Aula 05

Funcoes de Producao II

Claudio R. Lucinda

FEA-RP/USP

Agenda

1. Funcoes de Producao
    - Olley e Pakes
    - Levinsohn e Petrin

Agenda

Olley e Pakes (1996)

- Olley and Pakes (1996) começam o seu estudo afirmando que, para a obtenção de estimativas consistentes dos parâmetros de funções de produção dois problemas inter-relacionados precisam ser resolvidos: um problema de seleção gerado pela relação entre a variável não observada de produtividade e a decisão de saída do mercado, e um problema de simultaneidade gerado pela relação entre produtividade e demandas de fatores.
- Neste caso, os autores propõem um algoritmo, cujo primeiro estágio se baseia na seguinte regra de acumulação para o capital:

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t \\
a_{t+1} &= a_t + 1
\end{aligned}
$$

- Sendo k_t o capital, δ a depreciação, e i_t o investimento em capital, e a_t a idade da empresa.

Olley e Pakes (II)

- Além disso, os autores assumem uma regra de evolução para a produtividade, denominada ω_t, que seguiria um processo Markoviano de ordem 1.
- Também assume-se que a empresa maximiza o valor presente dos seus lucros, o que nos dá a seguinte equação de Bellman:

$$V_t(\omega_t, a_t, k_t) = \max\{\Phi, \sup \pi_t(\omega_t, a_t, k_t) - c(i_t) + \beta E[V_{t+1}(\omega_{t+1}, a_{t+1}, k_{t+1})$$

- Em que Φ representa o valor terminal da planta, π_t representa os lucros da empresa como função das variáveis de estado (produtividade, idade e capital - supõe-se que o trabalho se ajuste instantaneamente às mudanças nestas variáveis), e $c(i_t)$ representa o custo do ajustamento do estoque de capital – denominado investimento.
- Enquanto isso, β é o coeficiente de desconto intertemporal da empresa e J_t é o conjunto de informações disponível no instante t.

Olley e Pakes (III):

- O que esta relação quer dizer é que, se o valor presente dos lucros da empresa, descontados adequadamente, for menor do que o valor terminal dos ativos, ela decidirá sair do mercado e fechar a empresa.
- Caso isso não seja verdade, e ela decida manter-se no mercado, ela acabará por estabelecer um nível de investimento consistente com a operação continuada da empresa.
- Dadas as hipóteses sobre o comportamento do termo de produtividade, podemos gerar uma regra de saída de mercado e uma demanda por investimentos. A regra de saída é:

$$\chi_t = \begin{cases} 1 & se\, \omega_t \geq \underline{\omega}_t(a_t, k_t) \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

- E podemos construir uma função investimentos da seguinte forma:

$$i_t = i_t(\omega_t, a_t, k_t)$$

Olley e Pakes (IV):

- Segundo Pakes (1994, Teorema 27), temos que esta função, para quaisquer valores do par (a_t, k_t) é crescente em ω_t. Desta forma, definindo $h = i^{-1}$ a função inversa da anterior, podemos escrever:

$$\omega_t = h_t(i_t, a_t, k_t)$$

- Ou seja, podemos escrever a produtividade como uma função do investimento, da idade e do estoque de capital, o que nos permite fazer o seguinte:

$$\ln(y_{it}) = \beta_0 + \beta_a \ln(a_{it}) + \beta_k \ln(k_{it}) + \beta_l \ln(l_{it}) + \omega_{it} + \eta_{it}$$

- Substituindo a função produtividade em termos de i_t, a_t, k_t na função de produção acima, temos que:

$$\ln(y_{it}) = \beta_l \ln(l_{it}) + \phi_t(i_{it}, a_{it}, k_{it}) + \eta_{it}$$

- Uma vez que a colocação da função ω_t vai absorver os logs da idade, do investimento e do estoque de capital.

