Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática

PESQUISA OPERACIONAL

Trabalho do Fluxo Máximo

Caio Victor do Amaral Cunha Sarmento - 20170021332
Claudio Souza Brito - 20170023696
Gabriel Teixeira Patrício - 20170170889

João Pessoa, 2020

SUMÁRIO:

INTRODUÇÃO: 3

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA: 3

MODELAGEM: 4

PASSOS PARA EXECUÇÃO DO PROGRAMA: 5

EXERCÍCIO: 5

REFERÊNCIAS: 6

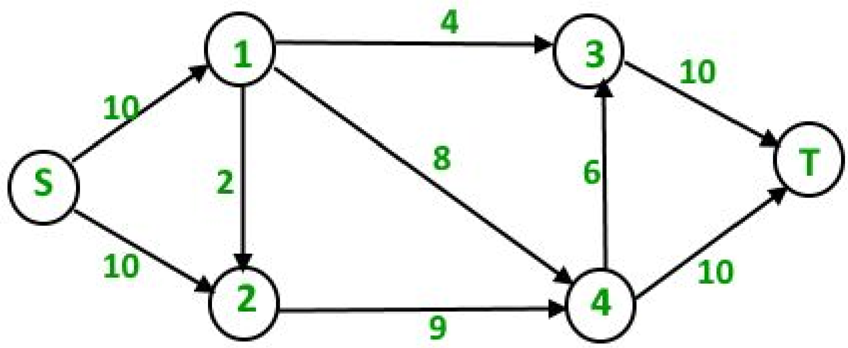
INTRODUÇÃO:

PFCM, Problema do Fluxo de Custo Mínimo, é uma rede de vértices que possuem ofertas e demandas. Um vértice que possui oferta envia mais fluxo do que recebe, o oposto para vértices com demanda. Os vértices possui arcos entre si, estes têm custos e medidas de fluxo máximo entre si. E como característica principal procura minimizar o custo da solução.

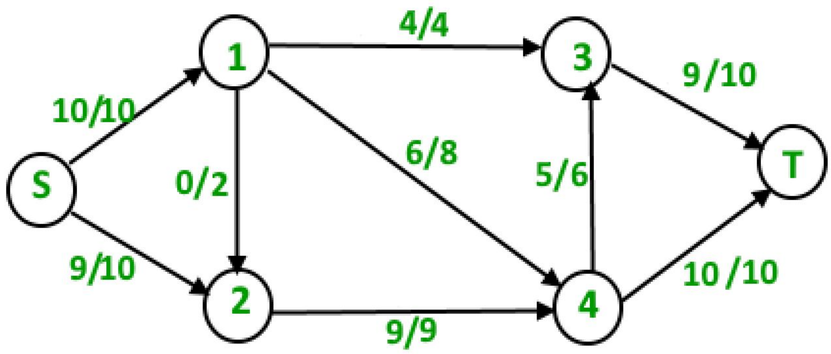
PFM, Problema do Fluxo Máximo, uma situação em que uma rede de origem e escoadouro (destino), em vez de ofertas e demandas, possui arcos ligando os vértices com um valor máximo de fluxo definido, com o objetivo de maximizar a sua função objetiva. Consiste em enviar a quantidade máxima de fluxo de uma dada origem s para um certo destino t em uma rede capacitada, ou seja, $C_i < \infty \ \forall \ i=1,..,m$. Adicionando um arco de t para s com custo igual a -1 e U= ∞, e fazendo C_i =0, para os demais arcos, o PFM é transformado em PFCM. Sendo assim, o PFM pode ser um caso específico do PFCM, no qual é o objetivo deste trabalho e será detalhado e implementado nos tópicos a seguir.

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA:

No exemplo abaixo[1] temos um exemplo de rede com 6 vértices, sendo o "S" o vértice origem, "T" o vértice final, e os vértices intermediários são enumerados. Os números nos arcos indicam o máximo que pode ser carregado por cada um deles:



Para solucionar esse problema devemos lembrar que a soma dos fluxos que saem dos vértices intermediários têm que ser igual a soma dos fluxos que saem. Abaixo temos um exemplo de fluxo viável respeitando as regras definida:



MODELAGEM:

O PFM pode ser visto como um PFCM específico[2]. Consiste em enviar a quantidade máxima de fluxo de uma dada origem s para um certo destino t em uma rede capacitada, ou seja, $C_i < \infty \ \forall \ i=1,..,m$. Para fazer a transformação, do PFM para o PFCM, precisamos criar um novo arco que começa no fim e vai até a origem (no exemplo anterior seria de "T" até "S"), esse arco tem capacidade infinita e custo -1, além disso, vamos atribuir custos 0 a todos os outros arcos da rede, e demanda/oferta 0 para todos os vértices. E a função passa a ser maximizada. Desta forma temos o problema em PFCM, onde a intenção é minimizar a perda de cada arco entre a origem que será o ponto onde queremos chegar no PFM, até a origem do PFM. O PFCM tem uma restrição que diz que para todo fluxo que entra em um vértice, tem que ser igual ao fluxo que sai do mesmo, essa restrição é nomeada como conservação de fluxo no arco.

