Introducere în nr. Reale

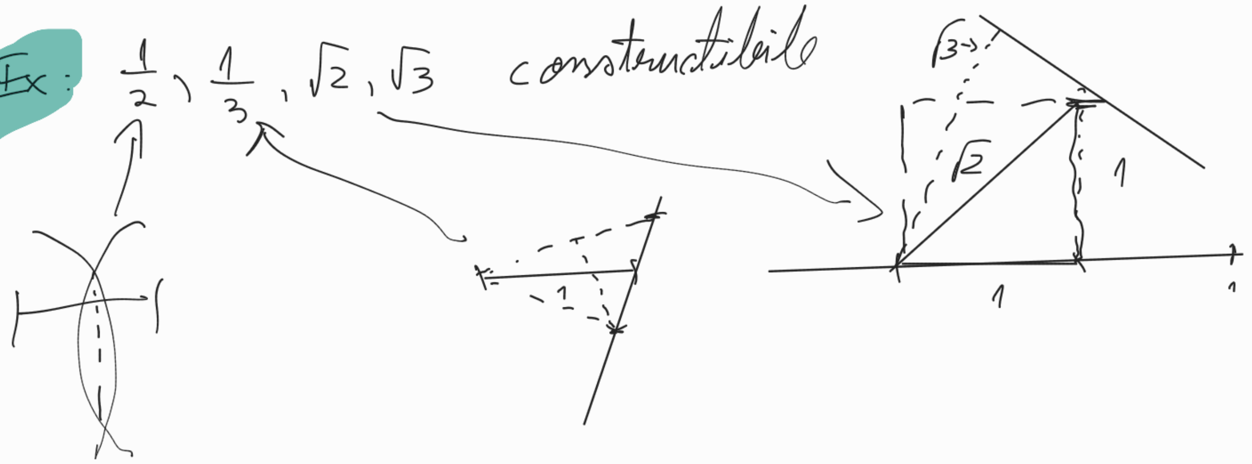
Clase de nr reale:

- raționale ($\frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$)
- iraționale
- constructibile (cu rigla și compasul)
- algebrice (exprimabile prin radicali)
- reprezentabile (în mem. calculatorului)

Def: Un nr se numește constructibil dacă reprezintă lungimea unui segment construit cu rigla și compasul plecând de la segmentul unitate

[constructibil, rigla negradată, compas, segment]

Ex: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ constructibile



Obs Un nr α este constructibil d.o.n.d. α e răd. unei ecuații polinomiale cu coeficienți întregi de grad cu puteri a lui 2.

$\alpha = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$

$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 = 0$

$\alpha = \frac{p}{q}$ constructibil

Ex Nr ce nu sunt constructibile:
$\sqrt[3]{3}$, π

Def: α algebric dacă este răd unei ec polinomiale cu coef întregi
$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0, \quad a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\text{raționale} \subseteq \text{construct{ibile}} \subseteq \text{algebrice}}$$

Def: α transcendent dacă nu este algebric

transcendente $\subseteq$ iraționale

"Majoritatea nr reale sunt transcendente"

Ex π este transcendent (Lindeman, 1882)

Problemă:
Depozit: 1 leu
Dobândă: 100%/an
la termen $\frac{1}{n}$ dintr-un an ($n \in \mathbb{N}^*$)
Ce sumă acumulăm după un an?

$n=1$: $1 + 1 = 2$
$n=2$: $1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$
$n=3$: $1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,37$

În general $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e = 2,71\dots$ (nr Euler)

e este transcendent (Hermite, 1873)

Reprezentări ale nr reale

a) ca fracție zecimală
$a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, \forall k \in \mathbb{N}^*, a_0 \in \mathbb{Z}$ (infinită)

$x = a_0, a_1 \dots a_n \dots$

- $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a_k = 0, \forall\ k > n$ (finită)

$x = a_0, a_1 a_2, \dots a_n$

- $\exists\ n, p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a_k = a_{k+p}, \forall\ k > n$ (periodică)

$x = a_0, a_1, a_2, \dots a_n (a_{n+1} \dots a_{n+p})$

Ex: $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{3} = 0,(3)$; $\sqrt{2} = 1,41\dots$

