Sistema e controle de automação
Prova 2

Aluno: Claudio de Souza Brito

Lista 1

1- Tempo de subida (Tr): Tempo que leva para atingir a resposta estacionária pela primeira vez. Às vezes pode ser de 0% a até 100% do resultado final, ou de 10% a 90% do resultado final, depende da literatura referência.

Instante de Pico (Tp): Tempo que leva para atingir o maior máximo da função, ou, tempo que leva para atingir o sobressinal máximo.

Sobressinal máximo (Mp): A diferença entre o maior pico da função e a resposta estacionária.

Tempo de acomodação (Ts): Tempo que leva para a função chegar a menos de 5%, ou 2%, da resposta estacionária.

2- a) $$\frac{Ko}{(Ts+1)s^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{Ts+1} \Longrightarrow Ko = ATs + A + Bts^2 + Bs + Cs^2$$

$$\left.\begin{array}{l} A = Ko \\ ATs + Bs = 0 \rightarrow B = -KoT \\ BTs^2 + Cs^2 = 0 \rightarrow C = KoT^2 \end{array}\right\} \frac{Ko}{s^2} - \frac{KoT}{s} + \frac{KoT^2}{Ts+1} \xRightarrow{Laplace^-1} Kot - KoT + KoTe^{\frac{-t}{T}}$$

b) $$\frac{Ko}{(Ts+1)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{Ko}{Ts+1} = A + \frac{sB}{Ts+1} \xRightarrow{s = 0} A = Ko \\ \frac{Ko}{s} = \frac{A(Ts+1)}{s} + B \xRightarrow{s = -1/T} B = -TKo \end{array}\right\} \frac{Ko}{s} + \frac{-TKo}{Ts+1} \xRightarrow{Laplace^-1} Ko - Koe^{\frac{-t}{T}}$$

c) $$\frac{Ko}{Ts+1} \xRightarrow{Laplace^-1} \frac{Koe^{\frac{-t}{T}}}{T}$$

3- A letra C é derivada da letra B, e a letra B é derivada de A

4- Resposta de degrau com máximo em 2, então Ko = 2

$$1,26 = 2(1 - e^{\frac{-0,5}{T}}) \Longrightarrow ln(0,37) = \frac{-0,5}{T} \Longrightarrow T = 0,5$$

$$G(s) = \frac{2}{0,5s+1}$$

5- a) $S+20=0 \quad \longrightarrow \quad S=-20$

b) $T=\frac{b}{c}=\frac{1}{20}$

c) $G(s)=\frac{100}{s+20} \xrightarrow{Laplace^{-}1} 100e^{\frac{-20t}{1}}$ Valor final da função, em t = infinito, é 0

6- a) Os polos de s^2+5s+6 são -2 e -3, polos reais distintos, super amortecido

$$X1,X2=\frac{-5+-\sqrt{5^2-(4).(1).(6)}}{2}$$

b) Os polos de s^2+6s+9 são -3 e -3, polos reais repetido, criticamente amortecido

$$X1,X2=\frac{-6+-\sqrt{6^2-(4).(1).(9)}}{2}$$

c) Os polos de s^2+8 são $-2\sqrt{2}j$ e $+2\sqrt{2}j$ polos imaginários puros, não amortecidos

$$X1,X2=\frac{0+-\sqrt{0^2-(4).(1).(8)}}{2}$$

d) Os polos de $s^2+5s+14$ são $-2,5-2,784j$ e $-2,5+2,784j$ polos complexos conjugados, subamortecido

$$X1,X2=\frac{-5+-\sqrt{5^2-(4).(1).(14)}}{2}$$

7- a) Apenas a letra d) é subamortecida.

$$Wn^2=14 \quad \longrightarrow \quad Wn=\sqrt{14}= \; 3,741$$

$$2\zeta 3,741=5 \quad \rightarrow \quad \zeta=0,668$$

$$Wd=3,741\sqrt{1-0,668^2}=2,784$$

$$Ko[1-e^{-\zeta Wnt}(cosWdt+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}senWdt)]$$

$$\Downarrow$$

$$1-e^{-2,499t}(cos2,784t+\frac{0,668}{\sqrt{1-0,668^2}}sen2,741t)$$

b) $Tp=\frac{\pi}{Wd}=\frac{\pi}{2,784}=1,128segundos$

c) $Mp = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0,059$ ou 5,9%

d) $Ts(5) = \dfrac{3}{\zeta Wn} = 1,2 segundos$

$Ts(2) = \dfrac{4}{\zeta Wn} = 1,6 segundos$

e) $Tr = \dfrac{\pi - arctan(\frac{Wd}{\zeta Wn})}{Wd} = 0,828 segundos$

Nota: a equação encontrada no slide da em um valor negativo. Esta eu encontrei na internet

