Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2019-2020

Introduction aux probabilités

TD5 - Variables continues

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} cx \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ c(1-x) \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Que vaut c ? Représenter sur un graphique la fonction f_X.

2. Calculer $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4})$ et $P(\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{5}{4})$.

3. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.

Exercice 2. Soit c un réel. Soit X une variable de densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{c}{x^2}\mathbf{1}_{x\in[5;+\infty[}.$$

1. Calculer c.

2. Calculer la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = 1/X$. Quelle est la loi de Y ? On donnera la fonction de répartition de Y et sa densité.

4. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[\sqrt{X}]$.

Exercice 3. Soit X une densité de probabilités définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\, e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité, dont on précisera la loi.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire à densité $f(t) = \lambda e^{-2|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, où λ est un réel.

1. Quelle est la valeur de λ ?

2. Déterminer la loi de X^2 (on en donnera une densité).

Exercice 5. Calcul de lois.

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a; b]$ avec $0 < a < b$. Calculer la loi de la variable $Y = X^2$, et son espérance.

2. Soit X une variable de loi uniforme sur $[0; 1]$ et λ un réel strictement positif. Quelle est la loi de la variable $Y = (-1/\lambda)\ln(1 - X)$? Calculer l'espérance $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 6.

1. Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{P}(T > t + s | T > s)$ pour tout $s, t > 0$. Interpréter.

2. On pose $X = [T]$ (partie entière de T). Quelle est la loi de X ?

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$, où σ désigne un réel strictement positif.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. Calculer la loi des variables $U = X^2$ et $V = X^2 - 2$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ et soit :

$$Y = \frac{e^X + 1}{e^X - 1}\,.$$

Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

Exercice 9. Un matériel comprend n composants dont les durées de vie (temps écoulé avant une panne) X_i sont supposées indépendantes et de lois $(\mathcal{E}_{\lambda_i})$, $1 \leq i \leq n$. Le matériel tombe en panne dès que l'un de ses composants est en panne. On note Y la durée de vie de ce matériel.

1. Calculer la fonction de répartition de Y.

2. Quelle est la loi de Y, son espérance et sa variance ?