# Dimensionamento de Lotes

## Modelos com Múltiplos Produtos

Prof. Rafael Henrique Palma Lima

# Descrição do Problema

## Problema de Dimensionamento de Lotes com Múltiplos Produtos

Características do problema

- Considera produtos diferentes quem compartilham os mesmos recursos de produção
- A demanda é especificada por produto e por período
- Cada tipo de produto consome uma taxa diferente de recursos
- Os custos de setup e manutenção de estoque também dependem do produto

| | Demandas dos Produtos | | |
|---|---|---|---|
| Período | Produto 1 | Produto 2 | Produto 3 |
| 1 | 185 | 95 | 85 |
| 2 | 250 | 120 | 0 |
| 3 | 0 | 200 | 70 |
| 4 | 120 | 150 | 0 |
| 5 | 150 | 140 | 105 |
| 6 | 200 | 0 | 120 |
| 7 | 0 | 150 | 0 |
| 8 | 0 | 200 | 100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rec / unid | 0,2 | 0,4 | 0,5 |
| Custo Setup | 500 | 400 | 300 |
| Custo Estoque | 2 | 3 | 3 |
| Est. Inicial | 300 | 100 | 50 |
| Est. Final | 300 | 200 | 200 |

# Modelagem do Problema

**Índices**

$t = 1, \dots, T$ períodos

$j = 1, \dots, J$ produtos

**Parâmetros**

$d_{tj}$ demanda no período $t$ para o item $j$

$S_j$ custo de setup (preparação) do produto $j$

$H_j$ custo unitário de manutenção de estoque do produto $j$

$I_{0,j}$ e $I_{F,j}$ estoques inicial e final

$r_j$ recursos consumidos para produzir uma unidade do produto $j$

$R_t$ recursos disponíveis no período $t$

$M$ número grande

| | Demandas dos Produtos | | | |
|---|---|---|---|---|
| Período | Produto 1 | Produto 2 | Produto 3 | Recursos |
| 1 | 185 | 95 | 85 | 160 |
| 2 | 250 | 120 | 0 | 160 |
| 3 | 0 | 200 | 70 | 190 |
| 4 | 120 | 150 | 0 | 170 |
| 5 | 150 | 140 | 105 | 150 |
| 6 | 200 | 0 | 120 | 200 |
| 7 | 0 | 150 | 0 | 200 |
| 8 | 0 | 200 | 100 | 220 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rec / unid | 0,2 | 0,4 | 0,5 |
| Custo Setup | 500 | 400 | 300 |
| Custo Estoque | 2 | 3 | 3 |
| Est. Inicial | 300 | 100 | 50 |
| Est. Final | 300 | 200 | 200 |

## Variáveis de Decisão

$y_{tj}$ indica se há setup no período $t$ para o produto $j$

$x_{tj}$ quantidade produzida do produto $j$ no período $t$

$I_{tj}$ estoque do produto $j$ ao final do período $t$

| | Demandas dos Produtos | | |
|---|---|---|---|
| Período | Produto 1 | Produto 2 | Produto 3 |
| 1 | 185 | 95 | 85 |
| 2 | 250 | 120 | 0 |
| 3 | 0 | 200 | 70 |
| 4 | 120 | 150 | 0 |
| 5 | 150 | 140 | 105 |
| 6 | 200 | 0 | 120 |
| 7 | 0 | 150 | 0 |
| 8 | 0 | 200 | 100 |

| Setup ($y_{t,1}$) | Produção ($x_{t,1}$) | Estoque ($I_{t,1}$) |
|---|---|---|
| $y_{1,1}$ | $x_{1,1}$ | $I_{1,1}$ |
| $y_{2,1}$ | $x_{2,1}$ | $I_{2,1}$ |
| $y_{3,1}$ | $x_{3,1}$ | $I_{3,1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_{T,1}$ | $x_{T,1}$ | $I_{T,1}$ |

Produto 1

| Setup ($y_{t,1}$) | Produção ($x_{t,1}$) | Estoque ($I_{t,1}$) |
|---|---|---|
| $y_{1,2}$ | $x_{1,2}$ | $I_{1,2}$ |
| $y_{2,2}$ | $x_{2,2}$ | $I_{2,2}$ |
| $y_{3,2}$ | $x_{3,2}$ | $I_{3,2}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_{T,2}$ | $x_{T,2}$ | $I_{T,2}$ |

