Aula 06

Funcoes de Producao e Custos

Claudio R. Lucinda

FEA/USP

Agenda

Agenda

Agenda

1. Fronteiras de Producao Estocasticas
   - Dados em Painel
2. Economias de Escala
3. Funcoes de Custo
   - Spady e Friedlaender
   - Evans e Heckman

Fronteiras de Produção Estocásticas

- Em termos de uma função de produção definida em termos de uma cross-section, uma fronteira paramétrica pode ser definida como:

$$Y_i = f(X_i, \beta) \times TE_i$$

- Em que i representa os produtores, Y_i a quantidade produzida, X_i a quantidade dos insumos, β os coeficientes associados e TE_i a medida de eficiência técnica orientada a produto, e definida como:

$$TE_i = \frac{Y_i}{f(X_i, \beta)}$$

Fronteiras Estocásticas de Produção (II)

- Na abordagem de Farrell (1957), ele adotou a forma $TE_i = \exp(-u_i)$. Note que, neste momento, não fizemos nenhuma imposição de elemento aleatório, fazendo com que esta fronteira de produção seja determinística.
- Com a imposição de uma forma funcional à la Cobb-Douglas, a forma funcional fica sendo:

$$\ln Y_i = \beta_0 + \sum_r \beta_r \ln X_{ri} - u_i$$

- Aigner, Lovell e Schmidt (1977) fizeram a análise econométrica canônica deste tipo de modelo, incorporando o termo u_i em um termo erro composto, $e_i = v_i - u_i$, em que v_ié uma parte aleatória independente e identicamente distribuída. Neste caso, o modelo completo fica sendo:

$$\ln Y_i = \beta_0 + \sum_r \beta_r \ln X_{ri} + v_i - u_i$$

Fronteiras Estocásticas de Produção (III)

- Supondo que o o termo de ineficiência seja com uma distribuição normal pela metade, podemos escrever a função verossimilhança, com a suposição que os dois termos erros são distribuidos independentemente.
- A partir da estimativa, podemos decompor o valor esperado da ineficiência do termo erro composto, da seguinte forma:

$$E(u_i|e_i) = \frac{\sigma\lambda}{(1+\lambda^2)}\left[\frac{\phi(\frac{e_i\lambda}{\sigma})}{\Phi(-\frac{e_i\lambda}{\sigma})} - \frac{e_i\lambda}{\sigma}\right]$$

- Em que ϕ é a pdf normal, a Φ a cdf normal, $\lambda = \frac{\sigma_u}{\sigma_v}$, e $\sigma = (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)^{1/2}$.
- Neste caso, $TE_i = 1 - E(u_i|e_i)$. Outras alternativas foram propostas, mas agora nós mudaremos o nosso foco para incorporarmos dados em painel.

FEP – Dados em Painel

- Com a dispoibilidade de dados em painel, algumas vantagens surgem.
    - Em primeiro lugar, não necessariamente o termo erro precisa ser exógeno em relação às quantidades dos insumos, como no caso de cross-sections.
    - Além disso, ao adicionar informações ao longo do tempo de uma mesma empresa, isso permite que tenhamos estimativas consistentes da ineficiência.
    - Finalmente, a terceira vantagem está no fato que, em alguns casos não é necessária a imposição de hipóteses distribucionais sobre o termo erro; simplesmente as técnicas de efeitos fixos e aleatórios nos permitem obter estimativas dos parâmetros da função de produção.

