Claudio Ribeiro de Lucinda

Empirical Industrial Organization

An Applied Course

17 de maio de 2019

Springer

Sumário

Parte I
Dinâmica

Capítulo 1
Modelos de Interações Estratégicas Discretas – Oligopólio

Até o momento falamos sobre as interações estratégicas discretas de empresas – ou seja, um ambiente que pode ser entendido como um jogo estático – de informação completa ou incompleta – em que o payoff decorrente de uma decisão discreta de uma empresa depende do que a outra fizer.

Agora iremos falar destas interações estratégicas discretas, só que de um ponto de vista dinâmico. Esta dinâmica vem de duas fontes:

- As decisões atuais de cada jogador influenciam o seu payoff e o dos outros jogadores no futuro e
- As decisões dos agentes são prospectivas, no sentido em que elas levam em consideração as implicações de suas ações sobre o comportamento futuro delas mesmas e de outras empresas, e como isso afeta os resultados futuros.

1.1 Estrutura de jogos dinâmicos de competição em oligopólio

Vamos supor que otempo é indexado por t, e o jogo tem N jogadores, indexados por n. Usando a estrutura de [5], vamos supor que os competidores jogam em duas dimensões:

- Dimensão "estática"
- Dimensão "dinâmica"

Essa ideia é similar a de um jogo em dois estágios que vimos na discussão de jogos estáticos. A diferença aqui é que a decisão discreta tem efeitos que não se esgotam no final do estágio. Vamos chamar a decisão da etapa "dinâmica" (assumida discreta) como decisão de investimento, e esta ação será denotada por a_{it}.

Em cada período, dadas as decisões das empresas e os valores das variáveis de estado (que presumivelmente afetam custos de produção ou demanda), as empresas competem à la Bertrand ou Cournot. Supondo competição Bertrand, temos que a decisão estática é dada por p_{it}.

Para mantermos consistência com o que vimos antes, vamos supor que este é um jogo de entrada – o que faz com que a decisão a_{it} signifique, em palavras, a decisão "a empresa i está ativa no mercado no período t". Esta decisão será tomada de forma a maximizar o valor presente dos lucros: $\mathscr{V} = E_t(\sum_{r=0}^{\infty} \delta^r \Pi_{it+r})$ com $\delta \in [0,1]$ sendo o fator de desconto e Π_{it} o lucro da empresa i no instante t. Vamos supor que este lucro possa ser expresso da seguinte forma:

$$\Pi_{it} = VP_{it} - FC_{it} - EC_{it} \tag{1.1}$$

Nesta equação, VP_{it} é o lucro variável, FC_{it} o custo fixo e EC_{it} o custo fixo de entrada. Vamos desempacotar as coisas todas.

Função Custo Variável

Esta função Custo Variável vem de um modelo de competição. Por exemplo, se supusermos um modelo de Bertrand com diferenciação horizontal de produtos, podemos escrever a função de lucro variável da seguinte forma:

$$VP_{it} = a_{it} H_t (p^*(n_t) - c) s^*(n_t) \tag{1.2}$$

Em que o preço de equilíbrio $p^*(n_t)$ é uma função do número de empresas ativas no mercado, n_t, a participação de mercado $s^*(n_t)$ também é. Considerando a_{it} a variável que determina se a empresa está ativa no mercado e H_t uma variável que determina o tamanho do mercado. Você pode compactar esta função – ou expressar em algum tipo de "forma reduzida" do seguinte jeito:

$$VP_{it} = a_{it} H_t \theta^{VP}(n_t) \tag{1.3}$$

Em que o $\theta^{VP}(n_t)$ é uma função à lá [4, 3].

Custo Fixo

O Custo Fixo é pago cada período em que a empresa está ativa no mercado, e tem a seguinte estrutura:

$$FC_{it} = a_{it}(\theta_i^{FC} + \varepsilon_{it}) \tag{1.4}$$

Neste caso, o parâmetro θ_i^{FC} representa o valor médio dos custos fixos operacionais (não os custos de entrada). O ε_{it} representa um choque com média zero e informação privada da empresa i. Vamos fazer isso por duas razões.

