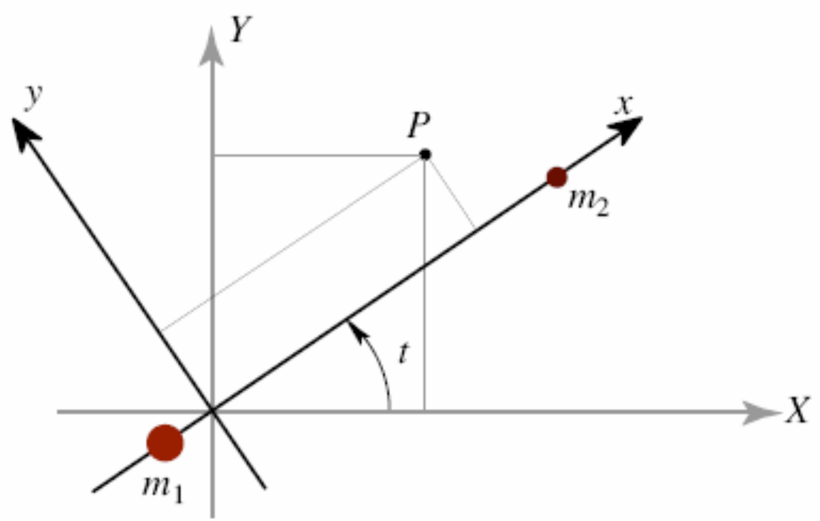
O Problema de 3 Corpos Restrito Circular

No Problema Restrito de 3C Circular (PR3CC) temos *2 primários* de massas m_1 e m_2 que movem-se em círculos, em torno de seu centro de massa; o *menor* (3º corpo) move-se na presença do campo gravitacional dos primários (sem afetá-los, dado que $m_3 << (m_1, m_2)$).



É importante considerar tanto o caso planar como o espacial.

Caso planar:
3 corpos num mesmo plano.

Caso espacial: 2 primários em um plano e 3º corpo no espaço 3D.

Vamos focar o caso planar.

Usualmente, o movimento é visto em um referencial girante *x-y*, de modo que os primários parecem estáticos.

Normaliza-se a velocidade de angular do sistema girante a unidade e, também, a distância entre os primários a unidade de modo que estes se localizem no eixo *x* em *(-μ,0)* e *(1- μ,0),*

$$\text{onde } \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2},\ m_1 > m_2.$$

Seja *(x,y)* a posiçao do 3º corpo no sistema baricêntrico sinódico.

As equações de movimento são dadas por:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \qquad \text{onde} \qquad \Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2},$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \qquad r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2,\quad r_2^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2,$$

A Integral de movimento *J* define uma variedade invariante 3D:

$$\mathcal{M}(\mu, C) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbf{R}^4 \mid J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \text{constante}\},$$

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2\Omega(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C.$$

C é associada à energia do 3º corpo e é a chamada constante de Jacobi.

($\mathcal{M}$ restringe o movimento no espaço de fase 4D a uma variedade invariante 3D)

Pontos Lagrangeanos

Este sistema dinâmico possui 5 pontos de equilíbrio, definidos por :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \Omega_x = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial y} = \Omega_y = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{y}} = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0.$$

Estes pontos são chamados Lagrangeanos, sendo:

- 3 colineares:
  L_1, L_2 e L_3 localizados ao longo do eixo-x *(pontos sela-centro);*
- 2 triângulares:
  L_4 e L_5 estão nos vértices de triângulos equiláteros, *(estáveis, se $m_1/m_2>24{,}96$).*

O valor da constante de Jacobi nestes pontos é denotada por C_k, k=1,2,3,4,5.