Olley e Pakes (V):

- Podemos reescrever a função $\phi(\cdot)$ como:

$$\phi_t(i_t, a_t, k_t) = \beta_0 + \beta_a \ln(a_{it}) + \beta_k \ln(k_{it}) + h(i_t, a_t, k_t)$$

- Aqui podemos fazer **o primeiro passo da metodologia de estimação de Olley-Pakes**.
- Em especial, esta metodologia consiste em fazer uma regressão de $\ln(y_{it})$ contra $\ln(l_{it})$ e um polinômio de terceira ou quarta ordem em (i_t, a_t, k_t).
- Ou seja, estimamos a seguinte regressão:

$$\begin{aligned}\ln(y_{it}) \quad &= \quad \beta_0 + \beta_l \ln(l_{it}) + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{1x}(\ln(k_{it}))^x + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{2x}(\ln(i_{it}))^x + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{3x}(\ln(a_{it}))^x + \\ &+ \sum_{x=1}^{3} \gamma_{4x}(\ln(k_{it}) \times \ln(a_{it}))^x + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{5x}(\ln(k_{it}) \times \ln(i_{it}))^x + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{6x}(\ln(i_{it}) \times \ln(a_{it}))^x\end{aligned}$$

- Com isto aqui, conseguimos estimar consistentemente o coeficiente β_l, que é o de ajustamento imediato.

Olley e Pakes (VI):

- No entanto, precisamos ainda dos coeficientes dos outros elementos. Para estimarmos os coeficientes de β_a e β_k, precisamos das estimativas de β_l, bem como de $\hat{\phi}$ e das probabilidades de sobrevivência da empresa (ou seja, estar no mercado, dado que esteve no período anterior).
- Definindo esta variável por χ_{t+1}, podemos escrever um probit da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
Prob(\chi_{t+1} = 1) \quad = \quad & \sum_{x=1}^{3} \gamma_{1x}(\ln(k_{it}))^x + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{2x}(\ln(i_{it}))^x + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{3x}(\ln(a_{it}))^x + \\
& + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{4x}(\ln(k_{it}) \times \ln(a_{it}))^x + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{5x}(\ln(k_{it}) \times \ln(i_{it}))^x + \sum_{x=1}^{3} \gamma_{6x}(\ln(i_{it}) \times \ln(a_{it}))^x
\end{aligned}
$$

- A partir daí, são calculados os valores previstos da probabilidade de sobrevivência. Caso tenhamos uma base de dados balanceada, este estágio não seria necessário. Com este modelo, são estimadas as probabilidades de ocorrência daquele evento, o que denominaremos $\hat{P}_t$.

Olley e Pakes (VII):

- Finalmente, podemos estimar os coeficientes do capital e da idade.
- Em especial, isto é conseguido por meio de estimação não-linear do seguinte modelo:

$$
\begin{aligned}
\ln(y_{it}) - \hat{\beta}_l \ln(l_{it}) &= c + \beta_a \ln(a_{it}) + \beta_k \ln(k_{it}) + \sum_{j=0}^{3-m} \sum_{m=0}^{3} \beta_{mj} \hat{h}_{t-1}^{m} \hat{P}_{t-1}^{j} + e_{it} \\
\hat{h}_{t-1} &= \hat{\phi}_{t-1} + \beta_a \ln(a_{it-1}) + \beta_k \ln(k_{it-1})
\end{aligned}
$$

- Finalmente, os autores calculam a produtividade da seguinte forma:

$$p_t = \exp[\ln(y_{it}) - \beta_l \ln(l_{it}) - \beta_k \ln(k_{it}) - \beta_a \ln(a_{it})]$$

Levinsohn e Petrin (2000)

- Levinsohn and Petrin (2000) levantam um ponto importante sobre os resultados de Olley e Pakes (1996): nem sempre o investimento responde integralmente aos choques de produtividade das empresas.
- Uma vez que o investimento é uma variável de controle sobre uma variável de estado (o estoque de capital), em geral ela é custosa de ajustar.
- Estes custos de ajustamento podem ser de tal ordem que tornam a inversão proposta por Olley e Pakes (1996) para a obtenção da produtividade como função dos investimentos e do capital e da idade inviável.