1. Garante que o jogo dinâmico tem pelo menos um equilíbrio em estratégias puras, como mostrado por Doraszelski e Satterthwaite.
2. É uma motivação conveniente para colocarmos termos erro econométrico. Bem ou mal isso foi feito também no contexto dos jogos discretos. Se esses choques forem independentes no tempo e entre os jogadores, não precisamos nos preocupar com questões de endogeneidade.

Custo de Entrada

Este é o custo que precisa ser pago apenas se a empresa não estiver ativa no período anterior:

$$EC_{it} = a_{it}(1 - x_{it})\theta_i^{EC} \tag{1.5}$$

Esta variável x_{it} toma o valor de 1 se a firma i estava ativa no período $t-1$, ou seja $a_{it-1} = x_{it}$. O θ_i^{EC} representa o custo de entrada.

Caracterização do Problema de Otimização Dinâmica

Neste momento, temos como as variáveis de decisão como a_{it}. As variáveis de estado são:

- O tamanho de mercado H_t (não acho que essa seja essencial.
- O vetor dos $x_{it}, i = 1 \cdots N$
- O vetor dos choques privados de informação $\varepsilon_{it}, i = 1 \cdots N$

Destas variáveis de estado, as que são conhecimento comum são as duas primeiras, que iremos consolidar no vetor $\mathbf{x}_t = (H_t, x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{Nt})$.

Para fecharmos o modelo, temos que especificar a regra de transição dos estados entre os diferentes instantes do tempo. A regra de transição para os x_{it} é fácil, simplesmente $x_{it+1} = a_{it}$. O Tamanho de Mercado segue um processo de Markov exógeno com probabilidade de transição igual a $F_H(H_{t+1}|H_t)$. O terceiro dos elementos, os ε, vamos assumir que segue um processo i.i.d., e que tem uma cdf igual a G_i.

Nesse momento é muito fácil perder de vista o objetivo final. O objetivo final é estimar os parâmetros da função $\theta^{VP}(n_t)$, e os parâmetros $\theta_i^{FC}, \theta_i^{EC}$. Para isso, a gente precisa entender melhor qual é o comportamento de equilíbrio dos agentes – e para isso é essencial estipular qual é esse.

1.2 Equilíbrio

Vamos então especificar o comportamento das empresas. O comportamento das empresas é assumido como sendo de equilíbrio, em que cada empresa escolhe em cada instante do tempo as ações que satisfazem as equações de Bellman.

De uma forma mais técnica, vamos assumir que as empresas estão jogando em um Equilíbrio Markoviano Perfeito. Formalmente, um Equilíbrio Markoviano Perfeito é definido da seguinte forma.

Definition 1.1 (Equilíbrio Markoviano Perfeito). Em jogos estocásicos, um Equilíbrio Markoviano Perfeito é um conjunto de estratégias mistas (como estratégias puras sendo um caso especial) para cada um dos jogos que satisfazem os seguintes critérios:

- As estratégias tem a propriedades de ausência de memória, o que significa que a estratégia de cada jogador pode ser condicionada somente no estado do jogo. Estas estratégias são as funções de reação markovianas.
- O estado somente pode representar informações relevantes para os payoffs dos jogadores. Isso exclui estratégias que dependem de movimentos não substantivos do oponente, assim como estratégias que dependem de *cheap talk*.
- As estratégias caracterizam um equilibrio perfeito de subjogo do jogo.

Com as premissas do jogo detalhadas anteriormente, temos que o vetor de variáveis de estado $(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it}), \forall i \in N$ atende a segunda das premissas. Pela primeira das premissas, podemos caracterizar as estratégias como dependendo apenas do estado do jogo. A estratégia para uma empresa i é representada por $\alpha_i(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it})$. Como a gente assumiu que os ε_{it} são choques privados, a estratégia depende de todos os x e só do seu ε_i.

Podemos definir um perfil de estratégias como um conjunto destes α_i, uma para cada i, da seguinte forma:

$$\alpha = \{\alpha_i(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it}), \forall i \in N\} \tag{1.6}$$

Um perfil de estratégias α^* pode ser considerado como um Equilíbrio Perfeito Markoviano se cada empresa está maximizando seu valor dadas as estratégias dos seus oponentes.