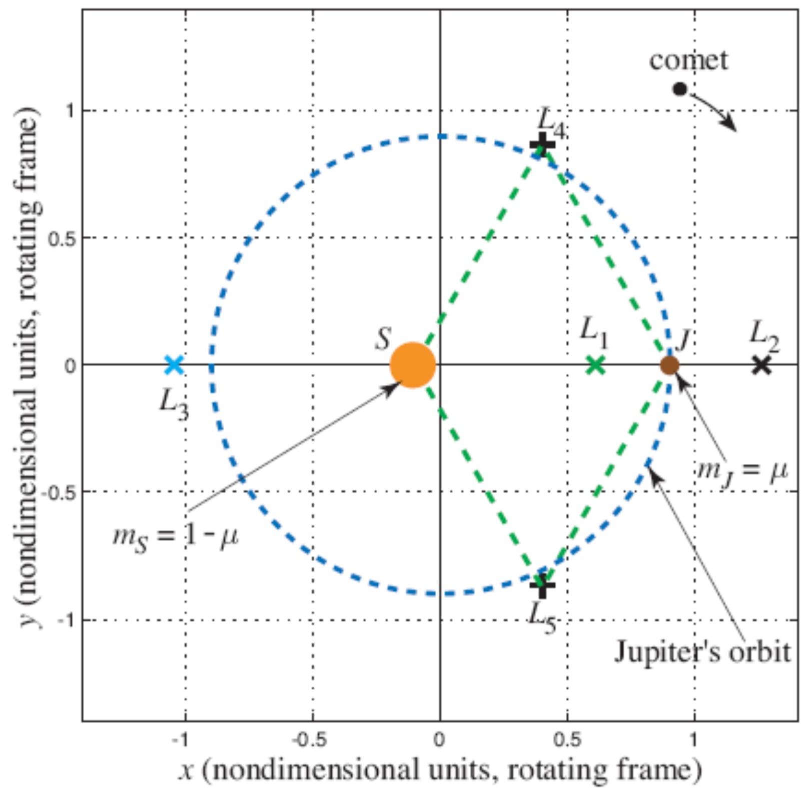


Fig.: Sistema Sol-Júpiter-Cometa

A projeção da superfície $\mathcal{M}$ no espaço de posições é chamada Região de Hill(*), $M(\mu,C)=\{(x,y)|\Omega(x,y)\geq C/2\}$ e constitue a região acessível às trajetórias para um dado valor de C.

Pois:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega(x,y)-C\geq 0$$

Uma Região de Hill é limitada pela curva de velocidade zero, denominada Curva de Hill.

P/ o Sistema Terra-Lua:

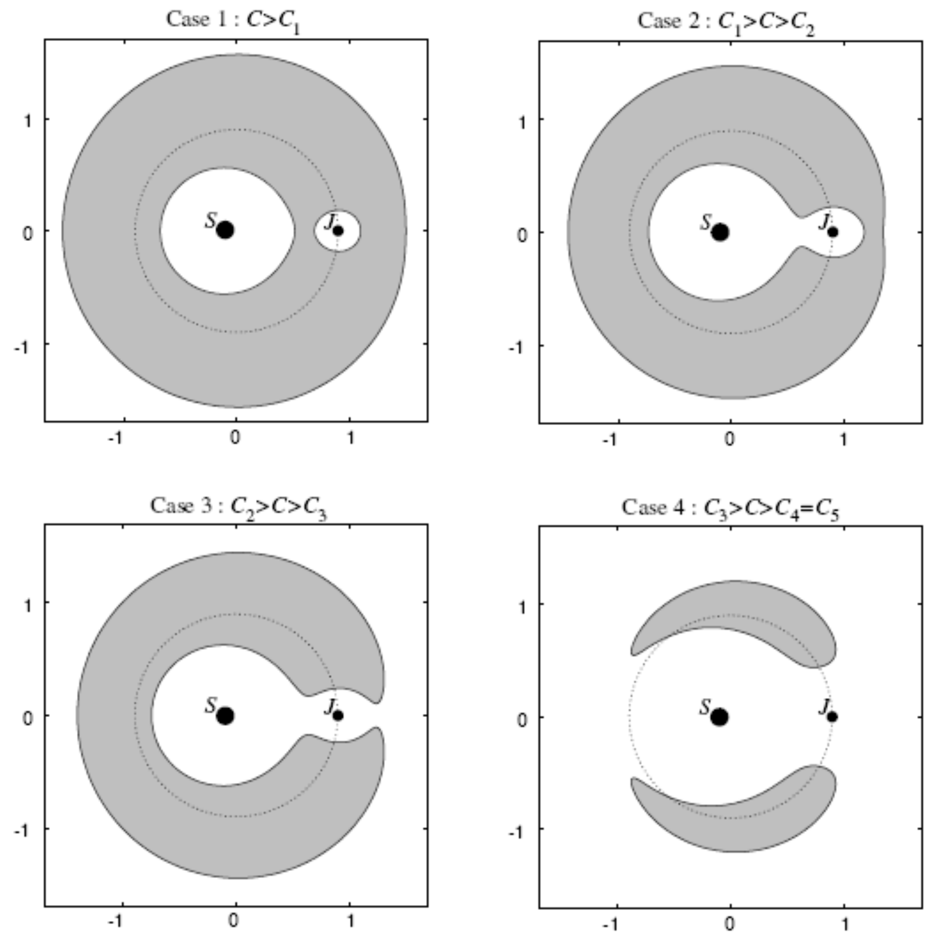
$$C_1 \approx 3{,}20034$$

$$C_2 \approx 3{,}18416$$

$$C_3 \approx 3{,}02415$$

$$C_4 = C_5 = 3$$

5 Possibilidades de Regiões de Hill



Caso 5: $C<C_4$ Todo plano é acessível.

(*) Devido a George William Hill (1838-1914).