Levinsohn e Petrin (2000)

- Em primeiro lugar, a produtividade pode possuir um componente previsível e um componente não previsível. Se parte do componente previsível, o ajustamento nas variáveis de estado (o capital) se dará específicamente sobre ela. Neste caso, o investimento somente responderia à parte não esperada do choque de produtividade. Além disso, como o trabalho é suposto que se ajuste instantaneamente, provavelmente ele se ajusta aos dois componentes, criando assim simultaneidade.
- Outro cenário em que isso pode ocorrer é quando a produtividade possui um componente i.i.d. Neste caso, as expectativas sobre o futuro não são ajustadas, ainda que afetam os valores dos fatores variáveis. Além disso, como os choques de produtividades são i.i.d., os investimentos não se alteram em resposta a estes componentes da produtividade.

Levinsohn e Petrin (II)

- Para resolver este problema, Levinsohn e Petrin utilizam o valor de alguns insumos intermediários como *proxies* para resolver este problema. Em especial, considerando a seguinte função de produção:

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_l l^s_{it} + \beta l^u_{it} + \beta_m m_{it} + \beta_f f_{it} + \beta_e e_{it} + \omega_{it} + \eta_{it}$$

- Em que as variáveis são logs de:
  - y_{it} - Valor da Produção
  - k_{it} - Valor do estoque de capital da planta da empresa
  - l^s_{it} - Valor da mão-de-obra qualificada
  - l^u_{it} - Valor da mão-de obra não qualificada
  - m_{it} - Valor das matérias-primas
  - f_{it} - Valor dos combustíveis
  - e_{it} - Valor da eletricidade consumida

Levinsohn e Petrin (III)

- Agora, Levinsohn e Petrin fazem a hipótese que a demanda de insumos intermediários – no caso, energia elétrica – é uma função da produtividade e do estoque de capital (as duas variáveis de estado do nosso problema dinâmico):

$$e_t = e(\omega_t, k_t)$$

- Como eles mostram, a função e , para qualquer valor de k_t, é crescente em ω_t, o que indica que podemos inverter a função e:

$$\omega_t = e^{-1}(e_t, k_t)$$

Levinsohn e Petrin (IV)

- Fazendo esta inversão, a função de produção fica assim:

$$y_{it} = \beta_k k_{it} + \beta_l l_{it}^s + \beta l_{it}^u + \beta_m m_{it} + \beta_f f_{it} + \phi(e_{it}, k_{it}) + \eta_{it}$$

- Em que:

$$\phi_{it}(e_{it}, k_{it}) = \beta_0 + \beta_k k_{it} + \omega_t(e_t, k_t)$$

- Ao invés de usar aproximações polinomiais para limpar os efeitos deste negócio, Levinsohn e Petrin utilizarão um método não-paramétrico diferente para a estimação (*locally weighted least squares*).

Levinsohn e Petrin (V)

- O que eles fazem é calcular o valor esperado de cada uma das variáveis, em função dos termos e_{it} e k_{it}, e aí fazer a diferença:

$$\begin{aligned} y_{it} - E(y_{it}|e_{it}, k_{it}) &= \beta_s(l^s_{it} - E(l^s_{it}|e_{it}, k_{it})) + \beta_u(l^u_{it} - E(l^u_{it}|e_{it}, k_{it})) + \\ &+ \beta_m(m_{it} - E(m_{it}|e_{it}, k_{it})) + \beta_f(f_{it} - E(f_{it}|e_{it}, k_{it})) + \eta_{it} \end{aligned}$$

- Para obtermos o coeficiente β_e, os autores oferecem dois caminhos.
    - Supondo o que os autores chamam de separabilidade, não precisamos estimar os coeficientes para o insumo intermediário cujo consumo serve de instrumento.
    - Este coeficiente seria exatamente igual à elasticidade do produto com relação a ele. No caso de uma função Cobb-Douglas, isto implica que o coeficiente deste insumo é igual á participação do mesmo na receita:

$$\beta_e = s_e$$

Levinsohn e Petrin (VI)

