Aula 01

Introdução ao Curso e Modelos Neoclássicos de Demanda

Claudio R. Lucinda

FEA-RP/USP

Agenda

1. Introdução ao Curso e Econometria Estrutural
   - Modelagem Econométrica Estrutural

Agenda

1. Introdução ao Curso e Econometria Estrutural
   - Modelagem Econométrica Estrutural
2. Modelos Neoclássicos de Demanda
   - Abordagem Diferencial e o Modelo de Rotterdam
   - Linear Expenditure System
   - Translog
   - AIDS
   - QUAIDS
   - EASI

Abordagens à Modelagem Econométrica

- Podemos dividir a modelagem econométrica em duas linhas: descritiva e estrutural.
- Vamos entender a diferença entre as duas imaginando a distribuição conjunta entre as variáveis cuja relação se busca entender, $f(x, y)$.
- Coisas específicas que se desejam caracterizar:
  - A distribuição condicional de y dado x, $f(y|x)$;
  - A Esperança condicional de y dado x, $E(y|x)$;
  - A Correlação (ou covariância) condicional de y dado x, $Corr(y|x)$ ou $Cov(y|x)$
  - Um quantil específico α da distribuição de y dado x $Q_\alpha(y|x)$;
  - O Melhor Preditor Linear de y dado um valor para x $BLP(y|x)$

Econometria Estrutural e Econometria Descritiva

- Nos modelos descritivos a idéia principal é caracterizar simplesmente a distribuição conjunta.
- Na abordagem econométrica estrutural buscam-se parêmetros ou primitivas econômicas da distribuição conjunta
- Note-se que **a busca destas primitivas ou parâmetros da distribuição conjunta é sempre dependente destas premissas que limitam a distribuição conjunta.**
- Os elementos essenciais de um modelo estrutural são as hipóteses econômicas e estatísticas, as quais deveriam ser, pelo menos, razoáveis econômica e estatisticamente.
- Note-se: mesmo que você não derive explicitamente um modelo estrutural, **qualquer conclusão de ordem causal ou comportamental está implicitamente se baseando em um modelo estrutural**.

Abordagem Neoclássica de Demanda

- Modelagem de demanda baseada na escolha de uma cesta de bens.
- Usualmente se estipula uma forma funcional flexível que permite que os coeficientes estimados gerem um sistema de equações que caracteriza os "parâmetros estruturais" (usualmente derivadas) que você busca saber.
- Dois caminhos
  - Abordagem Diferencial
  - Abordagem da Função Dispêndio/Função Utilidade Indireta
- De qualquer maneira, existem algumas propriedades que o sistema estimado precisa atender para que ele seja conforme com a teoria econômica

Propriedades Desejáveis de um Sistema de Demanda

- Em geral, a base para este tipo de características é o conceito de um sistema de demanda "teoricamente plausível" – consistente com o processo de maximização da utilidade do consumidor.
- Em especial, este conceito pode ser operacionalizado verificando-se as seguintes condições:
    - *Adding-up* (ou exaustão da restrição orçamentária): supõe-se que o valor das demandas por todos os bens exaure o valor da restrição orçamentária.

$$\sum_k p_k h_k = \sum_k p_k x_k = w$$

    - Homogeneidade: as demandas hicksianas são homogêneas de grau zero nos preços, e as demandas Marshallianas no gasto total e nos preços, ou seja, para escalar $\theta > 0$,

$$h_i(u, \theta \mathbf{p}) = h_i(u, \mathbf{p}) = x_i(\theta w, \theta \mathbf{p}) = x_i(w, \mathbf{p})$$

Propriedades Desejáveis (cont.)

- Simetria: As derivadas cruzadas das demandas Hicksianas são simétricas.
- Negatividade: A matriz de derivadas $\nabla_p h(u, \mathbf{p})$ das demandas hicksianas com relação aos preços tem que ser negativa semidefinida. Esta propriedade pode ser testada por meio da nossa querida Equação de Slutsky.
- Nem todos os sistemas geralmente utilizados pela literatura são consistentes com estas hipóteses.
- Exemplo: Sistema de demanda log-linear supondo $i \in N$ produtos:

$$\ln q_i = \alpha_i + e_i \ln w + \sum_k e_{ik} \ln p_k + u_i$$

Sistema de demanda log-linear:

- Esta função duplo log é muito comumente utilizada porque os coeficientes estimados nos dão diretamente as elasticidades.
- No entanto, ela coloca problemas nos valores das elasticidades e da exaustão da restrição orçamentária. Para entender isso melhor, vamos definir o logaritmo da participação no gasto como sendo $\ln s_i = \ln q_i + \ln p_i - \ln w$. Substituindo isso na equação acima, temos que:

$$\ln q_i = \alpha_i + (e_i - 1)\ln w + (e_{ii} + 1)\ln p_i + \sum_{k \neq i} e_{ik} \ln p_k$$

- Pela restrição de exaustão da restrição orçamentária, mencionada acima, temos que $\sum_k w_k e_k = 1$, o que indica que *ou tereemos todos as elasticidades renda iguais a um ou pelo menos uma delas tem que ser maior do que um*.

