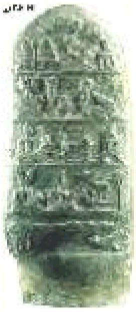
ACTIVITE SUR LA NUMERATION

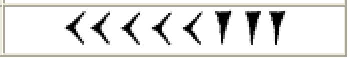
Activité 1 : **La numération dans l'antiquité :**

Les babyloniens

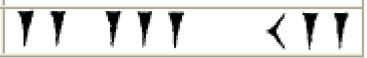


Chez les Babyloniens (environ 2000 ans av.J.C.), les symboles utilisés sont le clou pour l'unité  et le chevron  pour les dizaines. Le système est additif jusqu'à 60.

Cette numération est dite de position, car le nombre dépend de la position des symboles utilisés

2	9	12	53
			

A partir de 60, la position des symboles entre en jeu de la façon suivante :

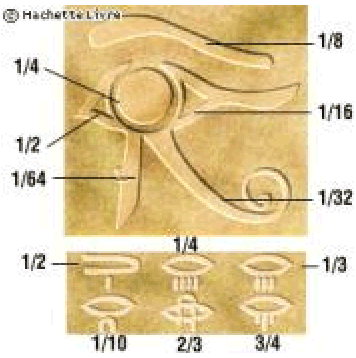
204	7392
3 x 60 + 24	2 x 60² + 3 x 60 + 12
	

Comment comptaient-ils sur leurs doigts ?

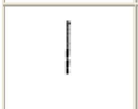
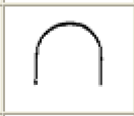
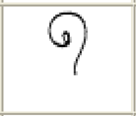
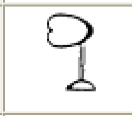
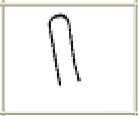
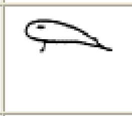
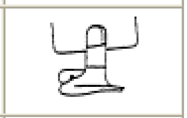
- Le pouce d'une main comptait les phalanges des quatre autres doigts (soit un maximum de 12).
- Une fois le maximum atteint, un doigt de l'autre main « retenait » ce 12, si bien qu'au total avec les deux mains, cela fait $5 \times 12 = 60$

☞***Exercices :*** ***Écrire 182, 342 et 2001 en numération babylonienne : rédiger les solutions sur le compte-rendu.***

Les égyptiens



Les scribes égyptiens (environ 1800 av. J.C.) représentaient 1 et les multiples de 10 par un croquis : ci-contre les représentations des nombres fractionnaires.

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
						
		Corde enroulée	Fleur de lotus	Doigt coupé	têtard	Dieu assis

Pour lire un nombre, on additionne la valeur de l'ensemble des symboles utilisés dans son écriture :

 **signifie 5 + 40 + 300 = 345**

☞***Exercices :***

- ***Cette numération est-elle une numération de position ?***
- ***Écrire 210, puis 3,5, puis 7,125 et enfin 2001 en numération égyptienne : rédiger sur le compte-rendu***

Les Mayas

La civilisation maya s'étend vraisemblablement de 1500 AJC à nos jours avec une apogée vers l'an 800 de notre ère. Les signes de l'arithmétique et du calendrier (aussi précis que notre calendrier actuel) ont été assez vite connus. Mais le sens de la plupart des textes nous échappe encore, et on ne parvient pas à trouver la clé qui permettrait de les traduire.

Les chiffres (glyphes) représentent des têtes de divinités vues de profil. Il y en a vingt : de zéro à dix-neuf. Les Maya avaient en effet adopté une numération vigésimale, dans laquelle les unités vont en croissant ou en décroissant de vingt en vingt : ils s'étaient rendus compte qu'en se penchant un petit peu, ils pouvaient compter aussi sur leurs orteils, d'où l'adoption de la base vingt.
Pour les calculs, ils n'utilisent pas les glyphes, mais des signes très simples :

- le point qui vaut un,
- le tiret qui vaut cinq
- une sorte d'ovale figurant la coupe d'un coquillage qui vaut zéro.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
●	●●	●●●	●●●●	—	● —	●● —	●●● —	●●●● —	— —
11	12	13	14	15	16	17	18	19	
● — —	●● — —	●●● — —	●●●● — —	— — —	● — — —	●● — — —	●●● — — —	●●●● — — —	

Les chiffres de un à quatre s'écrivent avec un à quatre points, de six à neuf avec un tiret surmonté de un à quatre points, dix avec deux tirets l'un au-dessus de l'autre, et ainsi de suite jusqu'à dix-neuf avec trois tirets surmontés de quatre points.