Esta maximização é um problema de programação dinâmica, em que as estratégias dos oponentes estão dadas. A Equação de Bellman desse problema de programação dinâmica é dada por:

$$V_i^{\alpha}(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it}) = \max_{a_{it}} \{\Pi_t^{\alpha}(a_{it}, \mathbf{x}_t) - a_{it}\varepsilon_{it} + \delta \int V_i^{\alpha}(\mathbf{x}_{t+1}, \varepsilon_{it+1}) F_i^{\alpha}(\mathbf{x}_{t+1}|a_{it}, \mathbf{x}_t) dG_i(\varepsilon_{it+1})\} \tag{1.7}$$

Em que o termo $\Pi_t^{\alpha}(a_{it}, \mathbf{x}_t)$ é o lucro no período e o termo $F_i^{\alpha}(\mathbf{x}_{t+1}|a_{it}, \mathbf{x}_t)$ é a transição nas variáveis de estado para a firma i dadas as estratégias de outras firmas.

Para o jogo que estamos detalhando, o primeiro dos termos é dada por:

$$\Pi_t^{\alpha}(a_{it}, \mathbf{x}_t) = a_{it} \left[H_t \sum_{n=0}^{N-1} Pr\left(\sum_{j \neq i} \alpha_j(\mathbf{x}_{t,it}) = n | \mathbf{x}_t \right) \theta^{VP}(n+1) - \theta_i^{FC} - (1 - x_{it})\theta_i^{EC} \right] \tag{1.8}$$

O segundo dos termos, a transição esperada das variáveis de estado é dado por:

$$F_i^{\alpha}(\mathbf{x}_{t+1}|a_{it}, \mathbf{x}_t) = \mathbf{1}(x_{it+1} = a_{it}) \left[\prod_{j \neq i} Pr(x_{jt+1} = \alpha_j(\mathbf{x}_{t,jt}|\mathbf{x}_t) \right] F_H(H_{t+1}|H_t) \tag{1.9}$$

Podemos definir então o Equilíbrio Perfeito Markoviano como sendo o perfil de estratégias α^*, tal que para cada empresa i e vetor de estados $(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it})$ temos:

$$\alpha_i^* = \arg\max_{a_{it}} \{v_i^*(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it}) - a_{it}\varepsilon_{it}\} \tag{1.10}$$

Sendo que o primeiro dos termos, $v_i^*(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it})$, é dado por:

$$v_i^*(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it}) \equiv \Pi_t^\alpha(a_{it}, \mathbf{x}_t) + \delta \int V_i^\alpha(\mathbf{x}_{t+1}, \varepsilon_{it+1}) F_i^\alpha(\mathbf{x}_{t+1}|a_{it}, \mathbf{x}_t) dG_i(\varepsilon_{it+1}) \tag{1.11}$$

Esta solução nos permite determinar qual a probabilidade que cada um dos jogadores atribuem a cada uma das ações – as chamadas *Conditional Choice Probability*.

Conditional Choice Probability

O elemento chave para chegarmos a um arcabouço de estimação vai ser então calcular as CCP, a partir dos coeficientes do modelo. Como elas são integrações em torno da distribuição dos ε_{it}, são objetos de menor dimensionalidade do que as estratégias $\alpha_\mathbf{i}$. Formalmente, temos que a CCP é definida como:

$$P_i(a|\mathbf{x}) = Pr(\alpha_i(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it}) = a|\mathbf{x}_t = \mathbf{x}) \tag{1.12}$$

$$= \int \mathbf{1}(\alpha_i(\mathbf{x}_t, \varepsilon_{it}) = a) dG_i(\varepsilon_{it}) \tag{1.13}$$

Especificamente com respeito ao nosso exemplo de um jogo de entrada, temos que $P_i(1|\mathbf{x})$ é a probabilidade de ficar ativo e $P(0|\mathbf{x}) = 1 - P(1|\mathbf{x})$ a probabilidade de ficar inativo no mercado dados valores dos estados $\mathbf{x}$.