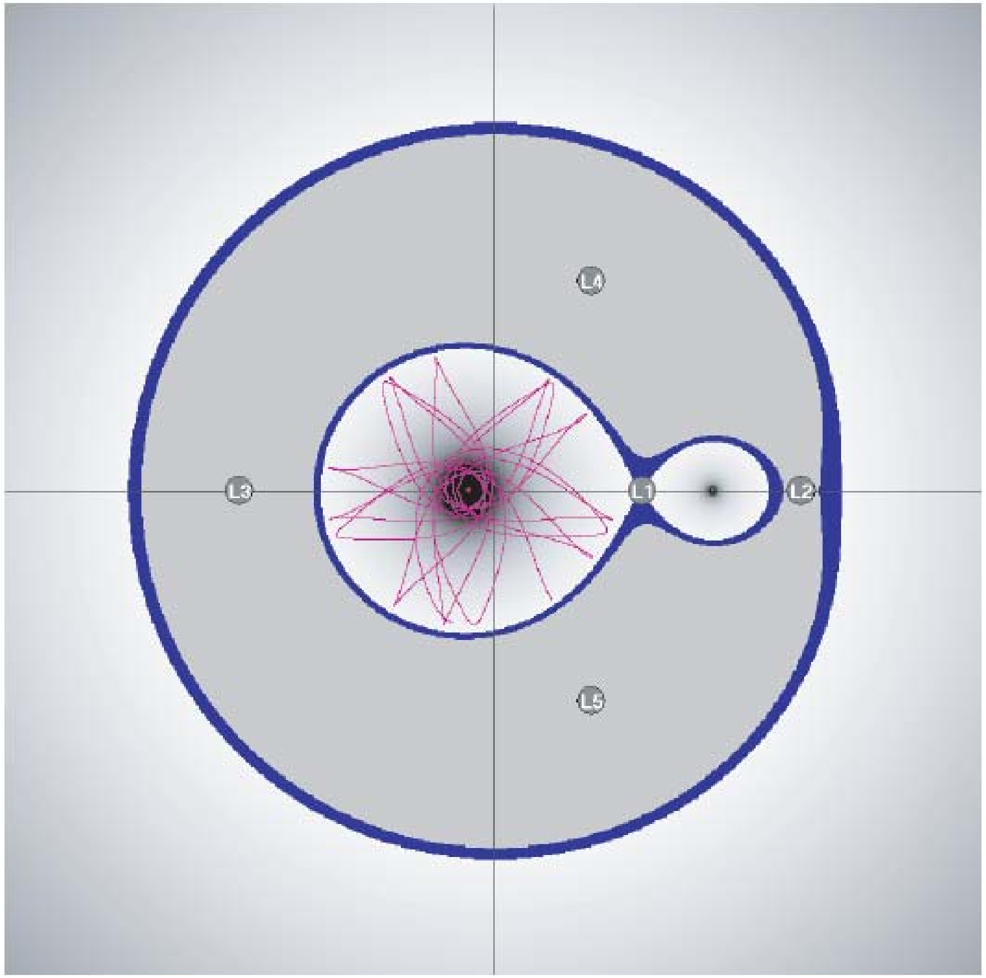


Fig. 33. Zero-velocity curves in a rotating frame for an asteroid close to the Sun *(large black spot)* or a satellite around a planet *(small black point)*. The grey region can never be penetrated by a third body moving either close to the planet, close to the Sun or far outside both primaries. The small circles show the so-called Lagrange points of equilibrium *(for an explanation see in the text)*

***Ref.:** Chaos and Stability in Planetary Sytems, R.Dvorak, F.Freistetter, J.Kurths (Eds.), Lecture Notes in Physics 683, Springer, 2005.*