Produto 2

| Setup ($y_{t,1}$) | Produção ($x_{t,1}$) | Estoque ($I_{t,1}$) |
|---|---|---|
| $y_{1,3}$ | $x_{1,3}$ | $I_{1,3}$ |
| $y_{2,3}$ | $x_{2,3}$ | $I_{2,3}$ |
| $y_{3,3}$ | $x_{3,3}$ | $I_{3,3}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_{T,3}$ | $x_{T,3}$ | $I_{T,3}$ |

Produto 3

## Modelo Completo do Problema

Objetivo: $$\min Z = \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J}\left(y_{tj}S_j + I_{tj}H_j\right)$$

Minimiza o custo total da solução

Sujeito a: $$x_{tj} + I_{t-1,j} - d_{tj} = I_{tj}, \qquad \forall t,j$$

Balanço de estoque em cada período/produto

$$\sum_{j=1}^{J} r_j x_{tj} \le R_t, \qquad \forall t$$

Restrição de capacidade por período

$$x_{tj} \le M y_{tj}, \qquad \forall t,j$$

Só há produção quando há setup

$$I_{T,j} = I_{F,j}, \qquad \forall j$$

Garante o Estoque Final

$$x_{tj}, I_{tj} \in Z^*, \forall t,j$$

Variáveis $\boldsymbol{x_{tj}}$ e $\boldsymbol{I_{tj}}$ inteiras (poderiam ser não negativas)

$$y_{tj} \in \{0;1\}, \forall t,j$$

Variáveis $\boldsymbol{y_{tj}}$ binárias

# Modelagem do Problema

Função Objetivo

$$\min Z = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} \left( y_{tj} S_j + I_{tj} H_j \right)$$

$$= y_{1,1}S_1 + I_{1,1}H_1 + y_{1,2}S_2 + I_{1,2}H_2 + y_{1,3}S_3 + I_{1,3}H_3$$

Para $t = 1$

$$+ y_{2,1}S_1 + I_{2,1}H_1 + y_{2,2}S_2 + I_{2,2}H_2 + y_{2,3}S_3 + I_{2,3}H_3$$

Para $t = 2$

$$+ y_{3,1}S_1 + I_{3,1}H_1 + y_{3,2}S_2 + I_{3,2}H_2 + y_{3,3}S_3 + I_{3,3}H_3$$

Para $t = 3$

$$\vdots$$

$$+ y_{T,1}S_1 + I_{T,1}H_1 + y_{T,2}S_2 + I_{T,2}H_2 + y_{T,3}S_3 + I_{T,3}H_3$$

Para $t = T$

## Restrições de Balanço de Estoque

Estoque no período anterior

Estoque ao final do período $\boldsymbol{t}$

Para todos os períodos e produtos

$$x_{tj} + I_{t-1,j} - d_{tj} = I_{tj}, \qquad \forall t, j$$

Produção no período $\boldsymbol{t}$

Demanda do período $\boldsymbol{t}$

Para $t = 1$

$x_{1,1} + I_{0,1} - d_{1,1} = I_{1,1}$ (Produto 1)

$x_{1,2} + I_{0,2} - d_{1,2} = I_{1,2}$ (Produto 2)

$x_{1,3} + I_{0,3} - d_{1,3} = I_{1,3}$ (Produto 3)

Para $t = 2$

$x_{2,1} + I_{1,1} - d_{2,1} = I_{2,1}$ (Produto 1)

$x_{2,2} + I_{1,2} - d_{2,2} = I_{2,2}$ (Produto 2)

$x_{2,3} + I_{1,3} - d_{2,3} = I_{2,3}$ (Produto 3)

# Modelagem do Problema

## Restrições de Capacidade e Produção com Setup

$$\sum_{j=1}^{J} r_j x_{tj} \leq R_t, \qquad \forall t \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } t = 1 \\ r_1 x_{1,1} + r_2 x_{1,2} + r_3 x_{1,3} \leq R_1 \\ \text{Para } t = 2 \\ r_1 x_{2,1} + r_2 x_{2,2} + r_3 x_{2,3} \leq R_2 \end{cases}$$

$$x_{tj} \leq M y_{tj}, \qquad \forall t, j$$

| Para $t = 1$ | Para $t = 2$ | | Para $t = T$ |
|---|---|---|---|
| $x_{1,1} \leq M y_{1,1}$ | $x_{2,1} \leq M y_{2,1}$ | | $x_{T,1} \leq M y_{T,1}$ |
| $x_{1,2} \leq M y_{1,2}$ | $x_{2,2} \leq M y_{2,2}$ | ... | $x_{T,2} \leq M y_{T,2}$ |
| $x_{1,3} \leq M y_{1,3}$ | $x_{2,3} \leq M y_{2,3}$ | | $x_{T,3} \leq M y_{T,3}$ |