Aula 03

Modelos de Escolha Discreta com Dados Agregados

Claudio R. Lucinda

FEA-RP/USP

Agenda

1. Modelos de Escolha Discreta com Dados Agregados

Agenda

Modelos de Escolha Discreta com Dados Agregados:

- Agora iremos discutir um pouco mais como podemos utilizar os modelos de escolha discreta, quando apenas temos dados agregados de mercado – ou seja, não temos microdados com as escolhas dos indivíduos.
- Supondo que os indivíduos ajam de acordo com os modelos de escolha discreta colocados anteriormente, temos que a quantidade vendida em um determinado mercado é dada por:

$$q_j = M \times s_j$$

Escolha Discreta com Dados Agregados: O bem externo

- Além disso, tem um ponto adicional, que é a existência de um bem "externo", cujo preço não é estabelecido em resposta aos preços dos J produtos.
- Caso não fizéssemos isto, os consumidores seriam forçados a escolher apenas entre os bens existentes e a demanda dependeria somente das diferenças de preços. Portanto, um aumento generalizado dos preços não reduzirá a produção agregada.
- A colocação deste produto externo torna necessário que estimemos o tamanho do mercado, uma vez que $s_0 = M \times (1 - \sum^J s_j)$

Derivando as Especificações – Modelo Logit

- Supondo que os consumidores funcionem como no modelo Logit Multinomial tradicional, temos que

$$s_j = M \times \frac{e^{V_j}}{1 + \sum_k e^{V_k}}$$

- Passando o Log dos dois lados:

$$\ln s_j = \ln M + V_j + \ln(1 + \sum_k e^{V_k})$$

- O bem externo, por sua vez, tem a sua participação de mercado dada por:

$$s_0 = M \times \frac{1}{1 + \sum_k e^{V_k}}$$

- Passando o log também, temos que:

$$\ln s_0 = \ln M + \ln(1 + \sum_k e^{V_k})$$

Especificações – Modelo Logit (II):

- Tirando a diferença das duas equações, temos que:

$$\ln s_j - \ln s_0 = V_j + \varepsilon_j$$

- Em que ε_j seria o termo erro econométrico.
- Esta especificação poderia ser estimada – mas existem alguns problemas que iremos discutir mais adiante:
  - IIA
  - Características não observadas dos consumidores
  - Endogeneidade
- Com relação ao IIA, o slide seguinte mostra uma possível solução – o modelo logit aninhado

Especificações – Modelo Nested Logit

- Seguindo Berry (1994), temos que a especificação de teste é a seguinte:

$$\ln s_j - \ln s_0 = V_j + (1 - \sigma) \ln s_{j|K} + \varepsilon_j$$

- Mais uma vez, o termo ε_j representa o termo erro econométrico.
- CUIDADO!!! Na demonstração do Berry, o σ dele é exatamente igual ao meu $1 - \sigma$.
- Caso $\sigma \to 1$, temos que esta especificação colapsa para o Logit Multinomial tradicional.
- Note que o "aninhamento" das alternativas é algo intrinsecamente determinado pelo analista; é ele quem coloca os produtos nos diferentes ninhos.

Identificação nestes Modelos

- Quando estamos falando de dados agregados, uma questão fundamental é a identificação.
- Diferentemente do caso em que tínhamos microdados, em que poderia se assumir que as características dos produtos eram exógenas à escolha de cada um dos produtos, quando estamos falando em dados agregados, com certeza teremos alguma endogeneidade entre as características dos produtos presentes no V_j e o termo ε_j.
- Para resolver isto, a melhor forma é o uso de Variáveis Instrumentais.
- Berry (1994) sugere os seguintes instrumentos:
  - Variáveis de custos dos produtos que não entram em V_j, tais como preço de insumos
  - A soma das características dos outros produtos da mesma empresa
  - A soma das características dos produtos das outras empresas.

Escolha Discreta e Características Não Observáveis

- Vamos aqui discutir uma outra forma de driblar o problema decorrente da IIA.
- Neste caso, a sensibilidade da utilidade à atributos das alternativas depende de características individuais.
- A vantagem é que prescinde de imposições do analista acerca do padrão de substituição entre as alternativas.
- No Logit Aninhado, quem tem que escrever a árvore de escolhas é o analista.
- Exemplos bons dessa abordagem são encontrados em Verboven (1996) e Goldberg and Verboven (1998)

Escolha Discreta...(II):

- Essa abordagem é apresentada no artigo clássico de Berry, Levinsohn and Pakes (1995)
- Uma vez que é baseada em uma microfundamentação bem robusta, permite que estendamos esta metodologia para um conjunto bem amplo de situações. Vamos então começar introduzindo o modelo microeconômico subjacente:

$$U_{ij} = \sum_k x_{jk}\beta_{ik} + \xi_j + \epsilon_{ij}$$

- O termo ξ_j captura as avaliações que os consumidores fazem das características não observaas da alternativa j.
- A diferença em relação ao que vimos na aula anterior é que voltamos a supor que a sensibilidade do consumidor i em relação ao atributo k do produto j pode ser diferente da mesma sensibilidade no caso de outro consumidor, ou seja $\beta_{ik} \neq \beta_{dk}, \forall i, d$.