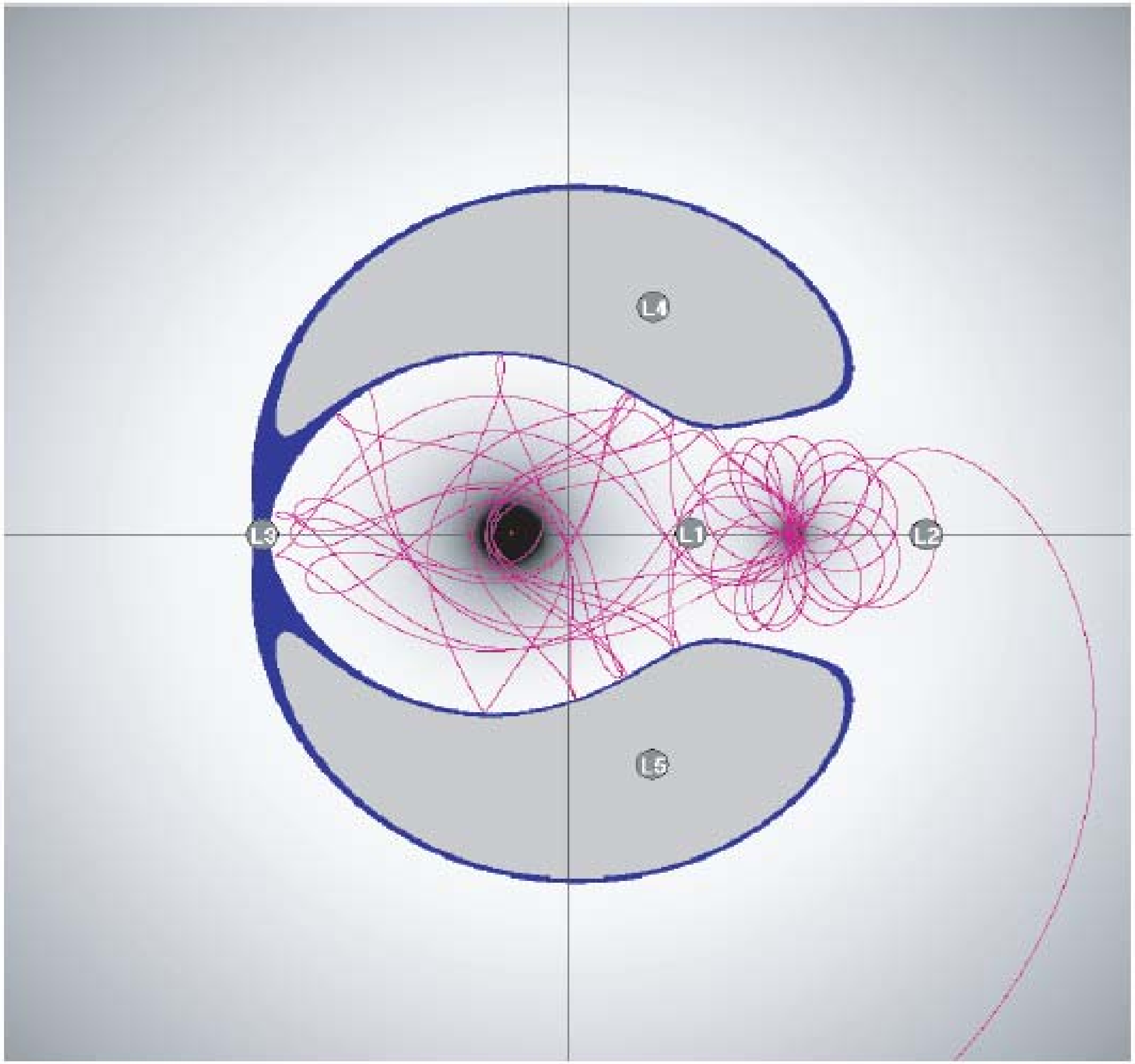
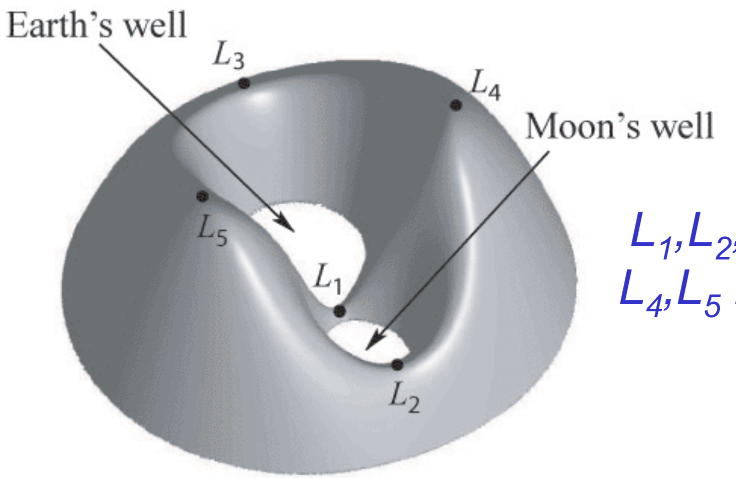


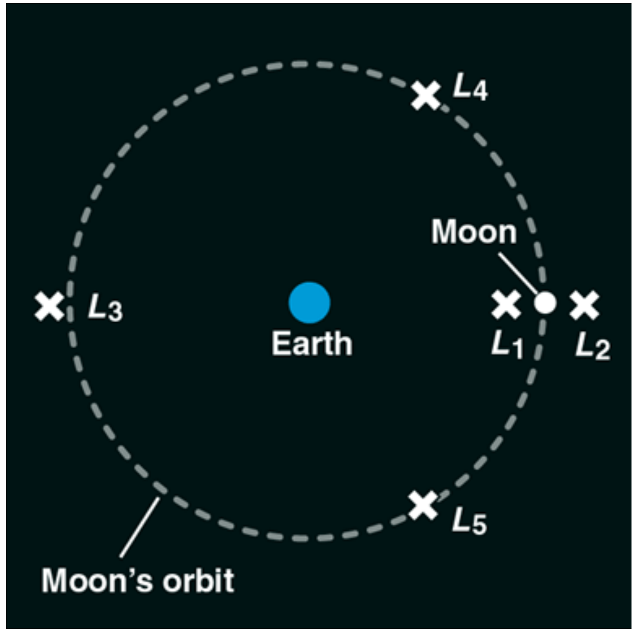
Fig. 35. Zero-Velocity Curve in a rotating frame for a body *(comet)* which can escape from the region around the Sun and the planet *(caption like in Fig. 33)*