Lista 2

1- a) Os polos de $s^2 + 12s + 400$ são $-6 + 19,079j$ e $-6 - 19,079j$

$$X1, X2 = \frac{-12 + -\sqrt{12^2 - (4).(1).(400)}}{2}$$

Polos complexos conjugados -> subamortecido

$Wn^2 = 400 \rightarrow Wn = \sqrt{400} = 20$

$2\zeta 20 = 12 \rightarrow \zeta = 0,3$

$Wd = 20\sqrt{1 - 0,3^2} = 19,08$

$Ko[1 - e^{-\zeta Wnt}(cos Wdt + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen Wdt)]$

$$\Downarrow$$

$$1 - e^{-6t}(cos 19,08t + \frac{0,3}{\sqrt{1-0,3^2}} sen 19,08t)$$

b) Os polos de $s^2 + 90s + 900$ são -12,459 e -77,541

$$X1, X2 = \frac{-90 + -\sqrt{90^2 - (4).(1).(900)}}{2}$$

Polos reais distintos -> sobreamortecido

$Wn^2 = 900 \rightarrow Wn = \sqrt{900} = 30$

$2\zeta 30 = 90 \rightarrow \zeta = 1,5$

$P1 = -30(1,5 + \sqrt{2,25 - 1}) = -78,541$

$P2 = -30(1,5 - \sqrt{2,25 - 1}) = -11,46$

$$Ko[1+\frac{Wn}{2\sqrt{\zeta^2+1}}(\frac{e^{-P1t}}{P1}-\frac{e^{-P2t}}{P2})]$$

$$\Downarrow$$

$$1+\frac{30}{2\sqrt{1,5^2+1}}(\frac{e^{-78,541t}}{-78,541}+\frac{e^{-11,46t}}{11,46})$$

c) Os polos de $s^2+30s+225$ são -15

$$X1,X2=\frac{-30+-\sqrt{30^2-(4).(1).(225)}}{2}$$

Polos reais iguais -> criticamente amortecido

$$Wn^2=225 \quad \rightarrow \quad Wn=\sqrt{2}25=15$$

$$2\zeta 15=30 \quad \rightarrow \quad \zeta=1$$

$$Ko[1-e^{-\zeta Wnt}(1+Wnt)] \Rightarrow 1-e^{-15t}(1+15t)$$

d) Os polos de s^2+625 são -25j e + 25j

$$X1,X2=\frac{0+-\sqrt{0^2-(4).(1).(625)}}{2}$$

Polos imaginários puros -> não amortecido

$$Wn^2=625 \quad \rightarrow \quad Wn=\sqrt{6}25=25$$

$$\zeta=0$$

$$Wd=25\sqrt{1-0^2}=25$$

$$Ko[1-e^{-\zeta Wnt}(cosWdt+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}senWdt)] \Rightarrow 1-cos25t$$

2- a) Os polos de $s^2+4s+100$ são -2 + j9,789 e -2 - j9,789

$$X1,X2=\frac{0+-\sqrt{0^2-(4).(1).(625)}}{2}$$

O polo de (s + 15) é -15

-15 mais de 5 vezes menor que a parte real dos outros polos (-2), portanto, é desprezível

$$G(s)=\frac{700}{s^2+4s+100}$$

b) Os polos de $s^2 + 2s + 90$ são -1 - 18,868j e -1 + 18,868j

$$X1, X2 = \frac{2 + -\sqrt{2^2 - (4).(1).(90)}}{2}$$

O polo de (s + 4) é -4

-4 não é 5 vezes menor que a parte real dos outros polos (-1), portanto, não é despresível

3- a)
$$\frac{20}{s(s+1)(s+2)(s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+10}$$

$$\frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)} = A + \frac{sB}{s+1} + \frac{sC}{s+2} + \frac{sD}{s+10} \xRightarrow{\textbf{s = 0}} A = 1$$

$$\frac{20}{s(s+2)(s+10)} = \frac{(s+1)A}{s} + B + \frac{(s+1)C}{s+2} + \frac{(s+1)D}{s+10} \xRightarrow{\textbf{s = -1}} B = -\frac{20}{9}$$

$$\frac{20}{s(s+1)(s+10)} = \frac{(s+2)A}{s} + \frac{(s+2)B}{s+1} + C + \frac{(s+2)D}{s+10} \xRightarrow{\textbf{s = -2}} C = \frac{5}{4}$$

