Universidade de São Paulo
FEA/USP
Cláudio R. Lucinda

Primeiro Semestre de 2023
Econometria II

Lista de Exercícios 3:

GMM

Esta lista de exercícios vai pedir para vocês entenderem, com a ajuda do nosso amiguinho R, alguns resultados assintóticos de Máxima Verossimilhança. Dica: Olhe o Capítulo de ML do Greene para ideias. Inicialize o gerador de números aleatórios com o seu número USP. Entregue um texto e o código.

1. Considere a seguinte função de demanda:

$$q_t = \alpha + \phi p_t + \gamma y_t + \zeta p_t r_t + \varphi r_t + \varepsilon_t, \quad \theta = (\alpha \phi \gamma \zeta \varphi)'$$

em que q_t denota a quantidade do bem e p_t seu preço. A variável y_t pode ser pensada, por exemplo, como uma variável exógena como a renda. r_t pode ser interpretado como o preço de um bem substituto. θ é um vetor de parâmetros desconhecido e ε_t um termo econométrico de erro.

Adicionalmente, considere a seguinte função de oferta:

$$p_t = -\frac{\lambda}{\phi + \zeta r_t} q_t + \kappa + \pi q_t + w_t' \rho + \eta_t, \quad \delta = \left(\lambda \kappa \pi \rho'\right)'$$

em que δ é um vetor de parâmetros desconhecido, η_t é um termo econométrico de erro e w_t engloba variáveis exógenas do lado da oferta. O parâmetro λ, em particular, indexa o grau de poder de mercado. $\lambda = 0$ corresponde à competição perfeita. $\lambda = 1$ corresponde a um cartel perfeito ou monopólio. Os casos intermediários estão associados a graus diferentes de poder de mercado. No modelo de oligopólio de Cournot, por exemplo, denotando por n o número de firmas no mercado, temos $\lambda = 1/n$.

   (a) Proponha um procedimento em dois estágios que produza uma estimativa consistente de λ.

   (b) Derive as condições de ortogonalidade do primeiro e do segundo estágios do item (a) e expresse-as dentro do instrumental do método generalizado dos momentos.

(c) Derive a distribuição assintótica do estimador proposto em (a) para λ.

2. No modelo clássico de regressão com heterocedasticidade, o que é mais eficiente, mínimos quadrados ordinários ou GMM? Obtenha os dois estimadores e suas respectivas matrizes de covariância assintótica e prove sua afirmação.

3. Considere o modelo probit. O modelo afirma que, para um determinado vetor de variáveis independentes,

$$\text{Prob}\left[y_i = 1 \mid \mathbf{x}_i\right] = \mathbf{\Phi}\left[\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\right], \quad \text{Prob}\left[y_i = 0 \mid \mathbf{x}_i\right] = 1 - \text{Prob}\left[y_i = 1 \mid \mathbf{x}_i\right].$$

Consideramos a estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros desse modelo em vários pontos. Considere, em vez disso, um estimador GMM baseado no resultado que

$$E\left[y_i \mid \mathbf{x}_i\right] = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\right)$$

Isso sugere que podemos basear a estimativa nas condições de ortogonalidade

$$E\left[\left(y_i - \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\right)\right)\mathbf{x}_i\right] = \mathbf{0}$$

Construa um estimador GMM com base nesses resultados. Observe que este não é o estimador de mínimos quadrados não linear. Explique quais seriam as condições de ortogonalidade para a estimativa não linear de mínimos quadrados desse modelo?

4. Considere a estimativa GMM de um modelo de regressão linear com variáveis instrumentais. Seja $\mathbf{W}_1$ a matriz de ponderação ótima com base nas equações de momento. Seja $\mathbf{W}_2$ alguma outra matriz definida positiva. Compare as matrizes de covariância assintótica dos dois estimadores propostos. Mostre conclusivamente que a matriz de covariância assintótica do estimador baseado em $\mathbf{W}_1$ não é maior do que aquela baseada em $\mathbf{W}_2$.

5. (**Exercício para fazer no R**) Considere o seguinte exercício de Monte Carlo: produza 1000 amostras com $n = 15$ observações sorteadas de uma variável aleatória x_i, em que $x_i \sim N(10, 2)$.

   (a) Estime a média μ e a variância σ^2 com cada uma das 1000 amostras criadas utilizando o estimador de GMM eficiente. Dica: se você precisar de alguma condição de momento que não conheça, recorra à função geradora de momentos da distribuição normal.

(b) Faça um histograma com as 1000 estimativas obtidas para μ e σ^2 no item anterior.

(c) Agora, repita os itens a. e b. utilizando $n = 30, 50, 100, 200$. Qual é a conclusão?