Podemos mostrar que existe uma relação bijetiva (*one-to-one mapping*) entre as funções de estratégia e as CCP. Isso implica que temos que ter, em equilíbrio, um sistema de equações que caracteriza um Equilíbrio Perfeito Markoviano, com as seguintes características:

- Um vetor de N CCPs
- A CCP de um jogador é a melhor resposta às CCP dos seus oponentes, que leva em conta não apenas as estratégias dos seus oponentes mais a sua própria no futuro.

Podemos então definir esta caracterização da seguinte forma:

$$P_i(a|\mathbf{x}) = Pr\left(a = \arg\max_{a_i} \{v_i^P(a_i, \mathbf{x}) - a_{it}\varepsilon_{it}\}|\mathbf{x}\right) \tag{1.14}$$

O termo que captura esta passagem de estratégias para CCP's é o v_i^P, que é o valor da firma i se ela escolhe a ação a_i hoje, e as outras empresas agem de acordo com as CCP's.

Esta integral é mais simples que parece, desde que se adote a parametrização certa para a distribuição $G(\varepsilon)$. No nosso jogo de entrada, dependendo de se supusermos que G seja normal ou valores extremos, ela fica da seguinte forma:

$$P_i(1|\mathbf{x}) = \Phi\left(\frac{v_i^P(1,\mathbf{x} - v_i^P(0,\mathbf{x})}{\sigma_\varepsilon}\right) \tag{1.15}$$

$$P_i(1|\mathbf{x}) = \frac{\exp\frac{v_i(1,\mathbf{x})}{\sigma_\varepsilon}}{\exp\frac{v_i(1,\mathbf{x})}{\sigma_\varepsilon} + \exp\frac{v_i(0,\mathbf{x})}{\sigma_\varepsilon}} \tag{1.16}$$

O passo final é o cálculo da função v_i^P, e expressar isso como uma função dos parâmetros do modelo θ. Nós precisamos avaliar qual é a equação de Bellman em um determinado conjunto de CCPs, então não é tão complexo quanto resolver de fato o problema de Programação Dinâmica – ainda que eu o ache bem chatinho....

Obtendo v_i^P e expressando a CCP em função dos parâmetros

Usando as CCP, conseguimos nos livrar das integrais associadas com a equação de Bellman. Podemos então definir este objeto da seguinte forma:

$$v_i^P(a_i,\mathbf{x}) = \Pi_i^P(a_i,\mathbf{x}) + \delta\sum_{\mathbf{x}'} V_i^P(\mathbf{x}')F_i^P(\mathbf{x}'|a_i,\mathbf{x}) \tag{1.17}$$

Aqui vamos fazer um esforço para separar essa equação em objetos que dependem somente do estado $\mathbf{x}$ e da CCP, e objetos que dependem apenas dos dados e dos parâmetros estruturais. Para o nosso modelo, vamos fazer a seguinte decomposição:

$$\Pi_i^P = a_i\left[H\sum_{n=0}^{N-1} Pr(n_{-i} = n|\mathbf{x},\mathbf{P})\theta^{VP}(n+1) - \theta_i^{FC} - (1-x_i)\theta_i^{EC}\right] \tag{1.18}$$

$$\Pi_i^P = a_i\left[\mathbf{z_i^P}(\mathbf{x})\theta_i\right] \tag{1.19}$$

Em que $\theta_\mathbf{i}$ é o vetor de parâmetros e funções de parâmetros:

$$\theta_\mathbf{i} = (\theta^{VP}(1), \theta^{VP}(2), \cdots, \theta^{VP}(N), \theta_i^{FC}, \theta_i^{EC})^T$$

Enquanto a função $\mathbf{z_i^P}(\mathbf{x})$ é uma função das CCP e dos estados:

$$\mathbf{z_i^P}(\mathbf{x}) = (HPr(n_{-i} = 1|\mathbf{x},\mathbf{P}), \cdots, HPr(n_{-i} = N-1|\mathbf{x},\mathbf{P}), -1, -(1-x_i))$$

Resolvemos a primeira parte, de expressar o lucro por período como uma função de objetos, um como função das variáveis de estado e outro como função dos parâmetros estimáveis. Mas ainda temos que desempacotar o continuation value.

