calcule las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo con densidad constante limitado por: $x^2 + z^2 = 1$, $y - x = 1$, 1° octante.

21. Calcule el volumen de la región definida por $x^2 + y^2 - 6 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

22. Halle la constante $k > 0$ de manera que resulte igual a 4π el volumen del cuerpo comprendido entre el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = k\,z$ y el plano de ecuación $z = k$.

23. Calcule el momento de inercia respecto del eje x de un cuerpo con densidad constante limitado por las superficies de ecuaciones $x = y^2 + z^2$ y $5\,x = y^2 + z^2 + 4$.

24. Dados $f(x, y, z) = (x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ y el cuerpo D en el 1° octante con $x + y + z \leq 4$, plantee (indicando los correspondientes límites de integración) la integral triple de f extendida a D en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Resuelva en el sistema que crea más conveniente.

IX – Integrales de superficie.

1. Área de una superficie

1. Calcule el área de las siguientes superficies:
   a) Σ: trozo de superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ con $0 \leq z \leq 2$.
   b) Σ: frontera del cuerpo definido por: $x + y + z \leq 4$, $y \geq 2\,x$ en el 1° octante.
   c) Σ: trozo de superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 2\,a\,y$ interior a la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,a^2$ en el 1° octante, con $a > 0$.
   d) Σ: trozo de superficie cónica de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \leq 4$, $y \leq \sqrt{3}\,x$.

2. Sea Σ una porción de área 2 del plano de ecuación $2\,x + 3\,y - 2\,z = 1$. Calcule el área de la proyección de S sobre el plano xy.

2. Integral de superficie de campo escalar

3. Calcule la masa de la porción de superficie cónica de ecuación $4\,z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 1$ y $x \leq y$, sabiendo que la densidad superficial de masa en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

4. Calcule el momento de inercia respecto del eje y de una chapa con forma de tronco de cono de ecuación $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ con $1 \leq y \leq 4$, si la densidad es constante.

5. Calcule la integral de $f(x, y, z) = x\,y - z$ sobre la superficie cilíndrica de ecuación $y = z^2$ con $|x| \leq y \leq 2$.

6. Calcule el valor medio de f sobre la superficie plana de ecuación $y = x$ con $z \leq 2$ e $y \leq 4$ en el 1° octante, cuando $f(x, y, z) = x^2 y\,z$.

3. Integral de superficie de campo vectorial (flujo)

7. Calcule, en cada caso, el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie Σ dada ($\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma$), indicando gráficamente la orientación de Σ que Ud. ha elegido o aquella que se especifica.
   a) $\vec{f}(x,y,z) = (y\,,\, x^2 - y\,,\, x\,y)$, a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y = x^2$ con $x + y + z \leq 2$ en el 1° octante.
   b) $\vec{f}(x,y,z) = (x - y\,, x\,,\, 2 - y)$, a través de la superficie frontera del cuerpo definido por: $x + y \leq 4\,,\ y \geq x\,,\ z \leq x\,,\ z \geq 0$, orientada hacia afuera del cuerpo.
   c) $\vec{f}(x,y,z) = (y^3 z,\, x\,z - y\,z\,,\, x^2 z)$, a través de $2\,y = x^2$ con $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ en el 1° octante.

8. Sea $\vec{B} = B\,\check{n}$ con B constante, perpendicular al trozo de plano Σ de área S y orientado según dicho $\check{n}$, demuestre que el flujo de $\vec{B}$ a través de Σ resulta igual al producto $B\,S$.
   Caso elemental: Flujo del *campo inducción magnética* $\vec{B}$ a través de una superficie plana, en cuyos puntos es perpendicular y constante.

9. Dado el cuerpo D definido por: $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$ con superficie frontera ∂D orientada hacia el exterior de D, demuestre que si $\vec{f}(x,y,z) = (y\,,\, x,\, -z)$ el flujo de $\vec{f}$ a través de ∂D es entrante. ¿Por qué el flujo es entrante si ∂D está orientada hacia afuera de D?.

10. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (x - y\,, a\,z\,,\, b\,y)$, determine la relación entre las constantes a y b para que sea nulo el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie plana de ecuación $y + z = 3$ en el 1° octante con $x \leq 2$. Indique en un gráfico cómo decidió orientar a la superficie.

11. Siendo $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$, calcule el flujo de $\vec{f}$ a través del trozo de superficie de ecuación $z = a - x^2 - y^2$ que está por encima del plano de ecuación $z = 0$ con $a > 0$. Considere el versor normal a la superficie ($\check{n}$) con componente en z positiva.

12. Una porción Σ de superficie esférica de radio 3 centrada en $\bar{0}$ tiene área 2. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ orientada hacia el interior de la esfera, si $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$.

13. Dado $\vec{f}$ continuo en $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z) = (4\,y\,,\, y\,,\, \varphi(x,y,z))$, calcule el flujo de $\vec{f}$ a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con $0 \leq z \leq 2$. Indique en un gráfico la orientación elegida. ¿Por qué el flujo no depende de φ?.

14. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (a\,b\,x\,,\, y/a\,,\, -z/b)$, halle las constantes a y b para que resulte un mínimo relativo del flujo de $\vec{f}$ a través de $z = x\,y$ con $(x,y) \in [1,2] \times [1,2]$, si la superficie se orienta de manera que su versor normal $\check{n}$ en cada punto es tal que $\check{n} \cdot (0,0,1) < 0$.

15. Sea Σ la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con $x^2 + z^2 - 2\,z \leq 0\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ, si $\vec{f}(x,y,z) = (x\,,\, y\,,\, z^2)$ y Σ se orienta de manera que -en cada punto- la componente según y de su versor normal resulte positiva.

X – Teoremas integrales.

1. Trabajando en coordenadas cartesianas y enunciando las hipótesis necesarias en cada caso, demuestre que para todo punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
   a) $\nabla \cdot (rot(\vec{f})) = 0$
   b) $rot(\nabla f) = \bar{0}$
   c) $\nabla(f\,g) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$
   d) $\nabla \cdot (f\,\vec{g}) = \nabla f \cdot \vec{g} + f\;\nabla \cdot \vec{g}$
   e) $\nabla \times (f\,\vec{g}) = \nabla f \times \vec{g} + f\;\nabla \times \vec{g}$
   f) si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\vec{r} = (x, y, z)$, para $\vec{r}$ no nulo resulta $\nabla\varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|)\,\vec{r}/\|\vec{r}\|$

2. Sea $\vec{f} \in C^1$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (2\,x\,,\,-y^2 z\,,\,h(x, y))$. Determine la expresión de h de manera que $\vec{f}$ resulte irrotacional, sabiendo que $\vec{f}(0) = (0, 0, 1)$.

3. Si $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - z, 2\,x\,y + 1, h(x, y, z))$ con $h \in C^1$, ¿es posible hallar h tal que $\vec{f}$ sea solenoidal e irrotacional?.

4. Sea $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ con $\vec{f} \in C^1$ tal que $Q'_x - P'_y = k \neq 0$ (k constante). Obtenga la fórmula:
$$\text{Área}(D) = k^{-1} \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$
que permite calcular el área de una región plana D mediante una integral de línea a lo largo de su frontera ∂D.
En los siguientes casos, grafique la región D del plano xy y calcule su área integrando $\vec{f}(x, y) = (0, x)$ a lo largo de su frontera.
   a) D definida por: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ constantes.
   b) D definida por: $x^2 + y^2 \leq 2\;,\; x \geq 1$.
   c) D acotada, con frontera de ecuación $\vec{X} = (\text{sen}(2\,t)\,,\,2\,\text{sen}^2(t))$ con $0 \leq t \leq \pi$.
   <u>Nota</u>: Observe que se trata de un círculo de radio 1.