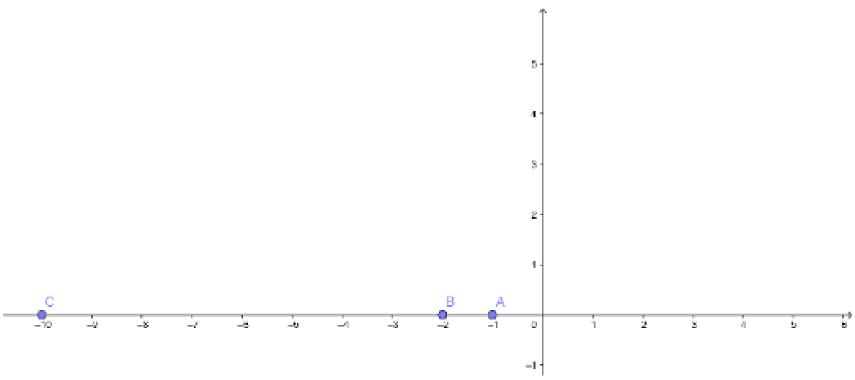
$$\frac{20}{s(s+1)(s+2)} = \frac{(s+10)A}{s} + \frac{(s+10)B}{s+1} + \frac{(s+10)C}{s+2} + D \xRightarrow{\textbf{s = -10}} D = -\frac{1}{36}$$

$$\frac{20}{s(s+1)(s+2)(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{20}{9}\frac{1}{s+1} + \frac{5}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{36}\frac{1}{s+10}$$

$$\Big\Downarrow Laplace^{-}1$$

$$1 - \frac{20}{9}e^{-t} + \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{1}{36}e^{-10t}$$

b)



Os pontos são os polos. Eu sei que era para marcar com "X", mas o programa não deixa

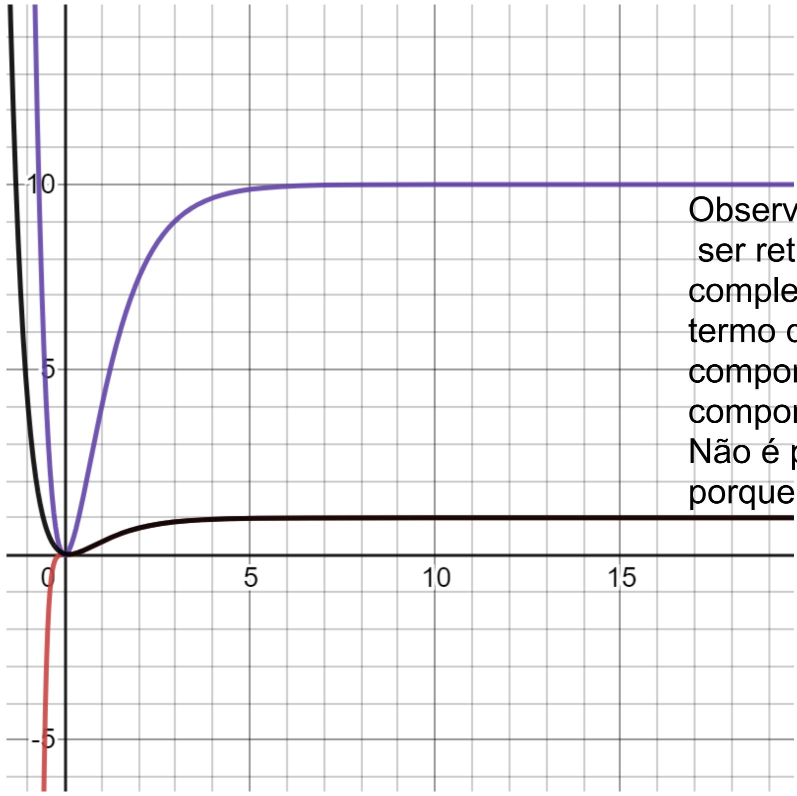
c) O polo -10 é o melhor candidato a ser descartado, mas ele é exatamente 5 vezes menos que o polo -2, portanto, não pode ser desprezado, pois teria que ser menor que isso. Na letra e) veremos graficamente porque

$$\frac{20}{(s+10)(s^2+3s+2)} \rightarrow \frac{20}{(s^2+3s+2)}$$

d)

$$\frac{20}{s(s^2+3s+2)} \xrightarrow{Laplace^{-1}} 10-20e^{-t}+10e^{-2t}$$

e) A função laranja é a original, a roxa é a nova função (terceiro polo retirado antes da transformada). E a preta é a original, mas retirando o terceiro polo após é feita a transformada