Para desempacotarmos o continuation value, vamos precisar olhar de volta a equação de Bellman, V_i^P, dada pela seguinte equação:

$$V_i^P(\mathbf{x}) = \sum_{a_i=0}^{1} P_i(a_i|\mathbf{x}) \left[a_i \mathbf{z_i^P}(\mathbf{x})\theta_\mathbf{i} + \delta \sum_{\mathbf{x}'} V_i^P(\mathbf{x}')F_i^P(\mathbf{x}'|a_i,\mathbf{x}) \right] \tag{1.20}$$

Para entender o próximo passo, precisamos pensar um pouco mais sobre o que significam estes estados. Vamos imaginar um exemplo como o da seção anterior, onde tínhamos duas empresas (Walmart e Kmart), e as decisões são binárias, entrar ou sair. Então temos quatro possíveis estados da natureza, representados de acordo com a seguinte tabela:

Estado	WalMart	KMart
1	0	0
2	1	0
3	0	1
4	1	1

Tabela 1.1 Estados no jogo com dois players e duas ações

Podemos escrever a equação de Bellman para a Walmart em um estado do jogo (por exemplo, 1) da seguinte forma:

$$V_W^P(\mathbf{1}) = P_W(0|\mathbf{1}) \left[\delta \sum_{\mathbf{x}' \in \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}} V_W^P(\mathbf{x}')F^P(\mathbf{x}'|0,\mathbf{1}) \right] + P_W(1|\mathbf{1}) \left[\mathbf{z_W^P}(\mathbf{1})\theta_\mathbf{i} + \delta \sum_{\mathbf{x}' \in \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}} V_W^P(\mathbf{x}')F^P(\mathbf{x}'|1,\mathbf{1}) \right]$$

Temos quatro equações para a Walmart neste caso. Empilhando as coisas podemos escrever estas equações em forma matricial:

$$\mathbf{V_i^P} = \mathbf{\bar{z}_i}^\mathbf{P}\theta_\mathbf{i} + \delta\mathbf{\bar{F}^P}\mathbf{V_i^P} \tag{1.21}$$

Em que $\mathbf{\bar{z}_i}^\mathbf{P} = \sum_{a_i=0}^{1} P_i(a_i) a_i \mathbf{z_i^P}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{\bar{F}^P} = \sum_{a_i=0}^{1} P_i(a_i)F^P(a_i)$. A partir daqui, podemos expressar o continuation value de uma forma que depende apenas das CCP e das probabilidades de transição, e dos parâmetros de uma forma similar.

$$\mathbf{V_i^P} = (\mathbf{I} - \delta\mathbf{\bar{F}^P})^{-1}\mathbf{\bar{z}_i}^\mathbf{P}\theta_\mathbf{i} \tag{1.22}$$

Definindo $\mathbf{W_i^P} = (\mathbf{I} - \delta\mathbf{\bar{F}^P})^{-1}\mathbf{\bar{z}_i}^\mathbf{P}$, podemos escrever $\mathbf{V_i^P} = \mathbf{W_i^P}\theta_\mathbf{i}$.

Finalmente, podemos expressar a função v_i^P como função explícita dos parâmetros, da seguinte forma:

$$v_i^P(a_i,\mathbf{x}) = \Pi_i^P(a_i,\mathbf{x}) + \delta \sum_{\mathbf{x}'} V_i^P(\mathbf{x}')F_i^P(\mathbf{x}'|a_i,\mathbf{x}) \tag{1.23}$$

$$= a_i\left[\mathbf{z_i^P}(\mathbf{x})\theta_i\right] + \delta \sum_{\mathbf{x}'} F_i^P(\mathbf{x}'|a_i,\mathbf{x})\mathbf{W_i^P}\theta_\mathbf{i} \tag{1.24}$$