5. Siendo $D = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \,/\, 4\,x^2 + y^2 \leq 16\}$ y $\vec{f}(x,y) = (g(x)\,y\,,\,g(x) + y^2)$ con $\vec{f} \in C^1$ tal que $\vec{f}(0,1) = (1,2)$, halle una expresión para g de manera que $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ resulte numéricamente igual al área de D.

6. Sea $\vec{f}(x,y) = (x\,,\,x\,y^2)$ y D una región plana cuyos puntos satisfacen $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
   a) Calcule mediante una integral de línea la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de D recorrida en sentido positivo (de manera que el interior de D quede a la izquierda).
   b) Calcule la circulación pedida en "*a*)" utilizando el teorema de Green.

7. Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f} = (P,Q)$ con $\vec{f} \in C^1$ y $\left(Q'_x - P'_y\right)(x,y) = 4$ en su dominio. Calcule $\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ cuando C es una circunferencia con centro en el origen y radio r, sabiendo que para $r = 1$ el valor de dicha integral es $3\,\pi$. Grafique y considere los casos de $0 < r < 1$ y de $r > 1$.

8. Sean $\vec{f}(x,y,z) = (y{+}x\,,\,2\,y\,,\,z)$ y C la curva intersección de las superficies de ecuaciones: $z = 27 - 2\,x^2 - 2\,y^2$ y $z = x^2 + y^2$.
   a) Grafique y parametrice C.
   b) Calcule mediante una integral de línea la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de C, indicando gráficamente la orientación elegida.
   c) Verifique el resultado obtenido en "*b*)" aplicando el teorema del rotor. ¿Cuál es la superfice más conveniente a elegir?.

9. Sea S la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = 4$ en el 1° octante, con $x + y \leq 2$. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (x\,y\,,\,y\,,\,y\,z)$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva borde de S con orientación $(0,0,2) \to (0,2,0) \to (2,0,2) \to (0,0,2)$.

10. Sea $\vec{f}(x,y,z) = (x\,,\,y + z\,,\,z)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ con $0 \leq z \leq 1$, considerando la normal exterior.

11. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (h(x) + y\,z\,,\,x\,z + y\,h(x)\,,\,x\,y)$ con h' continua y $\vec{f}(1,1,1) = (3,3,1)$, halle $h(x)$ tal que resulte nulo el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera de un cuerpo $D \subset \mathbb{R}^3$.

12. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (z - x\,y\,,\,y - z\,,\,x^3 + y)$, calcule aplicando el teorema del rotor la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva borde de la región contenida en el plano xy limitada por $y = x$, $y = 2\,x$, $x\,y = 1$, $x\,y = 4$ con $x > 0$, recorrida de manera de desplazarse con la orientación $(1,1,0) \to (2,2,0) \to (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$.

13. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie S de ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ con $x^2 + y^2 \leq 25$, sabiendo que $\vec{f} = rot(\vec{g})$ con $\vec{g} \in C^2$ y que $\vec{f}(x, y, 0) = (0\,,\, y\,,\, x - 1)$. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para S.
<u>Nota</u>: Cuando $\vec{f} = rot(\vec{g})$, se dice que $\vec{g}$ es el *potencial vectorial* de $\vec{f}$.

14. Siendo $\vec{f} = rot(\vec{g})$ con $\vec{g} \in C^2$ y ∂D la supeficie frontera de un cuerpo D, demuestre que el flujo de $\vec{f}$ a través de ∂D es nulo. ¿Se necesita alguna hipótesis para D y ∂D?.

15. Sea $\vec{f}$ un campo solenoidal y Σ una superficie simple y abierta cuyos puntos tienen coordenada $z \geq 0$ y su borde es una curva cerrada incluida en el plano xy. Denotando Σ_{xy} a la proyección de Σ sobre el plano xy, demuestre que $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma \;=\; \iint_{\Sigma_{xy}} \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma$ siempre que ambas superficies se orienten de igual forma (por ejemplo, ambas hacia z^+).
La demostración es sencilla si realiza una representación gráfica que le permita fijar ideas. Indique las hipótesis que supone.

16. Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva determinada por la intersección de las superficies de ecuaciones: $z = 2\,x^2 + y^2$ y $z = 6 - x^2 - y^2$.
    a) Realice un gráfico aproximado de la curva y las superficies.
    b) Calcule la circulación del campo $\vec{F}$ tal que $\vec{F}(x, y, z) = (2\,y\,x\,e^{x^2} + z\,,\, e^{x^2}\,,\, x)$ a lo largo de la porción de C con $y \geq 0$, indicando la orientación elegida.

17. Dado el campo $\vec{f}$ cuya matriz jacobiana es $D\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2\,x\,y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 2\,y\,z \end{pmatrix}$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva intersección del plano $x + y + z = 4$ con los planos coordenados. Indique claramente en un esquema con qué sentido ha orientado la curva.

18. Sea $\vec{f}$ un campo de clase C^2, cuyo rotor es $\nabla \times \vec{f}\,(x, y, z) = (x - y\,,\, x - 2\,y\,,\, z)$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva de ecuación:
$$\vec{X} = (3\,\cos(t)\,, 3\,\mathrm{sen}(t)\,,\, 6 - 3\,\cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t))\text{ con } t \in [0, 2\pi]\,,$$
indique gráficamente qué orientación de C impone la parametrización dada.

19. Demuestre que si φ es armónico, el flujo de $\varphi\nabla\varphi$ a través de la superficie frontera de un cuerpo H, orientada hacia afuera del cuerpo, es igual a la integral triple de $\|\nabla\varphi\|^2$ extendida a H.

20. Demuestre que el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x + y\,e^z\,,\, Q(x, z)\,,\, 5\,z)$ a través del trozo de superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 13$ con $z \geq 2$ no depende de la función Q. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para el versor normal a la superficie y otras hipótesis que debieran considerarse.

21. Demuestre que si $\vec{f}$ es solenoidal, sus líneas de campo no tienen origen (*punto fuente*) ni fin (*punto sumidero*); suponga que puede aplicar el teorema de la divergencia.

    Nota: Un caso importante en las aplicaciones es el del vector *inducción magnética* $\vec{B}$, las *líneas de inducción* son cerradas, no tienen origen ni fin (ejemplo: imán recto). Una de las ecuaciones de Maxwell es $div(\vec{B}) = 0$.

22. El campo electrostático creado por una carga puntual q en el origen de coordenadas es:

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}^3 \, / \, \vec{E}(\vec{r}) = k\,q\,\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \text{ con } \vec{r} = (x, y, z)\ ,\ k > 0 \text{ constante}$$

    Demuestre que el flujo de $\vec{E}$ a través de cualquier superficie Σ cerrada que encierre al origen es proporcional a q (resulta igual a $4\,\pi\,k\,q$), mientras que si Σ no encierra ni contiene al origen el flujo es nulo. Complete las hipótesis necesarias para Σ.

23. Sean $\vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z)\,,\, Q(x, y, z)\,,\, 2\,z)$ con $\vec{f} \in C^2$ y la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $0 \le z \le 1\ ,\ x^2 + y^2 \le 1$.
    Sabiendo que $\iiint_D \nabla \cdot \vec{f}(x, y, z)\,dxdydz = 3$, calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de S, siendo S la superficie cilíndrica (¡sin tapas!) descripta en coordenadas cilíndricas por $r = 1$ con $0 \le z \le 1$, orientada de manera que el vector normal se dirija hacia afuera del cilindro.

24. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z)\,,\, Q(x, y, z)\,,\, 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla\times\vec{f} = 0$ en R, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva de ecuación $\vec{X} = (\mathrm{sen}(t), 1, \cos(t))$ con $0 \le t \le \pi$.

25. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (f'_x(x, z)\,, 0,\, x + y + f'_z(x, z))$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función C^2. Calcule la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva cerrada definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e $y = 4$, orientada de manera que su vector tangente en $(3, 4, 0)$ tenga componente en z negativa.

26. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (x\,P(x, y, z)\,,\, y\,P(x, y, z)\,,\, z\,P(x, y, z) - 2)$ un campo vectorial C^2. Suponiendo que $\iiint_M \nabla \cdot \vec{f}(x, y, z)\,dxdydz = 3$, donde $M \subset \mathbb{R}^3$ es la región descripta por:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 25\ ,\ 4\sqrt{x^2 + y^2} \le 3\,z\,.$$

    Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con $z \ge 4$ considerando S orientada hacia z^+.

27. Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^2 con $\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = (2\,,\, 2\,y - 3\,,\, 0)$. Sea $g(a, b)$ con $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del borde del rectángulo descripto por:

$$y = b^2 x - a^2\ ,\ -1 \le x \le 1\ ,\ -1 \le z \le 1$$

    orientado de manera que su tangente en $(0, -a^2, 1)$ tiene componente según x negativa. Calcule el mínimo $g(a, b)$.

28. *Optativo*: Dado $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$, determine el valor de la constante a tal que sea máximo el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera del cilindro elíptico descripto por:

$$\frac{x^2}{1-\frac{4\,a^2}{1+4\,a^2}} + \frac{y^2}{1+\frac{4\,a^2}{1+4a^2}} \leq 1\ ,\ 0 \leq z \leq 1$$

29. Sea $\vec{F} \in C^2$ un campo vectorial tal que $\vec{F}(x,y,z) = (x\,P(x,y,z)\,,\, y\,Q(x,y,z)\,,\, z)$ y sea S el semicírculo descripto por: $y=0\,,\ x^2+z^2 \leq 1\,,\ x \geq 0$.
Si el flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de S orientado de manera que su normal tenga componente según y positiva es 4, calcule la circulación de $\vec{F}$ a lo largo del arco de circunferencia de ecuación $\vec{X}(t) = (\text{sen}(t)\,,\, 0\,,\, -\cos(t))$ con t desde 0 hasta π.

30. Sea $\vec{f}(x,y,z) = (0\,,\,0\,,\, z\,R(x,y))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera del cilindro definido por $x^2+y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 2$ es igual a 3, calcule $\iint_M R(x,y)\,dxdy$ cuando M es el disco descripto en el plano xy por $x^2+y^2 \leq 1$.

31. Siendo $\vec{F}(x,y,z) = (x+z\,,\, g(y)+z^2\,,\, z)$ con $\vec{F}(0,0,0) = (0,1,0)$, halle $g(y)$ tal que sea nulo el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie semiesférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$ con $z \geq 0$ orientada hacia z^+.

32. Dado $\vec{f} \in C^1$ tal que $\vec{f}(x,y,z) = (x+\varphi(x-y)\,,\, y+\varphi(x-y)\,,\, 2\,z+4)$, calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $z = x^2+y^2-1$ con $z \leq 3$. Indique gráficamente cómo decidió orientar a Σ.

33. Siendo $\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + x\,g(x\,y)\,,\, y^2 - y\,g(x\,y)\,,\, z^2)$ con $\vec{f} \in C^1$, calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de las superficie esférica de radio 4 con centro en el punto $(2,1,3)$.

34. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (x\,y\,,\, x^2+h(y)\,,\, y\,z - x^2)$ con h' continua, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuación:

$$\vec{X} = (1+\cos(t)\,,\, 2+\text{sen}(t)\,,\, 4)\ \text{ con }\ 0 \leq t \leq 2\,\pi$$

orientada según lo impone esta parametrización.

35. Sea $\vec{f}(x,y,z) = (z^2\,,\, 2\,y\,z + g(y)\,,\, g(y) + 2\,x\,z)$ con $\vec{f} \in C^1$ tal que $\vec{f}(1,1,1) = (1,1,1)$, ¿cuál debe ser la expresión de g para que $\vec{f}$ resulte irrotacional?.