Fracțiile zecimale finite + periodice reprez nr raționale

$2 = 1,(9)$

$x_n = 1,\underbrace{99\dots9}_{n \text{ ori}}$

$l = \lim_{n\to\infty} x_n = 1,(9)$

$10 x_{n+1} - x_n = 19,\underbrace{9\dots9}_{n \text{ ori}} - 1,\underbrace{9\dots9}_{n \text{ ori}} = 18, n \to \infty$

$\Rightarrow 10 l - l = 18$

$9 l = 18$

$l = 2$

Def Un nr este reprezentabil dacă poate fi stocat în memoria calculatorului (dacă se poate scrie ca o fracție cu zecimală finită cu nr finit predet. de zecimale)

$\boxed{\text{reprezentabile} \subseteq \text{fracții finite} \subseteq \text{raționale}}$

Ex: $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \sqrt{2}, \pi, e$ nu sunt reprezentabile

b) ca fracție continuă (recurentă)

$x \in \mathbb{R}$ algoritm

$x_1 = \frac{1}{x - [x]}$, $x_2 = \frac{1}{x_1 - \{x_1\}}$, ... $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \{x_n\}}$, dacă $\exists\ n \in \mathbb{N}$

a. î. $x_n \in \mathbb{Z}$ atunci STOP

$$x = [x] + \frac{1}{x_1} = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{x_2}} = \ldots = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2]} + \ldots +}$$

$$\overset{not}{=} [x] + \frac{1}{[x_1]+} \frac{1}{[x_2]+} \ldots \quad \text{(fracție continuă)}$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \ldots \quad | \; a_0 \in \mathbb{Z}, \; a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}^*$$

Ex: $0 + \frac{1}{8+} \frac{1}{7+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{8+} \frac{1}{7} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \cdots = \frac{123}{1000} = 0,123$

$$x = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \ldots \overset{not}{=} 1 + \overline{\frac{1}{2+}} \quad \text{(periodică)}$$

$$\left\{ x = 1 + \frac{1}{1+1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \ldots} = 1 + \frac{1}{1+x} \right\}$$

$$x - 1 = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$C_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$C_2 = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$C_3 = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12} = 1,41(6)$$

$$C_n = 1 + \underbrace{\frac{1}{2+} \ldots \frac{1}{2}}_{n \text{ ori}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2} = 1,414\ldots$$

$$F_K = \underbrace{\frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \ldots \frac{1}{2}}_{K \text{ ori}}$$

$$\boxed{F_K = \frac{1}{2 + \underbrace{\frac{1}{2+} \ldots \frac{1}{2}}_{K-1 \text{ ori}}} = \frac{1}{2 + F_{K-1}}, \quad K \geq 1}$$

$F_0 = 0$

$C_K = 1 + F_K$

Obs: 1) Orice nr real admite o reprezentare sub forma unei fracții continue

2) Orice fracție continuă, finită sau nu reprez. un nr real.

c) Fracție continuă generalizată

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \quad , a_0, a_1, a_2, \dots b_1, b_2 \dots \in \mathbb{Z}$$

Ex: $\pi = 3 + \frac{1^2}{6+} \frac{3^2}{6+} \frac{5^2}{6+} \dots$

$$e = 2 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{2}{3+} \frac{3}{4+} \frac{4}{5+} \dots$$

$$\ln 2 = \frac{2}{3+} \frac{(-1)}{9+} \frac{(-4)}{15+} \frac{(-9)}{21+} \dots$$

Temă: Calculați constanta π folosind dezvoltarea în fracție continuă generalizată

Recursiv:

```python
def pi_continu_gen(n, depth=1):
    if n == 0:
        return 6
    else:
        impar_patrat = (2 * depth + 1) ** 2
        return 6 + impar_patrat / pi_continu_gen(n - 1, depth + 1)


1 usage
def main(n_terms):
    print(3 + 1 / pi_continu_gen(n_terms))


if __name__ == '__main__':
    main(50)
```

Iterativ:

```python
def pi_continu_gen_iter(n):
    rezultat = 6
    for depth in range(n, 1, -1):
        impar_patrat = (2 * depth - 1) ** 2
        rezultat = 6 + impar_patrat / rezultat
    return rezultat


1 usage
def pi_aproximat(n_terms):
    print(3 + 1 / pi_continu_gen_iter(n_terms))

pi_aproximat(20)
```