$$= \tilde{z}_i{}^P(a_i,\mathbf{x})\theta_\mathbf{i} \tag{1.25}$$

Agora sim, podemos expressar as CCP de um jeito que depende explicitamente dos parâmetros, que vai permitir que estabeleçamos um problema de estimação. Dependendo de se assumimos uma distribuição normal ou de valores extremos, podemos expressar essas CCP do seguinte jeito:

$$P_i(1|\mathbf{x}) = \Phi\left(\frac{[\tilde{z}_i{}^P(1,\mathbf{x} - \tilde{z}_i{}^P(0,\mathbf{x})] \times \theta_\mathbf{i}}{\sigma_\varepsilon}\right) \tag{1.26}$$

$$P_i(1|\mathbf{x}) = \frac{\exp\frac{\tilde{z}_i(1,\mathbf{x})\theta_\mathbf{i}}{\sigma_\varepsilon}}{\exp\frac{\tilde{z}i(1,\mathbf{x})\theta_\mathbf{i}}{\sigma_\varepsilon} + \exp\frac{\tilde{z}_i{}^P(0,\mathbf{x})\theta_\mathbf{i}}{\sigma_\varepsilon}} \tag{1.27}$$

1.3 Estimação

Finalmente, com essas CCP, podemos nos encaminhar para os problemas de estimação propriamente ditos. Inicialmente vamos considerar quais seriam os dados disponíveis e posteriormente iremos falar sobre as abordagens de estimação.

Dados Necessários

Como nosso foco é em jogos de entrada, precisamos ter uma amostra de M mercados, indexados por m, ao longo de T períodos de tempo, e com N empresas tomando decisões em cada um dos mercados – representado por um par (m,t).

Vamos adicionalmente supor que o econometrista conhece todas as variáveis relevantes que entram nas funções e que são de conhecimento comum dos jogadores.[1].

Dentro deste banco de dados, temos as ações das empresas - que também são as vavriáveis de estado do jogo.

Identificação

Vamos assumir duas hipóteses aqui.

[1] Existem métodos que lidam com heterogeneidade não observada pelo econometrista, mas elas saem do escopo do presente texto

- Equilíbrio Único nos dados. Toda observação na amostra vem do mesmo Equilíbrio Markoviano Perfeito.
- Não existem variáveis que são conhecimento comum do jogo e que não são observadas pelo econometrista
- Para uma alternativa $a_{imt} = 0$, por exemplo, definamos $Z_{imt} = \tilde{z}_i^P(a_{imt}, \mathbf{x}_{imt} - \tilde{z}_i^P(0, \mathbf{x}_{imt})$. A Matriz $E(Z'_{imt} Z_{imt})$ é não singular.

Com essas premissas, podemos provar que é possível identificar os $\theta_\mathbf{i}$. Além disso, podemos estimar não parametricamente as CCP do equilíbrio que gerou os dados. Supondo que estas premissas valham nos nossos dados, o passo seguinte é estabelecer o problema de estimação. Iremos aqui especificar este problema em termos de Máxima Verossimilhança, ainda que seja possível especificar em termos de GMM.

1.4 Métodos

Como dito anteriormente, iremos aqui tratar o problema de se estimar os parâmetros $\theta_\mathbf{i}$ como um problema de máxima verossimilhança.

Para valores arbitrários dos parâmetros θ e das CCP $\mathbf{P}$, temos a seguinte contribuição à (log-)verossimilhança de uma linha no banco de dados:

$$Q_{mt}(\theta, \mathbf{P}) = \sum_i \sum_{a_i=0}^{1} \mathbf{1}\{a_{imt} = a_i\} \ln \Psi_i(a_i, \mathbf{x_{mt}}, \mathbf{P}, \theta)$$

Temos que $\Psi_i(a_i, \mathbf{x_{mt}}, \mathbf{P}, \theta)$ é a probabilidade da empresa i tomar a ação a_i dadas as CCP de todas as empresas, as variáveis de estado e os parâmetros do modelo. A log-verossimilhança é a soma destas contribuições em todos os m, t.