36. Analice si los campos vectoriales dados admiten función potencial en sus dominios naturales, observe que los mencionados dominios son conexos pero no son simplemente conexos.

    a) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{2\,x}{x^2+y^2}\,,\, \dfrac{2\,y}{x^2+y^2}\right)$

b) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2} \, , \, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$

c) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{2\,y}{4\,x^2+y^2} \, , \, \dfrac{-2\,x}{4\,x^2+y^2} \right)$

d) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{x}{(x^2+9\,y^2)^{3/2}} \, , \, \dfrac{9\,y}{(x^2+9\,y^2)^{3/2}} \right)$

e) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{2\,x}{x^2+y^2} \, , \, \dfrac{2\,y}{x^2+y^2} \, , \, 4\,z \right)$

f) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{x^2+4\,y^2} \, , \, \dfrac{x}{x^2+4\,y^2} \, , \, z^2+1 \right)$

XI – Ecuaciones diferenciales - 2da. parte.

1. Resolución de ecuaciones diferenciales

1. Dada la ecuación diferencial $x\,y' = y + x\,e^{y/x}$ (tipo: *homogénea de* 1° orden), halle la solución tal que $y(1) = 0$.

2. Dada $x\,y^2\,dx + (y\,x^2 + 1)\,dy = 0$ (tipo: *diferencial total exacta*), halle la solución particular tal que $y(1) = 0$.

3. Siendo $y'' + y' = 2\,x + 2$ (tipo: *lineal de* 2° *orden reducible a* 1° *orden*), determine la solución que en en el punto $(0, 1)$ tiene recta tangente paralela al eje x.

4. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales. En lo casos que se indican condiciones adicionales, obtenga la correspondiente solución particular.

   a) $(2\,x^2 + y^2)\,y' = 2\,x\,y$

   b) $x^2\,y' = y^2 + x\,y,\ y(1) = 1$

   c) $3\,x^2 y\,dx + (x^3 + \operatorname{sen}(y))\,dy = 0,\ y(1) = 0$

   d) $2\,x\,y\,y' = x^2 - y^2\ ,\ y(3) = 2$

   e) $(2xy^{-3} + 1)\,dx - (3x^2y^{-4} - 2y)\,dy = 0$

   f) $(y/x - 1)\,dx + dy = 0\ ,\ y(2) = 2$

   g) $y'' + y' = 0\ ,\ y(0) = 0, y'(0) = -1$

   h) $y'' = 0\ ,\ y(0) = 1, y'(0) = 3$

5. Una ecuación diferencial del tipo $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$ con $n > 1$ se denomina ecuación de Bernoulli.

   a) Demueste que aplicando el cambio de variables definido por $z = y^{1-n}$, la ecuación de Bernoulli se reduce a una EDO tipo lineal de 1° orden.

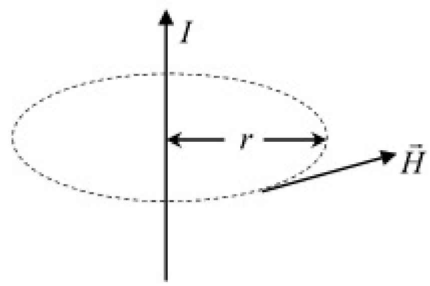
   b) Halle la solución particular de $y' + x^{-1}y = 2\,x\,y^2$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