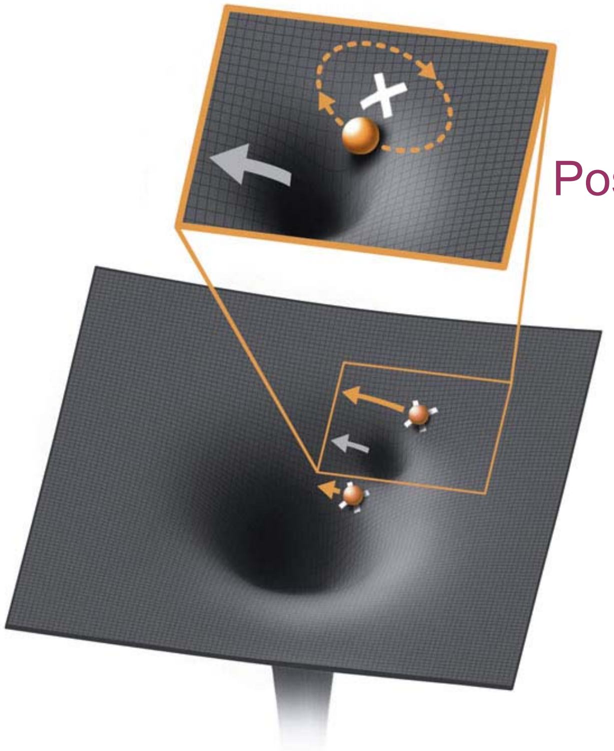
L_1,L_2,L_3 selas
L_4,L_5 máximos globais

Potencial Efetivo do Sistema Terra-Lua

$$U(x,y) = -\Omega + \mu(1-\mu)/2$$



Pontos Lagrangeanos no Sist. Terra-Lua



Possibilidade de uma EN orbitar um dos Pontos Lagrangeanos

Valores do Parâmetro para o Sistema:

Terra-Lua	*μ=0,01211506683*
Sol-Júpiter	*μ=0,0009537*
Sol-Terra	*μ=0,000003*

System	μ
Sun-Jupiter	9.537×10^{-4}
Sun-(Earth+Moon)	3.036×10^{-6}
Earth-Moon	1.215×10^{-2}
Mars-Phobos	1.667×10^{-8}
Jupiter-Io	4.704×10^{-5}
Jupiter-Europa	2.528×10^{-5}
Jupiter-Ganymede	7.804×10^{-5}
Jupiter-Callisto	5.667×10^{-5}
Saturn-Mimas	6.723×10^{-8}
Saturn-Titan	2.366×10^{-4}
Neptune-Triton	2.089×10^{-4}
Pluto-Charon	1.097×10^{-1}