Uma vez que estamos assumindo um jogo dinâmico, as probabilidades de ação não podem ser arbitrárias, e sim consistentes com as CCP do Equilíbrio Markoviano Perfeito. Vamos falar de três abordagens para aplicar esta metodologia e ao mesmo tempo fazer cumprir as condições do Equilíbrio Markoviano Perfeito.

1.4.1 Nested Fixed Point, ou Full Information Likelihood

A primeira das abordagens é a do Nested Fixed Point [9, 8], que é essencialmente buscar o vetor de parâmetros θ que maximiza a verossimilhança e, ao mesmo tempo, consiga que as probabilidades sejam iguais às CCP. Formalmente:

$$(\theta_{\mathbf{MLE}}, \mathbf{P_{MLE}}) = \arg \max_{(\theta, \mathbf{P})} Q(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \tag{1.28}$$

$$t.q. \quad P_i(a_i|\mathbf{x}) = \Psi_i(a_i, \mathbf{x}, \mathbf{P}, \theta) \tag{1.29}$$

Operacionalmente, isso significa que a cada passo do otimizador, é necessário resolver um sistema de CCP's – usualmente por um ponto fixo. Só que aqui retorna um problema que vimos no caso de jogos de informação incompleta, e com mais força: a "praga da dimensionalidade" (*Curse of Dimensionality*).

Para termos uma ideia de como isso é mais sério, vamos retornar ao exemplo WalMart vs. KMart. Em um jogo estático, em um determinado mercado m temos duas CCP: $P_W(a_w = 1)$ e $P_K(a_K = 1)$. No caso de um jogo dinâmico, apenas para WalMart temos quatro CCPs, $P_W(a_W = 1|\mathbf{1}), P_W(a_W = 1|\mathbf{2}), P_W(a_W = 1|\mathbf{3}), P_W(a_W = 1|\mathbf{4})$, porque temos apenas duas empresas no jogo. Caso tivéssemos três empresas, teríamos oito empresas, e assim por diante. Em resumo, a menos que tenhamos um problema extremamente limitado no espaço de estado, tais métodos encontram dificuldades computacionais sérias.

1.4.2 Métodos em Dois Estágios

Vamos supor que as duas premissas de identificação valham. Nesse sentido, é possível construir não parametricamente uma estimativa não paramétrica das CCP de equilíbrio (que é o que está sendo jogado nos dados), que representaremos por $\hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}}$.

A partir daí, podemos usar as equações 1.23 para obtermos um estimador consistente do objeto $\tilde{z}_i^{P^0}(a_i, \mathbf{x})$, e depois obtermos uma estimativa dos θ, da seguinte forma, como em [6]:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} Q(\theta, \hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}}) \tag{1.30}$$

Após o cálculo do objeto $\tilde{z}_i^{P^0}(a_i, \mathbf{x})$, o segundo estágio é razoavelmente simples, apenas um modelo de escolha discreta (probit/logit).

A vantagem destes estimadores de dois estágios é que eles são computacionalmente simples. O primeiro estágio é uma regressão não paramétrica e o segundo estágio um probit/logit. O que é mais complicado é a inversão de matriz necessária para o cálculo de $\mathbf{W}$.

No entanto, ainda existem alguns problemas. O principal problema está no viés de pequenas amostras associado com a estimação não paramétrica de $\hat{\mathbf{P}}$. Estimadores não paramétricos precisam de muitas observações e a taxa de convergência dos estimadores diminuem com o número de regressores, o que pode indicar estimativas com muita variância caso a dimensão do espaço de estados cresça muito. Tal variância pode causar viés na estimação dos parâmetros θ.

Em jogos dinâmicos com jogadores diferentes, o número de variáveis observáveis é proporcional ao número de jogadores e, portanto, sujeito à *curse of dimensionality*, e levando a um viés.