2. Aplicaciones básicas

6. Movimiento rectilíneo: Considere un punto material que se deplaza horizontalmente y sin rozamiento, siendo $x = x(t)$ su posición en función del tiempo t, la velocidad es $v = x'(t)$ y la aceleración $x''(t)$.
   a) *Movimiento rectilíneo uniforme*: El deplazamiento es a velocidad V constante, entonces debe cumplirse que $x'(t) = V$. En este caso si para $t = 0$ la posición es $x(0) = x_0$, demuestre que para $t > 0$ resulta $x = x_0 + V\,t$.
   b) *Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*: El deplazamiento es con aceleración a constante, de donde debe cumplirse que $x''(t) = a$. Suponiendo que para $t = 0$ el punto está en $x(0) = x_0$ con velocidad $x'(0) = v_0$, demuestre que para $t > 0$ la posición del punto es $x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$.
7. Tiro vertical: Un cuerpo puntual de masa m se dispara verticalmente hacia arriba con velocidad inicial $\vec{v}(0) = V_0\,\breve{k}$ en metro/segundo (m/s). La posición del cuerpo en función del tiempo t es $\vec{X} = z(t)\,\breve{k}$ y el movimiento comienza en tiempo $t = 0$ s para el cual $z(0) = 0$ m y $z'(0) = V_0$.
   Aplicando la 2° ley de Newton (*masa · aceleración = suma de las fuerzas aplicadas*), para este caso resulta[2]: $m\,z'' = -m\,g$, donde g es la aceleración de la gravedad en m/s^2.
   a) Demuestre que para $t > 0$ resulta $z = V_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$.
   b) Verifique que la altura máxima es $\frac{1}{2}\,V_o^2/g$ y se produce en el instante $t_M = V_0/g$.
   c) Compruebe que en el instante $t_r = 2\,V_0/g$ el cuerpo retorna a su posición inicial ($z = 0$) con velocidad $\vec{v}(t_r) = -V_0\,\breve{k}$.
8. Caida vertical con rozamiento del aire: Se deja caer hacia la superficie de la tierra un objeto de masa m cuyo deplazamiento se ve amortiguado debido al rozamiento con el aire, el cual genera una fuerza -que se opone al desplazamiento- y es proporcional a la velocidad del objeto. Por simplicidad supondremos el eje z orientado hacia abajo.
   Aplicando la 2° ley de Newton (*masa · aceleración = suma de las fuerzas aplicadas*) la ecuación diferencial del movimiento es:
   $$m\,z'' = m\,g\; - \gamma\,z'$$
   donde $\gamma > 0$ es constante y g es la aceleración de la gravedad, también constante.
   Demuestre que la velocidad z' del cuerpo no supera el valor $g\,m/\gamma$, mientras no haya llegado a la tierra se acerca asintóticamente a dicho valor (ver a qué tiende $z'(t)$ cuando $t \to \infty$).

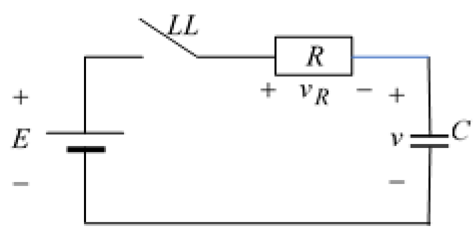
[2] El signo "$-$" es porque la fuerza (*peso* $= m\,g$) se aplica en sentido opuesto al z^+ (hacia abajo).

9. El *campo magnético* $\vec{H}$ generado por un corriente eléctrica que circula por un alambre conductor rectilíneo filiforme e infinito tiene intensidad $H = ||\vec{H}||$ constante a una distancia r del alambre y sus líneas de campo son circunferencias en planos perpendiculares al alambre.
   Considere que la posición de alambre coincide con el eje z y que circula una corriente eléctrica constante de intensidad I hacia z^+, el campo $\vec{H}$ se orienta según el esquema[3].



   En este caso las líneas de campo C son circunferencias de radio r en planos paralelos al xy con centro en $(0,0,k)$, $k \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$, demuestre que $H = I/(2\,\pi\, r)$ para todo k.

10. Carga de un capacitor: En la figura se representa un circuito serie con una fuente de alimentación que establece una tensión[4] constante E, un resistor de resistencia eléctrica R, un capacitor de capacitancia C y una llave interruptora LL.