FEP – Dados em Painel (II)

- Para entender este ponto melhor, considere a função de produção como vimos anteriormente:

$$\ln Y_{it} = \beta_0 + \sum_r \beta_r \ln X_{rit} + v_{it} - u_{it}$$

- Sendo que $u_{it} > 0$. Usando a transformação within, e se supusermos que o termo u_{it} seja sistemático e não varie ao longo do tempo, podemos estimar os coeficientes da função de produção:

$$(\ln Y_{it} - \ln \bar{Y}_{it}) = \sum_r \beta_r (\ln X_{rit} - \ln \bar{X}_{rit}) + v_i$$

- Podemos definir os termos de ineficiência individual por meio das seguintes definições:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \max(\hat{\beta}_{0i}) \\ u_i &= \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_{0i} \end{aligned}$$

FEP – Dados em Painel (III)

- Em que os $\hat{\beta_{0i}}$ são obtidas como:

$$\hat{\beta_{0i}} = (\ln Y_{it} - \ln \bar{Y}_{it}) - \sum_r \beta_r (\ln X_{rit} - \ln \bar{X}_{rit})$$

- Evidentemente, este tipo de análise impede que utilizemos dados que são constantes ao longo do período amostral.
- Uma solução para este problema é tratar a parte de ineficiência como sendo um efeito aleatório, podemos estimar o modelo da seguinte forma:

$$\ln Y_{it} = (\beta_0 - E(u_i)) + \sum_r \beta_r \ln X_{rit} + v_{it} + (u_{it} - E(u_{it}))$$

- Em que tanto v_{it} e $u^*_{it} = u_{it} - E(u_{it})$ possuem média zero. Este modelo pode ser estimado por Mínimos Quadrados Generalizados.

Dados em Painel

- No contexto da estimação de ineficiênca técnica, algumas vantagens surgem da utilização de dados em painel.
  - Em primeiro lugar, não necessariamente o termo erro precisa ser exógeno em relação às quantidades dos insumos, como no caso de cross-sections.
  - Além disso, ao adicionar informações ao longo do tempo de uma mesma empresa, isso permite que tenhamos estimativas consistentes da ineficiência.
  - Finalmente, em alguns casos não é necessária a imposição de hipóteses distribucionais sobre o termo erro; simplesmente as técnicas de efeitos fixos e aleatórios nos permitem obter estimativas dos parâmetros da função de produção.
- Note que as questões mencionadas anteriormente sobre endogeneidade continuam valendo; apenas assume-se que ela não existam.

Dados em Painel

- Para entender este ponto melhor, considere a função de produção como vimos anteriormente:

$$\ln Y_{it} = \beta_0 + \sum_r \beta_r \ln X_{rit} + v_{it} - u_{it}$$

- Sendo que $u_{it} > 0$.
- Usando a transformação within, e se supusermos que o termo u_{it} seja sistemático e constante ao longo do tempo, podemos estimar os coeficientes da função de produção:

$$(\ln Y_{it} - \ln \bar{Y}_{it}) = \sum_r \beta_r (\ln X_{rit} - \ln \bar{X}_{rit}) + v_i$$

- Podemos definir os termos de ineficiência individual por meio das seguintes definições:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \max(\hat{\beta}_{0i}) \\ u_i &= \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_{0i} \end{aligned}$$

Dados em Painel (III)

- Em que os $\hat{\beta_{0i}}$ são obtidos como:

$$\hat{\beta_{0i}} = (\ln Y_{it} - \ln \bar{Y}_{it}) - \sum_r \beta_r (\ln X_{rit} - \ln \bar{X}_{rit})$$

- Evidentemente, este tipo de análise impede que utilizemos dados que são constantes ao longo do período amostral.
- Uma solução para este problema é tratar a parte de ineficiência como sendo um efeito aleatório, podemos estimar o modelo da seguinte forma:

$$\ln Y_{it} = (\beta_0 - E(u_i)) + \sum_r \beta_r \ln X_{rit} + v_{it} + (u_{it} - E(u_{it}))$$

- Em que tanto v_{it} e $u^*_{it} = u_{it} - E(u_{it})$ possuem média zero.