Modelo de Rotterdam

- Uma alternativa de modelagem empírica de demanda envolve aproximar diretamente a função demanda resultante do processo de maximização da utilidade do consumidor, que é o resultado do trabalho de Theil, como apresentado por Barnett and Serletis (2008).
- Desta forma, a equação fica sendo:

$$s_I d \log x_I = \theta_I d \log \mathbf{Q} + \sum_{j=1}^{L} v_{ij} \left(d \log p_j - d \log P^f \right)$$

- Uma versão alternativa chamada versão em preços relativos desta equação é dada por:

$$s_I d \log x_I = \theta_I d \log \mathbf{Q} + \sum_{j=1}^{L} \pi_{ij} d \log p_j$$

Modelo de Rotterdam (II):

Para impormos as restrições tradicionais, precisamos que os coeficientes atendam às seguintes restrições:

- *Adding-Up*: $\sum_j \theta_j = 1$ e $\sum_l \pi_{lj} = 0$, para todos os l
- Homogeneidade: $\sum_j \pi_{lj} = 0$, em uma mesma equação
- Simetria da matriz de Slutsky: $\pi_{ij} = \pi_{ji}$
- Concavidade: a matriz de Slutsky precisa ser negativa semidefinida com posto $L - 1$.

Modelo de Rotterdam (III):

As elasticidades preço compensadas e elasticidade renda são:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{s_i}$$
$$\epsilon_w = \frac{\theta_I}{s_I}$$

LES

- Começaremos pelo *Linear Expenditure System*. Este modelo é de Klein and Rubin (1947), e começa com a seguinte função de utilidade indireta:

$$v(\mathbf{P}, w) = \frac{w - \sum p_k b_k}{\prod_k p_k^{a_k}}$$

- Usando a Identidade de Roy, chegamos às seguintes formas funcionais para as equações:

$$s_i = \frac{p_i b_i}{w} + a_i \left[1 - \frac{\sum_k p_k b_k}{w}\right]$$

- O legal deste modelo é que os parâmetros possuem interpretações comportamentais. Uma família cujo sistema de demanda é LES começa comprando quantidades "comprometidas" de cada um dos bens $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, e depois dividindo o excedente, $w - \sum_k p_k b_k$ entre os bens em proporções fixas $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

LES - Elasticidades

- As elasticidades deste sistema de equações são dadas por:

$$
\begin{aligned}
e_{ii} &= \frac{p_i b_i (1 - a_i)}{p_i b_i + a_i \left(w - \sum_k p_k b_k\right)} - 1 \\
e_{ij} &= \frac{-a_i b_j p_j}{p_i b_i + a_i \left(w - \sum_k p_k b_k\right)} \\
e_w &= \frac{a_i w}{p_i b_i + a_i \left(w - \sum_k p_k b_k\right)}
\end{aligned}
$$

Translog

- O paper de Christensen, Jorgenson and Lau (1975) partem da seguinte função de utilidade indireta:

$$\ln(v(\mathbf{P}, w)) = \alpha_0 + \sum \alpha_i \ln \frac{p_i}{w} + \frac{1}{2} \sum \sum \beta_{ij} \ln \frac{p_i}{w} \ln \frac{p_j}{w}$$

- A vantagem desta função de utilidade indireta é que ela aproxima os valores das primeiras e segundas derivadas da função "verdadeira" de utilidade indireta em torno da média amostral dos dados.
- Usando a nossa querida Identidade de Roy, eles chegam no seguinte sistema:

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{\alpha_j + \sum \beta_{ji} \ln \frac{p_i}{w}}{\alpha_M + \sum \beta_{Mi} \ln \frac{p_i}{w}} \\ \alpha_M &= \sum \alpha_k \\ \beta_{Mi} &= \sum \beta_{ki} \end{aligned}$$

Translog Continuação

- Normalizando α_M para ser igual a -1. Vamos calcular as elasticidades, e para isso iremos fazer a seguinte definição:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \alpha_j + \sum \beta_{ji} \ln \frac{p_j}{w} \\ \mathbf{B} &= \alpha_M + \sum \beta_{Mi} \ln \frac{p_j}{w} \end{aligned}$$