   Aplicando la *ley de mallas* de Kirchoff, al cerrar la llave LL debe cumplirse que $v_R + v = E$ donde $i = C\,dv/dt$ es la intensidad de corriente en el circuito y $v_R = R\,i$ es la tensión en el resistor, es decir, reemplazando resulta: $R\,C\,v' + v = E$.
   Suponiendo que en tiempo $t = 0$ segundos se cierra LL con $v(0) = 0$ Volt, demuestre que v crece con el tiempo asintóticamente ($t \to \infty$) hasta E mientras que $i(t)$ tiende a 0 Ampere desde $i(0) = E/R$. La resistencia R se mide en Ohm (Ω) y C en Faradios.

[3] Se indica circulación de corriente eléctrica en *sentido convencional*.

[4] En el análisis de circuitos eléctricos es común denominar *tensión* a la diferencia de potencial entre terminales de cada componente.

11. Ley de enfriamiento de Newton: Considere un cuerpo a temperatura T mayor que la temperatura T_A del ambiente que lo rodea. Suponiendo que T_A se mantiene constante, esta ley establece que la velocidad con la que el cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia $T - T_A$. Es decir, $dT/dt = -k\,(T - T_A)$ donde t es el tiempo en segundos (s) y $k > 0$ en s^{-1} es constante.
    a) Si el proceso de enfriamiento comienza en $t = 0$ s con temperatura inicial $T(0) = T_0$, demuestre que T decae exponencialmente desde T_0 hasta T_A.
    b) Si $T(0) = 20\,°\mathrm{C}$, $T_A = 10\,°\mathrm{C}$ y en 60 segundos la temperatura del cuerpo disminuye hasta $15\,°\mathrm{C}$ ...
        b_1) ... ¿cuál es el valor de la constante k?.
        b_2) ... ¿cuánto tiempo debe transcurrir hasta que el cuerpo esté a $1\,°\mathrm{C}$ de T_A?.

12. Desintegración radiactiva: La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si con 50 g de sustancia iniciales, al cabo de 3 días sólo quedan 10 g, ¿qué porcentaje de la cantidad inicial quedará al cabo de 4 días?.

13. Crecimiento balanceado no restringido de bacterias: Una población de bacterias en un medio adecuado y sin limitación de nutrientes tiene *crecimiento balanceado no restringido*, que consiste en la duplicación de la masa celular M cada intervalo determinado de tiempo T. Desde el punto de vista matemático esto se puede expresar mediante la ecuación diferencial $\frac{dM}{dt} = \mu\, M$, donde t es el tiempo y μ un coeficiente constante.
    Resuelva la ecuación diferencial suponiendo para $t = 0$ una masa inicial M_0 ...
    a) ... y calcule el valor de μ sabiendo que la masa se duplica en 20 días.
    b) ... y, dado que el valor de μ es tal que transcurrido el tiempo T la masa se duplica, demuestre -a partir de la solución de la ec. diferencial- que $M = M_0\, 2^{\,t/T}$.

14. Una bola esférica de nieve se derrite -manteniendo su forma- de manera que la derivada de su volumen $V(t)$ respecto del tiempo t es proporcional al área de la superficie esférica en ese momento. Si para $t = 0$ el diámetro de la esfera es de 5 cm y 30 minutos después es de 2 cm, ¿en qué momento el diámetro será de 1 cm?.

15. Considerando la ley de Newton: “masa(m) $\cdot$ aceleración($d\vec{v}/dt$) = suma de las fuerzas aplicadas”, si el movimiento rectilíneo de un punto material con masa m se produce en un medio que le opone una fuerza del tipo $\alpha\, v + \beta\, v^n$, donde v es la velocidad, debe cumplirse que $m\, v' = -\alpha\, v - \beta\, v^n$; es decir, $v' + \frac{\alpha}{m}\, v = -\frac{\beta}{m}\, v^n$.
    Considerando $n = 2$, $m = 2$ kg, $\alpha = 2$ kg/s, $\beta = 4$ kg/m, y que a los 0 segundos la velocidad inicial es de 20 m/s, determine y grafique el comportamiento de la velocidad del punto en función del tiempo.