Escolha Discreta...(III):

- A idéia aqui é modelar a heterogeneidade dos coeficientes dos indivíduos da seguinte forma:

$$\beta_{ik} = \bar{\beta}_k + \beta_k^o \mathbf{z}_i + \beta_k^u \mathbf{v}_i$$

- Ou seja, este coeficiente é composto por uma sensibilidade "média", $\bar{\beta}_k$, mais alguns efeitos:
    - As características individuais observadas possui sobre ele , que denotaremos $\mathbf{z}_i$
    - As características individuais **não observadas**, denominadas $\mathbf{v}_i$
- Substituindo esta definição dos coeficientes, temos que:

$$U_{ij} = \sum_k x_{jk}\bar{\beta}_k + \sum_k x_{jk}\beta_k^o \mathbf{z}_i + \sum_k x_{jk}\beta_k^u \mathbf{v}_i + \xi_j + \epsilon_{ij}$$

Escolha Discreta...(IV):

- Podemos reescrever de forma similar à da aula passada, separando esta especificação em uma parte correspondente á utilidade "média" da alternativa, e a parte aleatória:

$$
\begin{aligned}
U_{ij} &= V_j + \sum_k x_{jk}\beta_k^o \mathbf{z}_i + \sum_k x_{jk}\beta_k^u \mathbf{v}_i + \epsilon_{ij} \\
V_j &= \sum_k x_{jk}\bar{\beta}_k + \xi_j
\end{aligned}
$$

- Na verdade, não temos microdados, somente as participações de mercado e algumas características dos produtos.
- Como fazer neste caso?

Escolha Discreta...(V):

- Temos que a probabilidade de escolha de uma alternativa é, na verdade, a seguinte integral:

$$P_{ij} = \int \int_{\varepsilon} I(\epsilon_{ik} - \epsilon_{ij} < V_{ij} - V_{ik}, \forall k \neq j) f(\varepsilon) d(\varepsilon) f(\mathbf{v}) d(\mathbf{v})$$

- O problema não é a integral de dentro – supondo uma distribuição valores extermos para ε, temos uma forma analítica – mas sim a integral de fora.
- Na maior parte dos casos, não teremos dados observados sobre as características dos consumidores que compraram cada uma das alternativas, de forma que apenas trabalharemos com características não observadas dos consumidores – ou seja, apenas os termos $\mathbf{v}_i$. A análise subseqüente será em três etapas.
  1. Especificar as participações de mercado em função dos coeficientes;
  2. Recuperar os sinais dos termos ξ_j a partir dos resultados da etapa anterior;

Estimando as Participações de Mercado

- A primeira parte é recuperar as participações de mercado em função da utilidade média, V_j, e dos coeficientes β_k^u. Uma vez que os termos $\mathbf{v}_i$ não são observados, iremos impor uma premissa sobre eles, que é a que eles seguem uma distribuição qualquer, enquanto que os termos ϵ_{ij} seguem a já tradicional distribuição de Valores Extremos I. Desta forma, temos que:

$$s_j(V_j, \beta) = \int \left(\frac{\exp[V_j + \sum_k x_{jk}\beta_k^u \mathbf{v}_i]}{1 + \sum_{q>0} \exp[V_q + \sum_k x_{qk}\beta_k^u \mathbf{v}_i]} \right) f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

- Para resolvermos esta integral, precisamos de uma forma funcional para $f(\mathbf{v})$.
- Geralmente, utiliza-se dados obtidos a partir de microdados – por exemplo, se a renda dos consumidores não é observada, usa-se distribuição da renda buscada na PNAD.

Calculando Integrais por Simulação

- Não existe uma forma analítica de resolução desta integral, de forma que teremos que usar ou métodos numéricos (por exemplo, método da quadratura) ou métodos de simulação para a obtenção do valor desta integral – e, consequentemente, o valor desta participação de mercado.
- Vamos falar um pouco sobre os métodos de simulação.
  - Em geral simulação consiste em sortear valores aleatórios de uma distribuição, calcular alguma coisa com cada um destas valores sorteados e depois tirar uma média destes cálculos. Em todos estes casos, o pesquisador quer calcular uma média da forma $\tilde{t} = \int t(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$.
- Vamos supor que você tenha sorteado *ns* valores desta distribuição $f(\mathbf{v})$. Vamos supor que $\mathbf{z} = \varnothing$.