Observe o porque do terceiro polo não poder ser retirado antes da transformada, o gráfico é completamente diferente (roxo). Mas tirando o termo depois da transformada (preto) temos um comportamento esperado, o exato comportamento da função original.
Não é possível ver o laranja da função original porque o preto está por cima

4-

s^3	1	2
s^2	1	24
s^1	$2-24\frac{1}{1}=-22$	0
s^0	$24-0\frac{-1}{22}=24$	0

Instável

5-

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	$2-4\frac{1}{2}=\epsilon$	$11-10\frac{2}{4}=6$	0
s^2	$4-6\frac{2}{\epsilon}$	$10-0\frac{4}{6}=10$	0
s^1	$6-10\frac{\epsilon}{(4-6\frac{2}{\epsilon})}=6-\frac{\epsilon^2}{4\epsilon-12}$	0	
s^0	10		

Perceba que com Epsilon tendendo à 0, termo ver se apresenta como número negativo, portanto, é instável

6-

s^3	1	4
s^2	2	8
s^1	$4-8\frac{1}{2}=\epsilon$	0
s^0	$8-0\frac{2}{\epsilon}=8$	0

Com epsilon para 0, permanece estável

7- O teorema do valor final dita o valor que a função f(t) terá quando terminar de variar, isto é, no $t=\infty$ Sendo a transformada de laplace de f(t) = F(s), então: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

8-a) $$Ess = \lim_{s\to 0} s(\frac{R(s)}{1+G(s)})\ ,\ R(s) = \frac{1}{s}\ ,\ Ess = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{1}{1+Kp}$$

b) $$Ess = \lim_{s\to 0} s(\frac{R(s)}{1+G(s)})\ ,\ R(s) = \frac{1}{s^2},\ Ess = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s+sG(s)} = \frac{1}{Kv}$$

c) $$Ess = \lim_{s\to 0} s(\frac{R(s)}{1+G(s)}),\ R(s) = \frac{1}{s^3}\ ,\ Ess = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2+s^2G(s)} = \frac{1}{Ka}$$

9-a) $$Ess \leq 0,000443 \to \lim_{s\to 0} s(\frac{1}{1+G(s)})\frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s(1+\frac{4500K}{s(s+361,2)})} \leq 0,000443$$

$$\frac{361,2}{4500K} \leq 0,000443 \to K \geq 181,18$$

b) $$\frac{KoWn^2}{s^2+2\zeta Wns+Wn^2}=\frac{4500.181,18}{s^2+361,2s}$$ com Ko = 1 , $Wn=\sqrt{4500.181,18}=\ 903$

$$2.903.\zeta=361,2\rightarrow \zeta=0,2$$

$$Mp=e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=0,527\rightarrow 52,7\%$$

10-a) $$Mp=\frac{(Kp+sKd)\frac{4500K}{s(s+361,2)}}{1+(Kp+sKd)\frac{4500K}{s(s+361,2)}}$$

se K = 0,18118 em vez de 181,18

$$Mp=\frac{815,265(Kp+sKd)}{s^2+s(361,2+815,265Kd)+815,265Kp}$$

b) $$815,265(Kp+sKd)=0\rightarrow s=\frac{-Kp}{Kd}$$

Impossível o coeficiente de amortecimento ter sido 361,2, pois Wn = 903 e $2\zeta Wn=361,2$

c)

s^2	1	815,265Kp
s^1	361,2 + 815,265Kd	0
s^0	815,265Kp	

Com Kp > 0 e Kd > 0 tudo fica positivo

d) $$e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=0,05\rightarrow\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}=ln(0,05)\rightarrow\zeta^2\pi^2=8,974(1-\zeta^2)\rightarrow\zeta^2=0,49$$

$$\zeta=0,7$$

e) $$Wn^2=815,265\rightarrow Wn=28,553$$

$$2\zeta Wn=361,2+815,265Kd\rightarrow 39,9742=361,2+815,265Kd\rightarrow Kd=-0,394$$

$$Wd=Wn\sqrt{1-\zeta^2}=28,553\sqrt{1-0,49}=20,391$$

$$Tr = \frac{\pi - arctan(\frac{Wd}{\zeta Wn})}{Wd} = \frac{\pi - arctan(\frac{20,391}{19,987})}{20,391} = 0,115 segundos$$