Dados em Painel – Problemas de Estimação

- Este modelo pode ser estimado por Mínimos Quadrados Generalizados, como o modelo de Efeitos Aleatórios.
- Note-se que, para a estimação da eficiência técnica, não precisamos impor nenhuma hipótese distribucional sobre o termo erro.
- No entanto, para a estimação consistente dos coeficientes, temos alguns problemas:
  - Em primeiro lugar, a estimação por efeitos aleatórios precisa, para a estimação consistente da eficiência técnica, que a dimensão tempo e cross-section da amostra tenda ao infinito.
  - Além disso, esta estimação poe efeitos aleatórios pressupõe que a ineficiência seja exógena à escolha das quantidades de insumos.
  - Finalmente, a imposição de constância na eficiência técnica ao mesmo tempo que exija que a amostra tenda ao infinito é contraditório, demandando o desenvolvimento de modelos em que a eficiência seja alterada ao longo do tempo.

Cornwell, Schmidt e Sickles

- A primeira linha de ação adotada foi a de Cornwell, Schmidt e Sickles, que remonta o modelo acima da seguinte forma:

$$\ln Y_{it} = (\beta_{0t} - u_{it}) + \sum_r \beta_r \ln X_{rit} + v_{it}$$

- Os autores modelam os interceptos como uma função quadrática do tempo, em que o tempo está associado com características específicas dos produtores, no caso Γ:

$$u_{it} = \Gamma_{1i} + \Gamma_{2i} t + \Gamma_{3i} t^2$$

- Os autores inclusive propôem inclusive uma forma de estimativa por Variáveis Instrumentais deste negócio.

Kumbhakar

- A outra grande linha de ação passa pelo método da Máxima Verossimilhança.
- Segundo Kumbhakar (1990), supondo que a ineficiência se altere ao longo do tempo de acordo com a seguinte especificação:

$$u_{it} = \delta_t u_i$$

- E se assumirmos uma distribuição normal truncada para o termo u_i, podemos modelar u_{it} da seguinte forma:

$$u_{it} = [1 + \exp(\gamma t + \rho t^2)]^{-1} \times u_i$$

- Em que γ e ρ são parâmetros a serem estimados.
- Uma linha alternativa de ataque é a de Battese e Coelli (1992), em que apenas um parâmetro deve ser estimado:

$$u_{it} = [\exp(-\eta(t - T)] \times u_i$$

Economias de Escala

- Após estimar os coeficientes das funções de produção, como estimar as economias de escala?
- No caso de empresas multiproduto, Panzar (1989, p. 8) dá uma medida de *economias de escala tecnológicas*, definidas da seguinte forma:

$$S_t = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}}{\sum_j y_j}$$

- Em que $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ é a produtividade marginal do insumo i na produção do bem j, x_i a quantidade do fator i de produção e y_j a quantidade do produto j.
- Os retornos de escala tecnológicos seriam crescentes caso S_t fosse maior do que 1, decrescentes caso fosse menor do que 1, e constantes caso fossem iguais a 1.

Estimação de Função Custo

- Com relação à função custos, uma função muito utilizada é a Translog. Ela possui a seguinte forma funcional:

$$\ln C = a_0 + \sum_i \beta_i \ln q_i + \sum_j \gamma_j \ln r_j + \sum_j \sum_k \gamma_{jk} \ln r_j \ln r_k + \sum_h \sum_i \beta_{hi} \ln q_h \ln q_i + \sum_i \sum_j \phi_{ij} \ln q_i \ln r_j$$

- Em geral, se multiplica as variáveis por 0,5 quando temos os termos quadráticos, para facilitar na hora de montar os sistemas de demanda de fatores.
- Vamos mostrar adicionalmente como se constrói um sistema de demandas por fatores de produção usando o lema de Sheppard:

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial r_i} = \gamma_i \frac{1}{r_i} + \sum_k \gamma_{ik} \frac{\ln r_k}{r_i} + \sum_l \phi_{li} \frac{\ln q_l}{r_i}$$

Lema de Shepard

- Pelo lema de Sheppard, $\frac{\partial C}{\partial r_i} = z_i$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_i}{C} &= \frac{1}{r_i}\left[\gamma_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln r_k + \sum_l \phi_{li} \ln q_l\right] \\
\frac{r_i z_i}{C} &= \left[\gamma_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln r_k + \sum_l \phi_{li} \ln q_l\right]
\end{aligned}
$$

- O lado esquerdo da igualdade mostra a participação da remuneração do fator de produção i no total dos custos.
- Para N fatores de produção, podemos colocar um sistema de $N - 1$ equações, impondo as restrições relevantes, para aumentar a eficiência das estimativas.