Calculando Integrais por Simulação

- Com estes valores, podemos calcular a participação de mercado da alternativa j com a seguinte fórmula:

$$\hat{s}^{ns}(\delta_j, \beta) = \frac{1}{ns}\sum_{r=1}^{ns}\left[\frac{\exp[V_j + \sum_k x_{jk}\beta_k^u \mathbf{v}_{ir}]}{1 + \sum_{q>0}\exp[V_q + \sum_k x_{qk}\beta_k^u \mathbf{v}_{ir}]}\right]$$

- Ou seja, pegamos os valores de $\mathbf{v}_i$ associados com os sorteios de cada característica, e calculamos a fórmula do *share* com cada um deles. Depois disso, somamos e tiramos a média.
- Evidentemente, a utilização de métodos de simulação aumenta a imprecisão das estimativas, que pode ser reduzida quanto maior for o valor de ns.

Calculando a Utilidade Média

- O passo seguinte é calcular os efeitos das características dos produtos que não são observadas pelo analista. Para isso, precisamos obter estimativas do termo V_j.
- Tendo este negócio, podemos obter estimativas do ξ_j, do $\bar{\beta}_j$ e do β_k^u.
- Em primeiro lugar, no paper BLP, os autores notam que a seguinte relação:

$$V_j^h = V_j^{h-1} + \ln[s_j] - \ln[\hat{s}_j^{ns}]$$

- É um chamado *contraction mapping*, que possui um ponto fixo. Ou seja, se fizermos um processo sequencial, começando com um valor inicial para o V_j, e em cada iteração ajustando o valor de V_j no valor igual à diferença entre os logs da participação de mercado e a participação de mercado observada, acabaremos em um ponto fixo, em que não há alterações adicionais em V_j.

Calculando a Utilidade Média (II):

- Um bom valor inicial para fazer a recursão pode ser a participação de mercado obtida com a estimação de um modelo LOGIT multinomial.
- Na verdade, na programação é utilizada a seguinte versão não-linear do estimador:

$$\exp[V_j^h] = \exp[V_j^{h-1}] \times \frac{s_j}{\hat{s}_j^{ns}}$$

- Desta forma, obtemos uma estimativa para o termo V_j. A partir desta estimativa, podemos construir as condições de momento, lembrando que o termo ξ_j pode ser entendida como a diferença entre a utilidade média e os valores dos coeficientes médios.

Construindo as Condições de Momento

- Tendo este valor para V_j, podemos definir os erros da seguinte forma:

$$\xi_j = V_j - \sum_k \bar{\beta}_k x_{jk}$$

- O problema é que aqui temos que estimar os $\bar{\beta}_{\mathbf{j}}$. Isto é análogo a concentrar a função objetivo para ficar apenas em termos dos $\beta^{\mathbf{u}}$. Vamos fazer isso projetando a covariância entre os $\mathbf{x_j}$ e as variáveis instrumentais, $\mathbf{Z}$, na covariância entre o V_j e os instrumentos, ou seja:

$$\bar{\beta}_j = (\mathbf{K}(\mathbf{Z}^\mathbf{T}\mathbf{Z})\mathbf{K}^\mathbf{T})^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{Z}^\mathbf{T}\mathbf{Z})\mathbf{L}$$

Construindo as Condições de Momento (II)

- Supondo que tenhamos variáveis exógenas e instrumentos para os preços, podemos construir as condições de momento da seguinte forma:

$$m(\theta) = \Xi \mathbf{Z}$$

- Em que Ξ é o empilhamento dos ξ_j. Com isto, podemos construir uma função objetivo da seguinte forma:

$$q = \Xi^T \mathbf{Z} \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{Z}^T \Xi$$

- Em que Φ representa uma estimativa da matriz variância-covariância dos momentos das equações, ou $\Phi = E(\mathbf{Z}^T \Xi \Xi^T \mathbf{Z})$.

Iterando até Convergir

- Neste ponto, perdemos de vista os coeficientes β_k^u. Para isto, precisamos ter em mente que as etapas anteriores são repetidas todas ao longo de cada iteração. Na verdade, uma vez que, para os valores de β_k^u temos forma analítica para os coeficientes $\bar{\beta}_k$, podemos fazer o seguinte; em cada iteração apenas usar métodos numéricos para obter o mínimo valor da função critério na iteração. Ou seja, em cada iteração temos o seguinte roteiro:
    1. Dados os valores novos dos parâmetros β_k^u, podemos recalcular todo o processo e calcular a função objetivo;
    2. Pelo algoritmo numérico, temos novas sugestões para os valores β_k^u.

Berry, Steven T. 1994. "Estimating Discrete-Choice Models of Product Differentiation." *RAND Journal of Economics*, 25(2): 242–262.

Berry, Steven T, James Levinsohn, and Ariel Pakes. 1995. "Automobile Prices in Market Equilibrium." *Econometrica*, 63(4): 841–890.

Goldberg, Pinelopi K., and Frank Verboven. 1998. "The Evolution of Price Dispersion in the European Carmarket."

Verboven, Frank. 1996. "International Price Discrimination in the European Car Market." *RAND Journal of Economics*, 27(2): 240–268.