- Com isto, podemos definir a quantidade demandada como sendo:

$$x_i = \frac{w}{p_i} \left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \right]$$

Translog – Elasticidades

- Elasticidade-Cruzada:

$$e_{ij} = \left[\frac{\beta_{ji}}{\mathbf{A}} - \frac{\beta_{Mj}}{\mathbf{B}} \right]$$

- Elasticidade-Preço:

$$e_{ii} = \left[\frac{\beta_{ji}}{\mathbf{A}} - \frac{\beta_{Mj}}{\mathbf{B}} \right] - 1$$

- Elasticidade-Renda:

$$e_w = \left[-\frac{\sum \beta_{ji}}{\mathbf{A}} + \frac{\sum \beta_{Mj}}{\mathbf{B}} \right] + 1$$

AIDS (Almost Ideal Demand System)

- Este modelo foi apresentado por Deaton and Muellbauer (1980) se baseia na seguinte função utilidade indireta:

$$v(\mathbf{P}, w) = G(\mathbf{P})[\ln w - \ln g(\mathbf{P})]$$

- Sendo que a função $G(\mathbf{P})$ é homogênea de grau zero nos preços, e a $g(\mathbf{P})$ é homogênea de grau 1.
- A classe geral deste tipo de função de utilidade indireta é denominada PIGLOG ("Price Independent Generalized Linearity", PIGL em forma Logaritmica).
- Na verdade, esta condição se relaciona com a relação entre os preços relativos e a curva de Engel. No caso específico da demanda AIDS, temos que:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{P}) &= \Pi_k p_k^{-\gamma_k} \\ \ln g(\mathbf{P}) &= \alpha_0 + \sum \alpha_k \ln p_K + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \beta_{kj} \ln p_k \ln p_j \end{aligned}$$

AIDS – Continuação:

- Aplicando a nossa amiga, a Identidade de Roy, nesta função de utilidade indireta e cozinhando vigorosamente, temos a seguinte forma para a equação demanda pelo produto na forma de *share de consumo*:

$$s_i = \alpha_i + \sum_i \beta_{ki} \ln p_k + \gamma_i \ln \left(\frac{w}{g(\mathbf{P})} \right)$$

- Deaton e Muellbauer, no seu paper da *AER*, mencionam que uma alternativa quando os preços dos diferentes produtos são muito colineares, é a utilização do seguinte índice de preços de Stone (1954) no lugar da função $g(\mathbf{P})$:

$$\mathbf{P}^* = \sum_k \bar{s}_k \ln p_k$$

- Em que $\bar{s}$ seria a média das participações de mercado. Outra vantagem desta aproximação (conhecida por LA-AIDS) é que a estimação do sistema de equações envolve apenas equações lineares, o que facilita a implementação computacional do modelo.

AIDS – Elasticidades:

- As elasticidades preço e cruzadas do modelo são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\beta_{ii} - \gamma_i s_i}{s_i} - 1 \\ e_{ij} &= \frac{\beta_{ij} - \gamma_i s_j}{s_i} \\ e_w &= 1 + \frac{\gamma_i}{s_i} \end{aligned}$$

- Caso não seja adotada a linearização do índice de preços, as elasticidades-preço assumem uma forma um pouco mais complexa.

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\beta_{ii} - \gamma_i s_i + \gamma_i^2 \ln\left(\frac{w}{g(\mathbf{P})}\right)}{s_i} - 1 \\ e_{ij} &= \frac{\beta_{ii} - \gamma_i s_i + \gamma_i \gamma_j \ln\left(\frac{w}{g(\mathbf{P})}\right)}{s_i} \end{aligned}$$

Restrições

- Simetria: Precisamos que os termos β cruzados sejam iguais, ou:

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}$$

- Adding-up: Esta premissa também permite que recuperarmos os coeficientes da última equação, mesmo ela não estimada pelo fato das participações no gasto necessariamente somarem 1.:

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i &= 1 \\ \sum_i \beta_{ij} &= 0 \\ \sum_i \gamma_i &= 0 \end{aligned}$$

- Homogeneidade:

$$\sum_j \beta_{ij} = 0$$

QUAIDS

- Este modelo foi proposto por Banks, Blundell and Lewbel (2007), permitindo que as curvas de Engel (relacionando share do bem e log da renda) não sejam lineares.
- Basicamente eles fazem isso por meio de uma extensão quadrática do modelo AIDS:

$$
\begin{aligned}
ln(a(\mathbf{p})) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i lnp_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} lnp_i lnp_j \\
b(\mathbf{p}) &= \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i} \\
s_i &= \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} lnp_j + \beta_i ln\left[\frac{w}{a(\mathbf{p})}\right] + \frac{\lambda_i}{b(\mathbf{p})}\left[ln\left[\frac{w}{a(\mathbf{p})}\right]\right]^2
\end{aligned}
$$