Estimação de Função Custos

- Podemos, por teoria de dualidade que vimos anteriormente, afirmar que a qualquer especificação de uma função de produção corresponde uma especificação da função custo, supondo comportamento minimizador de custos por parte das empresas envolvidas.
- Nos anos 70, em geral se afirmava que, na suposição de mercados competitivos para os fatores de produção, a questão da exogeneidade das variáveis independentes parecia resolvida (um ponto de vista como este foi adotado por Varian (1980, cap. 12, pp. 207-9).
- Evidentemente, as questões de identificação induzidas pelo atrito da amostra não estão resolvidas
- Desta forma, vamos nos concentrar mais nos procedimentos de análise propriamente ditos do que nas condições de identificação.

Spady e Friedlaender

- A principal questão que este e o próximo artigo irão enfrentar diz respeito ao fato que, em muitos casos, os serviços oferecidos por uma mesma empresa são diferenciados – ou seja, eles dependem não apenas do número de unidades produzidas, mas também das características destes insumos.
- Por exemplo, um determinado número de minutos de serviço de telecomunucações pode se referir a minutos em horário comercial, e o restante fora do horário comercial.
- Ou ainda, em termos de Kbps trafegados em uma rede, alguns podem ser de dados e outros de voz.
- Consequentemente, duas empresas de telecomunicações podem possuir duas estruturas muito diferentes de produtos e de custos se uma se concentra em um conjunto de serviços e outra em outro.

Funções Hedônicas de Custo

- Para resolver este problema, os autores propõem tratar o produto efetivo como sendo uma função de uma medida genérica da quantidade e das suas qualidades.
- Assim, estimaríamos as chamadas "funções hedônicas de custo".
- Os autores utilizam uma função de custos separável em qualidade, da seguinte forma:
$$C = C[\psi(y, q), w]$$
- Em que $\psi(y, q)$ representa um vetor de funções que mensuram os produtos efetivos e w denota um vetor de preços de fatores de produção.
- Desta forma, $\psi = [\psi^1, \psi^2, \cdots, \psi^n]$, para uma empresa que oferece n produtos físicos diferentes, é um vetor em que cada elemento $\psi^i = \psi^i(y_i, q_1^i, \cdots, q_r^i)$.
- y_i é a quantidade física do produto i
- q_r^i é a r-ésima qualidade do produto i.

Spady e Friedlaender

- Em especial, eles assumem que:

$$\psi^i = y_i \times \phi(q_1^i, \cdots, q_r^i)$$

- Dados estes diferentes serviços, eles estimam uma função custo translog da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\ln C(\psi, w) &= \alpha_0 + \sum_i \alpha_i(\ln \psi_i - \ln \bar{\psi}_i) + \sum_S \beta_s(\ln w_s - \ln \bar{w_s}) + \\
&+ \frac{1}{2}[\sum_i \sum_j A_{ij}(\ln \psi_i - \ln \bar{\psi}_i)(\ln \psi_j - \ln \bar{\psi}_j) + \\
&+ \sum_s \sum_t B_{st}(\ln w_s - \ln \bar{w_s})(\ln w_t - \ln \bar{w_t})] + \\
&+ \sum_i \sum_s C_{is}(\ln \psi_i - \ln \bar{\psi}_i)(\ln w_s - \ln \bar{w_s}) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Spady e Friedlaender

- Além disso os autores colocam no sistema as equações que representam as participações dos fatores no custo total:

$$\frac{w_s x_s}{C} = \beta_s + \sum_t B_{st}(\ln w_t - \ln \bar{w}_t) + \sum_i C_{is}(\ln \psi_i - \ln \bar{\psi}_i)$$

  Até agora, o que há de novo é simplesmente a expressão das variáveis independentes em termos de desvios em relação às suas médias.