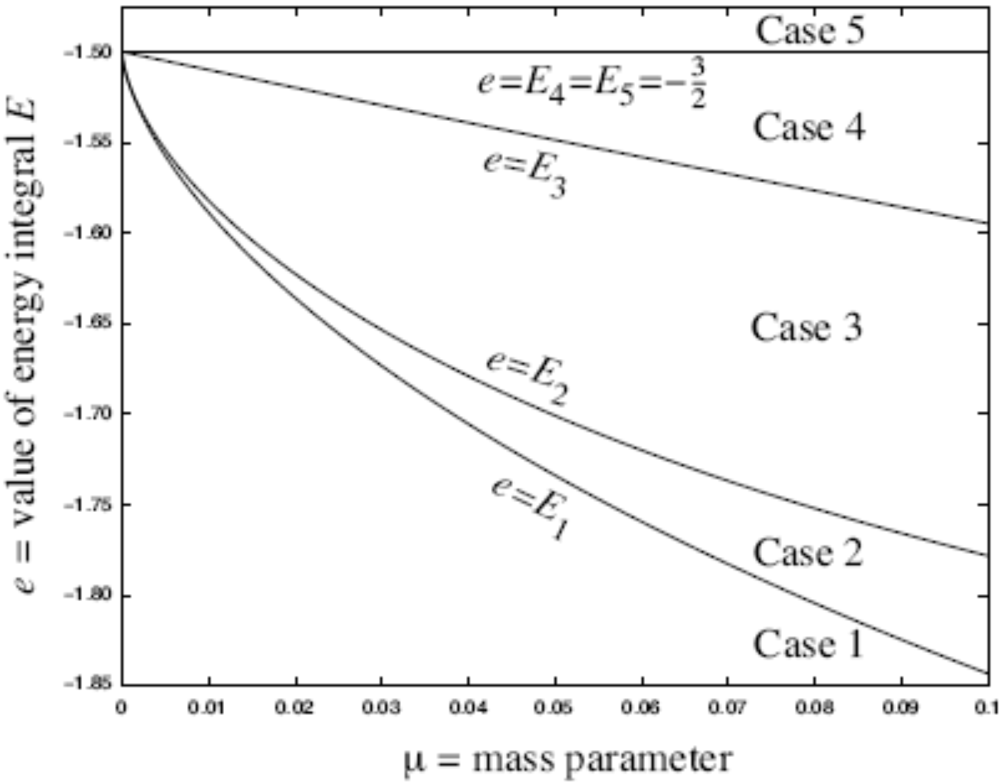
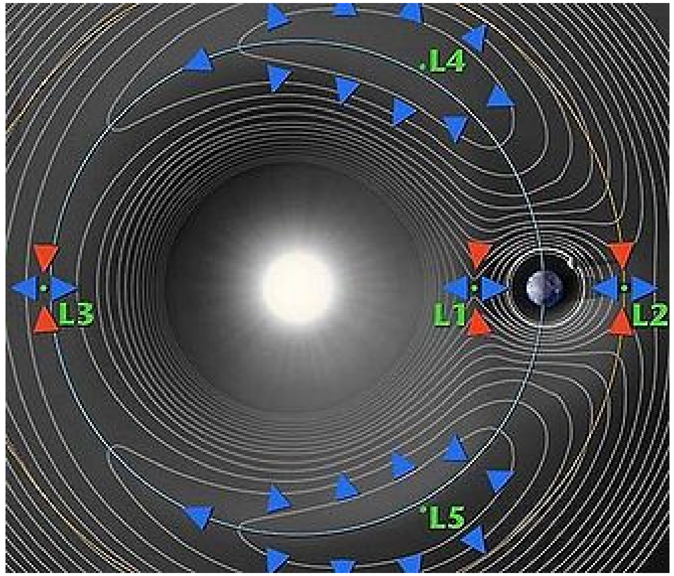


Fig.: Valores de C_k=-2E_k para os 5 pontos Lagrangeanos em função de μ. Estes valores separam os 5 casos de Regiões de Hill.

Se $m_2 << m_1$, então L_1 e L_2 estão aproximadamente a mesma distância r do secundário menor, igual ao raio da Esfera de Hill:

$$r \approx R \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}$$



onde R é a distância entre os 2 primários.

Exemplos: Valores de r para:
Sol e Terra: 1.500.000 km da Terra
Terra e Lua: 61.500 km da Lua=16%d_{TL}

Órbitas Periódicas em Torno dos Pontos Lagrangeanos

Em torno dos Pontos de Equilíbrio existem *Órbitas Periódicas*, que são chamadas *Órbitas de Lyapunov no Problema Planar* e *Órbitas Halo no Problema Espacial.*

A estabilidade de órbitas periódicas é definida pelo estudo da chamada Matriz de Monodromia.