A fórmula de um PFCM pode ser descrita da seguinte forma:

$$Min \sum_{(i,j)\ \varepsilon\ A} C_{ij}\, X_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j:(i,j)\ \varepsilon\ A} X_{ij} \ - \sum_{i:(i,j)\ \varepsilon\ A} X_{ij} = \text{bi} \qquad \forall\, i\ \varepsilon\ N$$

(fluxo que entra) - (fluxo que sai) = (fluxo disponível)

$$0 \leq Xij \leq Uij \qquad \forall (i, j) \, \varepsilon \, A$$

$$\sum_{i=1}^{n} bi = 0$$

(fluxo que entra = fluxo que sai)

Onde:
C = vetor de custos nos arcos.
x = vetor de fluxo nos arcos (incógnita).
A = matriz de incidência nó-arco.
b = vetor de demanda nos arcos.
u = vetor de capacidade nos arcos.

PASSOS PARA EXECUÇÃO DO PROGRAMA:

Instalar biblioteca do ortools no terminal, com o seguinte comando:

```
python -m pip install --upgrade --user ortools
```

ou

```
pip install ortools
```

EXERCÍCIO:

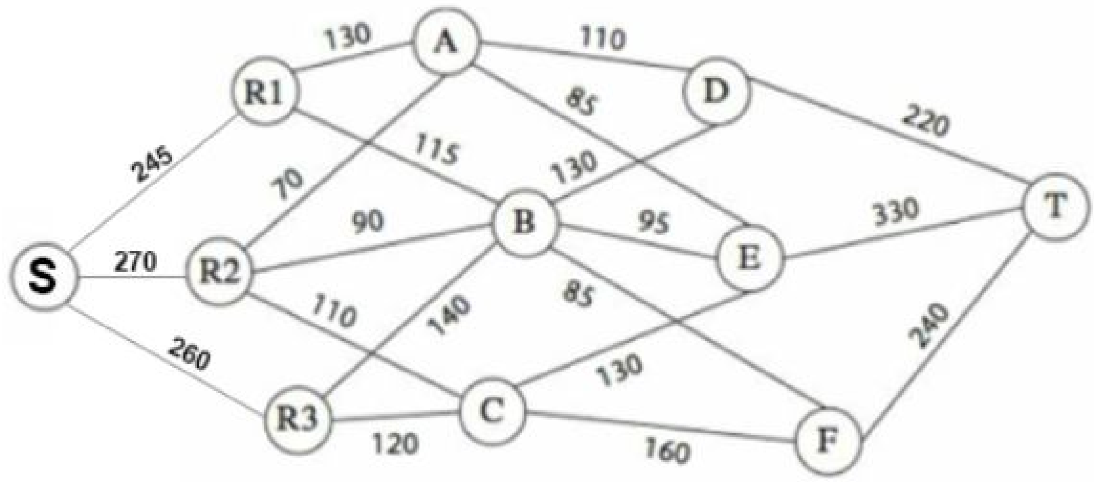
O exercício 9.4-3 letra a) nos pede para transformar a rede em um PFM, a solução é bastante simples: Primeiramente precisamos definir uma nova origem, S, visto que o problema original possui três, essa nova origem é um vértice novo que ficará atrás dos R1. R2, R3, estes passarão a ser nós intermediários, e por causa disso, as somas de seus fluxos de entrada e saída devem ser iguais. O escoadouro é o nó T e os R1, R2, R3, A, B, C, D, E e F são os nós de transbordo.

Para \ De	A	B	C
R1	130	115	–
R2	70	90	110
R3	–	140	120

Para \ De	D	E	F
A	110	85	–
B	130	95	85
C	–	130	160

Para \ De	T
D	220
E	330
F	240

Percebemos que a soma de fluxos que saem de R1 é 245, R2 é 270, e R3 é 260. Levando em consideração que esses são os valores MÁXIMOS que podem sair desses nós, esses devem ser também os valores MÁXIMOS que podem entrar nesses nós. O desenho abaixo mostra o modelo finalizado:



REFERÊNCIAS:

-[1]: https://www.geeksforgeeks.org/dinics-algorithm-maximum-flow/
-[2]: http://www.decom.ufop.br/gustavo/bcc342/Apostila_fluxo_redes.pdf