- Neste caso, o processo se facilita muito. Precisamos apenas obter um coeficiente para a variável capital. Isto será obtido por GMM.
- Dados os coeficientes estimados antes, podemos reescrever, para um valor qualquer do parâmetro β_k:

$$y_{it} - \beta_l l_{it}^s - \beta l_{it}^u - \beta_m m_{it} - \beta_f f_{it} - s_e e_{it} - \beta_k^* k_{it}$$

- Sabemos que este negócio é igual aos choques de produtividade mais os componentes aleatórios $\omega_{it} + \eta_{it}$.
- Pela suposição de que a produtividade segue um processo de Markov, temos que $\omega_{it} = E(\omega_{it}|\omega_{it-1}) + \xi_{it}$. Desta forma, temos que:

$$y_{it} - \beta_l l_{it}^s - \beta l_{it}^u - \beta_m m_{it} - \beta_f f_{it} - s_e e_{it} - \beta_k^* k_{it} - E(\omega_{it}|\omega_{it-1}) = \xi_{it} + \eta_{it}$$

Levinsohn e Petrin (VII)

- Tudo estaria tranquilo, se soubéssemos o valor de $E(\omega_{it}|\omega_{it-1})$; no entanto, ainda não o sabemos, de forma que temos que estimar esta parada. Considerando que o termo η_{it} é composto pela parte aleatória da função de produção, podemos afirmar que:

$$E(\omega_{it} + \eta_{it}|\omega_{it-1}) = E(\omega_{it}|\omega_{it-1})$$

- Assim, podemos usar como estimativa de $\omega_{it} + \eta_{it}$ o seguinte:

$$y_{it} - \beta_l l_{it}^s - \beta l_{it}^u - \beta_m m_{it} - \beta_f f_{it} - s_e e_{it} - \beta_k^* k_{it}$$

- Agora, para a estimativa de ω_{it-1}, podemos fazer o seguinte:

$$\hat{\omega}_{it-1} = \hat{\phi}_{it-1} - s_e e_{it-1} - \beta_k^* k_{it-1}$$

Levinsohn e Petrin (VIII)

- Com estes valores, podemos utilizar mínimos quadrados ponderados locais para calcular $E(\omega_{it}|\omega_{it-1})$, que denominaremos $\hat{\Omega}$.
- Usando esta estimativa, podemos calcular os valores de $\xi_{it} + \eta_{it}$, para os valores candidatos de β_k. Finalmente, podemos calcular a função critério:

$$q = \left(\sum_{i} \sum_{t=t_0+1}^{T} (\xi_{it} + \eta_{it}) k_{it} \right)^2$$

- Com isso, estimamos o coeficiente do capital.

Wooldridge

- Neste paper, Wooldridge (2009) se volta para a questão de como implementar os estimadores OP e LP em um contexto de GMM.
- Ele mostra que é possível estimar os parâmetros na forma de um sistema de equações não lineares.
- Esse negócio é implementável no GMM do Stata.

ACF

- Ackerberg, Caves and Frazer (2006) criticam OP e LP e propõem uma alternativa.
- A principal crítica está relacionada com o que exatamente se consegue com a utilização de medidas de insumos intermediários como proxies para a produtividade.
- O principal ponto pode ser visto quando a gente olha para a forma funcional do primeiro estágio de OP e LP:

$$y_{it} = \beta_L l_{it} + \phi_t(m_{it}, k_{it}) + \varepsilon_{it}$$

- Como a gente consegue variação em l_{it} independente de ϕ_t? Porque se a gente acertasse direitinho ϕ_t, provavelmente esse negócio deveria andar muito junto.

ACF (II)

- Eles mostram que a gente só consegue esta variação independente – e a identificação de β_L se a gente assumir algumas hipóteses sobre o timing da decisão sobre a quantidade de insumos intermediários (e trabalho também).
- Por exemplo, caso m_{it} seja escolhido conjuntamente com l_{it} não temos variação independente.
- Por outro lado, se m_{it} for escolhido em um instante do tempo diferente de l_{it} mas ω_{it} mexe nesse meio tempo, vc tem variação independente, mas não consegue recuperar o ω_{it}correto

ACF (III)

- ACF sugerem dois casos em que isso pode funcionar:

1. Erro de medida em l_{it} com m_{it} sendo escolhido simultaneamente
2. l_{it} é escolhido depois de m_{it} e ω não varia neste meio tempo
3. O caso que eles usam é assumir que as formas escolhem l_{it} no instante $t-b$, com $(0 < b < 1)$, o que implica que a empresa escolhe a quantidade de trabalho depois do estoque de capital k_{it} ter sido determinado em $t-1$, por $k_{it-1} + i_{it-1}$, mas antes de a quantidade de insumos m_{it} forem escolhidos.
    1. Com esta ordem nas decisões de escolha, o l_{it} pode ser uma variável de estado e determinando a quantidade de insumos intermediários.

Timing

$$k_{it} = k_{it-1} + i_{it-1}$$
$$\mathbb{I}_{t-1} = \omega_{t-1}$$

$$l_{it}$$
$$E(\omega_{t-b}|\mathbb{I}_{t-1}) = E(\omega_{t-b}|\omega_{t-1})$$

$$m_{it} = h_t(\omega_{it}, k_{it}, l_{it})$$
$$E(\omega_t|\mathbb{I}_{t-b}) = E(\omega_t|\omega_{t-b})$$

$t-1$ ——— $t-b$ ——— t

ACF (IV)

- Eles sugerem o seguinte algoritmo:
- Primeiro, considerando a seguinte função de produção:

$$y_{it} = \alpha + \beta_L l_{it} + \beta_K k_{it} + \omega_{it} + \varepsilon_{it}$$

- Sendo que:
  - i_{it} e k_{it} determinados em $t-1$
  - l_{it} em $t-b, 0 < b < 1$
  - m_{it} determinado em t

ACF (V):

- Além disso, os choques de produtividade seguem a seguinte regra:

$$\begin{aligned} P(\omega_{it}|I_{it-b}) &= P(\omega_{it}|\omega_{it-b}) \\ P(\omega_{it-b}|I_{it-1}) &= P(\omega_{it-b}|\omega_{it-1}) \end{aligned}$$

- Com todas estas premissas, podemos escrever a escolha de m_{it} como sendo uma função $f(l_{it}, \omega_{it}, k_{it})$, podendo ser invertida. Ou seja, a função de produção fica:

$$y_{it} = \alpha + \beta_L l_{it} + \beta_K k_{it} + f^{-1}(l_{it}, m_{it}, k_{it}) + \varepsilon_{it}$$

Procedimento ACF

- Estágio 1 - Regredir y_{it} em uma função não-paramétrica de l_{it}, m_{it} e k_{it}
- Estágio 2 - Estimar β_L e β_K usando os seguintes momentos:

$$E(\xi(\beta_K, \beta_L)|k_{it}, l_{it-1}) = 0$$

- Sendo que $\xi_{it} = \omega_{it} - E(\omega_{it}|\omega_{it-1})$ – por exemplo:
  - $\xi(\beta_k, \beta_l)$ com uma regressão não paramétrica de $\hat{\phi}_{it} - \beta_K k_{it} - \beta_L l_{it}$ em $\hat{\phi}_{it-1} - \beta_K k_{it-1} - \beta_L l_{it-1}$

Visão geral

1. OP/LP/ACF permite um processo geral, não apenas um AR(1) para a produtividade.
2. DPD pode ter efeitos fixos de empresa enquanto OP não (as condições de momento não seriam válidas).
3. DPD não requer a condição de monotonicidade.
4. DPD pode ter suas premissas testadas diretamente

Ackerberg, Daniel A., Kevin Caves, and Garth Frazer. 2006. "Structural Identification of Production Functions."

Levinsohn, James A., and Amil Petrin. 2000. "Estimating Production Functions Using Inputs to Control for Unobservables."

Olley, Steven, and Ariel Pakes. 1996. "The Dynamics of Productivity in the Telecommunications Equipment Industry." *Econometrica*, 64(6): 1263–1297.

Wooldridge, Jeffrey M. 2009. "On estimating firm-level production functions using proxy variables to control for unobservables." *Economics Letters*, 104(3): 112–114.