$$Ts(5) = \frac{3}{\zeta Wn} = \frac{3}{19,987} = 0,15 segundos$$ Usando Ts para 5%

f) Usando Ts para 5% $Ts(5) = \frac{3}{\zeta Wn} = 0,005 \rightarrow \frac{3}{0,7Wn} = 0,005 \rightarrow Wn = 420$

$$Wn^2 = 815,265Kp \rightarrow 815,265Kp = 176.400 \rightarrow Kp = 216,371$$

11-a) $\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+Gp(s)Gc(s)}\frac{1}{s^3} \leq 0,2 \rightarrow \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{(Kp+\frac{Ki}{s})815.265}{s(s+361,2)}}\frac{1}{s^2} \leq 0,2$

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+\frac{(sKp+Ki)815.265}{s+361,2}} \leq 0,2 \rightarrow \frac{1}{\frac{815.265Ki}{361,2}} \leq 0,2 \rightarrow 815.265Ki \geq 1806$$

$$Ki \geq 0,002221$$

b)

$$M(s) = \frac{(Kp+\frac{Ki}{s})\frac{4500K}{s(s+361,2)}}{1+(Kp+\frac{Ki}{s})\frac{4500K}{s(s+361,2)}} \rightarrow \frac{(Kp+\frac{Ki}{s})4500K}{s(s+361,2)+(Kp+\frac{Ki}{s})4500K}$$

Com K = 0,18118
em vez de 181,18 $\longrightarrow$

$$\frac{815,265Kp(s+\frac{KI}{Kp})}{s^3+361,2s^2+815,265sKp+815,265Ki}$$

c)

s^3	1	815,265Kp
s^2	361,2	815,265Ki
s^1	815,265Kp - 2,257Ki	0
s^0	815,265Ki	0

Por verde:

$$815,265Kp - 2,257Ki > 0 \rightarrow 361,2 > \frac{Ki}{Kp}$$

Por azul:

$$815,265Ki > 0 \rightarrow Ki > 0 \rightarrow \frac{Ki}{Kp} > 0$$

Juntando os dois:

$$361,2 > \frac{Ki}{Kp} > 0$$

d)

$$\frac{Ki}{Kp} = 0 \rightarrow Ki = 0$$

$$G(s) = (Kp + \frac{Ki}{s})\frac{4500K}{s(s+361,2)} \rightarrow \frac{815,265Kp}{s(s+361,2)}$$

$$M(s) = \frac{\frac{815,265Kp}{s(s+361,2)}}{1+\frac{815,265Kp}{s(s+361,2)}} \rightarrow \frac{815,265Kp}{s^2+s361,2+815,265Kp}$$

e) $2\zeta Wn = 361,2 \rightarrow Wn = 255,4$

$Wn^2 = 815,265Kp \rightarrow Kp = 0,08$

$\frac{Ki}{Kp} = 0,5 \rightarrow Ki = 0,04$

f)

$$Tr = \frac{\pi - arctan(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})}{Wn\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \frac{\pi - arctan(\frac{\sqrt{1-0,707^2}}{0,707})}{255,4\sqrt{1-0,707^2}} \rightarrow \frac{\pi - arctan(1)}{180,568}$$

$Tr = 0,013$

12-a)

$$\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s^2} = 0,1 \rightarrow \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{(Kp+\frac{Ki}{s})100}{s^2+10s+100}}\frac{1}{s} = 0,1 \rightarrow$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{s^2+10s+100}{s^3+10s^2+100s+100(sKp+Ki)} = 0,1 \rightarrow \frac{100}{100Ki} = 0,1 \rightarrow Ki = 10$$

b)

$$M(s) = \frac{(Kp+\frac{Ki}{s})\frac{100}{s^2+10s+100}}{1+(Kp+\frac{Ki}{s})\frac{100}{s^2+10s+100}} \rightarrow \frac{100(Kp+\frac{Ki}{s})}{s^2+10s+100+100(Kp+\frac{Ki}{s})}$$

$$\frac{100(Kp+\frac{Ki}{s})}{s^2+10s+100(1+Kp)+100s^{-1}Ki}$$

s^2	1	100(1 + Kp)
s^1	10	100Ki = 1000
s^0	100(1 +Kp) - 100 = 100Kp	100(1 + Kp)

$$100Kp > 0 \rightarrow Kp > 0$$

c) Qualquer valor positivo

d) O sobressinal é obtido usando o coeficiente de amortecimento, que fica no segundo termo do denominador, porém o Kp está no terceiro, então não deveria haver relação