- Neste ponto, os autores precisamo expor a sua escolha referente à forma funcional de ψ_i.
- Eles utilizam uma aproximação translog para esta função, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ln \psi_i &= \ln y_i + \sum_h a^i_h (\ln q^i_h - \ln \bar{q}^i_h) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_h \sum_l b^i_{hl} (\ln q^i_h - \ln \bar{q}^i_h)(\ln q^i_l - \ln \bar{q}^i_l) \end{aligned}$$

Spady e Friedlaender

- Além disso, eles impõem as condições de simetria que estão a seguir:

$$
\begin{aligned}
\sum \beta_s &= 1 \\
\sum_s B_{st} &= 0, t = 1, \cdots, m; \\
\sum_s C_{is} &= 0, i = 1, \cdots, n \\
B_{ts} &= B_{st} \\
A_{ij} &= A_{ji}
\end{aligned}
$$

- Os custos marginais de cada serviço podem ser estimados com a seguinte fórmula:

$$
CMg_i = \frac{C}{y_i}\frac{\partial \ln C}{\partial \ln y_i} = \frac{C}{y_i}\left\{\alpha_i + \sum_{i=1}^{M} A_{im}(\ln y_i - \ln \bar{y}_i) + \sum_{j=1}^{M} C_{ij}(\ln w_i - \ln \bar{w}_i)\right\}
$$

Spady e Friedlaender

- Adicionalmente, podemos calcular o grau de economias de escala desfrutadas pela empresa usando a seguinte fórmula:

$$S = \frac{C(y, w)}{\sum_i y_i \frac{\partial C}{\partial y_i}}$$

- Se S for maior do que 1, os retornos de escala são crescentes. Se S é menor do que 1, os retornos de escala são decrescentes e se S for igual a 1, os retornos de escala são constantes.

Evans e Heckman

- Estes autores utilizam um método para testar a sub-aditividade das funções custos no contexto de uma função de produção multiproduto.
- Eles começam assumindo que a função custo da AT&T é dada por
$$C = f(L, T, r, m, w, t)$$
- Em que:
  - L denotava a quantidade de chamadas locais produzidas,
  - T a quantidade de chamadas a longa distância produzidas,
  - w o salário médio,
  - r o custo do capital,
  - m o preço das matérias-primas
  - t um índice de mudança tecnológica.

Evans e Heckman

- A idéia desta separação entre produtos é baseada que, à época, estes eram os principais produtos oferecidos pela empresa.
- Inicialmente eles começam estimando uma função translog de custos da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
C &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ln p_i + \sum_{k=1}^{M} \beta_k \ln q_k + \mu \ln t \\
&+ \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} \ln p_i \ln p_j + \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \delta_{kl} \ln q_k \ln q_l \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \rho_{ik} \ln p_i \ln q_k + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \ln p_i \ln t + \sum_{k=1}^{N} \theta_k \ln q_k \ln t + \tau (\ln t)^2
\end{aligned}
$$

- Além disso, eles colocam um sistema associado de participações dos insumos nos custos totais. Além disso, eles investigam dois pontos adicionais.
  - A função de custos é separável em termos dos produtos
  - A função de custos é aditiva.

Evans e Heckman

- A primeira hipótese, separabilidade em termos dos produtos, se for verdade, implica que a decisão de montante a ser produzido pode ser separada da decisão da composção da quantidade.
- Se ela for válida, podemos agregar as quantidades de L e T em um único índice, da seguinte forma:

$$C = f(L, T, r, m, w, t) = f(A(L, T), r, m, w, t) = f(Q^*, r, m, w, t)$$

- Sendo que $Q^* = A(L, T)$.
- Para que isto valha, devemos ter $\rho_{ik}\beta_l = \rho_{il}\beta_k, \forall i, k \neq l$.
- A segunda hipótese testável, a de aditividade, é que os custos de produzir todos os produtos em um mesmo lugar é igual à soma dos custos de produzir em unidades separadas, ou seja:

$$C = f(L, T, r, m, w, t) = C_L(L, r, m, w, t) + C_T(T, r, m, w, t)$$

- Esta aditividade pode ser testada pela seguinte hipótese, na função translog: $\delta_{kl} = -\beta_k\beta_l$.