No contexto de ML que estamos falando, temos que o gradiente da função verossimilhança tem que ser igual a zero nas CCP verdadeiras:

$$E(h(x_{mt}[\mathbf{1}\{a_{imt} = a_i\} - \Psi_i(a_i, \mathbf{x}, \mathbf{P}^{\mathbf{0}}, \theta)]] = 0 \tag{1.31}$$

No entanto, se a gente plugar o estimado aqui dentro, essa igualdade não vale;

$$E(h(x_{mt}[\mathbf{1}\{a_{imt} = a_i\} - \Psi_i(a_i, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}}, \theta)]] \neq 0 \tag{1.32}$$

Isso ocorre porque o $\hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}}$ entra em uma função não linear e o valor esperado de uma função não linear é diferente da função avaliada no valor esperado. Quanto maior o viés de estimação das CCP, maior o viés das estimativas no segundo estágio.

1.4.3 Estimadores Recursivos em K-Estágios

Para lidar com o problema acima, [1, 2] consideram fazer uma recursão deste procedimento em K estágios.

Ou seja, usando o estimador em dois estágios de [6], e obtendo um estimador θ^{2S}, e o estimador inicial não paramétrico $\hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}}$, recalcular as CCP, obtendo uma estimativa $\hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{1}}$, tal que:

$$\hat{P}_i^1(a_i|\mathbf{x}) = \Psi_i(a_i, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}}, \hat{\theta}^{\mathbf{2S}}) \tag{1.33}$$

Intuitivamente, este estimador deveria ter melhor propriedades do que os dois estágios, o que é mostrado em [2], desde que o equilíbrio subjacente ao jogo seja estável em melhores respostas.

Com esta nova estimativa de $\mathbf{P}$, podemos obter um novo estimador para os parâmetros estruturais, $\hat{\theta} = \arg\max_\theta Q(\theta, \mathbf{P})$. Esse procedimento pode ser repetido por K iterções, daí o nome de estimador em K estágios.

1.4.4 Asymptotic Least Squares

Finalmente, a última abordagem a ser encarada para este tipo de problema é o de Minimos Quadrados Assintóticos. A ideia é bastante simples, e baseado na minimização de uma forma quadrática da seguinte forma, como mostrado em [7]:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\hat{\theta}}(\hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}} - \Psi(\hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}}, \hat{\theta}))^T \mathbf{W}(\hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}} - \Psi(\hat{\mathbf{P}}^{\mathbf{0}}, \hat{\theta})) \tag{1.34}$$

Este procedimento é parecido com o de dois estágios, no sentido que você inicialmente obtém estimativas para as CCP de forma não paramétrica e, posteriormente constrói a função objetivo.

Eles mostram que os casos tradicionais de [6, 2] são casos especiais do estimador deles, mas o fato de utilizarem uma matriz $\mathbf{W}$ mais genérica permite que eles possam ser mais gerais e lidar com os problemas que o estimador de K estágios possui.

Referências

1. Victor Aguirregabiria and Pedro Mira. Dynamic discrete choice structural models: A survey. *Journal of Econometrics*, 156(1):38–67, 2010.
2. Victor Aguirregabiria and Aviv Nevo. Recent Developments in Empirical IO: Dynamic Demand and Dynamic Games. *Working Papers*, 2010.
3. Timothy F. Bresnahan. Empirical models of discrete games. *Journal of Econometrics*, 48(1-2):57–81, 1991.
4. Timothy F. Bresnahan and Peter C. Reiss. Entry in Monopoly Markets. *The Review of Economic Studies*, 57(4):531–553, 1990.
5. Richard Ericson and Ariel Pakes. Markov-Perfect Industry Dynamics: A Framework for Empirical Work. *The Review of Economic Studies*, 62(1):53, 1 1995.
6. V. Joseph Hotz and Robert A. Miller. Conditional Choice Probabilities and the Estimation of Dynamic Models. *The Review of Economic Studies*, 60(3):497, 2006.
7. Martin Presendorfer and Philipp Schmidt-Dengler. Asymptotic least squares estimators for dynamic games. *Review of Economic Studies*, 75(3):901–928, 2008.
8. John Rust. Optimal Replacement of GMC Bus Engines: An Empirical Model of Harold Zurcher. *Econometrica*, 55(5):999, 1987.
9. John Rust. Structural Estimation of Markov Decision Processes. In R. F. Engle and Daniel McFadden, editors, *Handbook of Econometrics*, volume 1, pages 3083–3139. Elsevier B.V., 1994.