QUAIDS – Elasticidades

$$\mu_i = \frac{\partial s_i}{\partial lnw} = \beta_i + \frac{2\lambda_i}{b(\mathbf{p})}\left[ln\left[\frac{w}{a(\mathbf{p})}\right]\right]$$

$$\mu_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial lnp_j} = \gamma_{ij} - \mu_i\left(\alpha_j + \sum_k \gamma_{jk} lnp_k\right) - \frac{\lambda_i \beta_j}{b(\mathbf{p})}\left[ln\left(\frac{w}{a(\mathbf{p})}\right)\right]^2$$

$$e_w^u = \frac{\mu_i}{s_i} + 1$$

$$e_{ij}^u = \frac{\mu_{ij}}{si} + \mathbf{1}(i = j)$$

Exact Affine Stone Index

- O objetivo deste modelo, apresentado no artigo de Lewbel and Pendakur (2009), é construir sistemas de demanda que:
  - Possuem respostas flexíveis aos preços (ou seja, deixa os coeficientes estimados aproximarem as derivadas relevantes);
  - Têm curvas de Engel de qualquer forma (não linear que nem o AIDS ou quadrática que nem o QUAIDS)
  - E os erros da equação são parâmetros aleatórios da utilidade que podem ser incorporados na parte da utilidade do consumidor.
- Notação:
  - x - Log de w
  - $\mathbf{p}$ - Vetor de Log de preços, de dimensão $J \times 1$
  - $\mathbf{z}$ - Vetor de Demographics, de dimensão coluna L

EASI

- Versão aproximada:
- Seja $\tilde{y} = x - \mathbf{p}'\bar{\mathbf{s}}$
- Temos então um sistema de equações, com $\mathbf{b}^r$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{A_l}$ sendo matrizes de coeficientes:

$$\mathbf{s} \approx \sum_{r=1}^{5} \mathbf{b}^r \tilde{y}^r + \mathbf{Cz} + \mathbf{Dz}\tilde{y} + \sum_{l=1}^{L} z_l \mathbf{A_l p} + \mathbf{Bp}\tilde{y} + \varepsilon$$

- Versão Completa
- Seja $y = \frac{x - \mathbf{p}'\mathbf{s} + \sum_{l=1}^{L} z_l \mathbf{p}'\mathbf{A_l p}/2}{1 - \mathbf{p}'\mathbf{Bp}}$

$$\mathbf{s} = \sum_{r=1}^{5} \mathbf{b}^r y^r + \mathbf{Cz} + \mathbf{Dz}y + \sum_{l=1}^{L} z_l \mathbf{A_l p} + \mathbf{Bp}y + \varepsilon$$

Elasticidades

- Semielasticidade-preço compensadas:

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{s} = \sum_{l=1}^{L} z_l \mathbf{A_l} + \mathbf{B} y$$

- Semielasticidade-renda compensada:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{s} = \sum_{r=1}^{5} \mathbf{b}^r y^{r-1} r + \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{p}$$

- As elasticidades-preço são obtidas por meio da divisão desses valores pelos shares (e no caso das elasticidades-preço próprias, subtraindo um).

Banks, James, Richard Blundell, and Arthur Lewbel. 2007. "Quadratic Engel Curves and Consumer Demand." *The Review of Economics and Statistics*, 79(4): 527–539.

Barnett, William A, and Apostolos Serletis. 2008. "The Differential Approach to Demand Analysis and the Rotterdam Model." , (12319).

Christensen, Laurits R., Dale W. Jorgenson, and Lawrence J. Lau. 1975. "Transcendental Logarithmic Utility Functions." *The American Economic Review*, 65(3): 367–383.

Deaton, Angus, and John Muellbauer. 1980. "An almost ideal demand system." *The American economic review*, 70(3): 312–326.

Klein, LR, and H Rubin. 1947. "A constant-utility index of the cost of living." *The Review of Economic Studies*, 18(1): 65–66.

Lewbel, Arthur, and Krishna Pendakur. 2009. "Tricks with hicks: The EASI demand system." *American Economic Review*, 99(3): 827–863.

Stone, Richard. 1954. *The measurement of consumers' expenditure and behaviour in the United Kingdom, 1920-1938.* Vol. 1, Cambridge, UK:Cambridge University Press.