Evans e Heckman – Economias de Escopo:

- Finalmente, eles buscam testar a existência de economias de escopo.
- O teste canônico de economias de escopo foi proposto por Panzar (1989) e é da seguinte forma.
- Seja $\hat{T}$ um subconjunto do espaço de produtos $(\hat{T}, T)$, no ponto em que a quantidade produzida é q.
- O grau de economias de escopo, neste caso, é dado por:

$$SC = \frac{C(q_T) + C(q_{\hat{T}}) - C(q)}{C(q)}$$

- Em que y_T é a quantidade produzida do subconjunto de produtos T, $q_{\hat{T}}$ a quantidade produzida do subconjunto de produtos $\hat{T}$.
- A função custo apresentaria economias de escopo se SC for maior do que zero.

Economias de Escopo II

- No entanto, esta metodologia "canônica" apresenta problemas quando aplicada para a função translog.
- Com os coeficientes em questão, a gente somente poderia calcular os valores de $C(q_T)$ e $C(q_{\hat{T}})$ se supuséssemos os valores de algumas quantidades iguais a zero.
- No entanto, como a simples inspeção da fórmula acima pode nos mostrar, temos que este tipo de função não é definida nos pontos em que os argumentos são iguais a zero.
- Evans e Heckman seguem um caminho diferente:
  - Eles testam uma hipótese mais simples, se é mais econômica a produção dos dois bens em conjunto dentro de uma empresa – no caso, a AT&T – ou em duas empresas separadas.

Economias de Escopo III

- O estudo que eles fazem é o seguinte. Considere $Q_t^* = (Q_{1t}^*, Q_{2t}^*)$ como sendo o vetor de bens produzidos em um determinado ano t.
- Além disso, considere também o vetor $Q_M = (Q_{1M}, Q_{2M}) = (\min Q_{1t}^*, \min Q_{2t}^*)$, que são os menores valores dos dois produtos disponíveis na amostra.
- Vamos considerar duas empresas hipotéticas, A e B, que possuem as seguintes quantidades produzidas:

$$\begin{aligned} Q_{At} &= (\phi Q_{1t} + Q_{1M}, \omega Q_{2t} + Q_{2M}) \\ Q_{Bt} &= ((1-\phi) Q_{1t} + Q_{1M}, (1-\omega) Q_{2t} + Q_{2M}) \end{aligned}$$

- Neste caso, temos que ,ω e ϕ pertencem am intervalo $[0, 1]$, pois a quantidade observada seria igual à produção das duas empresas hipotéticas.

Economias de Escopo IV

- Restringindo o domínio na função aos valores observados, temos que as duas empresas, juntas, produzem:

$$\begin{aligned} Q_{1t} + 2Q_{1M} &= Q_{1t}^{*} \\ Q_{2t} + 2Q_{2M} &= Q_{2t}^{*} \end{aligned}$$

- Finalmente, considere as seguintes definições:

$$\begin{aligned} C_{At}(\phi, \omega) &= C(Q_{At}) \\ C_{Bt}(\phi, \omega) &= C(Q_{Bt}) \\ C_{t}^{*} &= C(Q_{t}^{*}) \end{aligned}$$

- A sub-aditividade vai ser obtida calculando a seguinte estatística:

$$Sub(\phi, \omega) = \frac{C_{t}^{*} - C_{At}(\phi, \omega) - C_{Bt}(\phi, \omega)}{C_{t}^{*}}$$

- Podemos notar que esta estatística ainda é uma função de ϕ e ω.