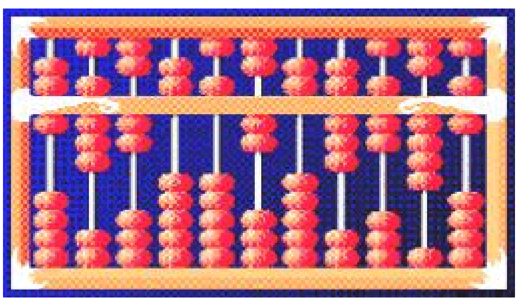
Vingt est une unité du deuxième ordre, soit un point placé en deuxième position. Car le système vigésimal maya est une numération de position, comme notre système décimal, mais au lieu de placer les unités à droite, les dizaines à gauche des unités, etc., les Maya plaçaient les vingtaines au-dessus des unités, les vingtaines de vingtaines au-dessus des vingtaines, etc.

Prenons par exemple, le nombre 643 :

Vingtaine de vingtaines : $20 \times 20 = 20^2$	●	1×20^2	400
Vingtaines : $20 = 20^1$	●● — —	12×20^1	240
Unités : $1 = 20^0$	●●●	3×20^0	3
		Total	643

☞***Exercices* : Écrire les nombres 264 et 2001 en « maya »**

Les chinois



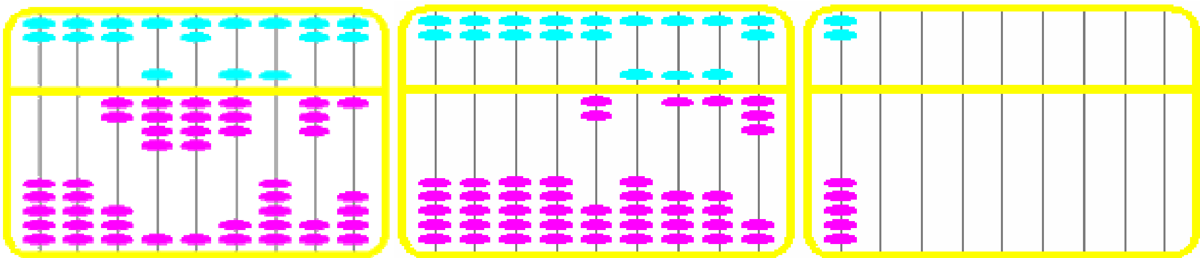
Depuis 500 ans av. J.C., les Chinois ont inventé la première calculatrice dont ils se servent encore de nos jours (les jeunes élèves apprennent toujours à l'école à compter avec le boulier) avec une efficacité remarquable. Il repose sur les dix doigts de la main et sur les positions des chiffres dans le nombre.

Le boulier de 11 tiges ci-contre permet une capacité de calcul de 10^{11} –1 unités. Attention, il est représenté ci-contre en cours de calcul (une multiplication) et le nombre final n'a pas encore un affichage optimisé.

Exprimer le plus petit et le plus grand nombre accessible.

Un boulier « se lit » de droite à gauche, la première colonne représentant les unités, la seconde les dizaines, la troisième des centaines, etc… (Certains attribuent aux deux premières : 1/100 et 1/10)
La ligne du haut comporte deux boules qui valent chacune 5 unités,
La ligne du bas comprend 5 boules valant chacune une unité.
Les boules sont « actives » si elles sont <u>en bas</u> sur la ligne du haut et <u>en haut</u> sur la ligne du bas,
donc la lecture est faite le long de la barre de séparation.

Le boulier ① indique le nombre 2 948 531 soit (0+0) ;(0+0) ;(0+2) ;(5+4) ;(0+4) ;(5+3) ;(5+0) ;(0+3) ;(0+1)



① ② ③

Pour faire une addition, on effectue l'addition colonne par colonne en tenant compte des retenues dans les colonnes suivantes .

☞<u>Exercices</u> :

- **Quel nombre indique le boulier② ?**
- **trouvez la somme des deux nombres précédents ① + ② et l'inscrire dans la case③.**

Activité 2 : <u>Une autre base de numération : la base 16 (numération hexadécimale) :</u>

Dans la vie courante, nous pratiquons la numération décimale …reposant à l'origine sur nos dix doigts : les dix symbole – chiffres – permettent de représenter tous les nombres.
La position des chiffres est primordiale dans cette représentation (numération de position) : il y a quelques années déjà, vous avez appris ce qu'étaient les unités (colonne de droite), les dizaines, les centaines, etc
Ainsi on peut écrire 4138 comme 4 x 1000 + 1 x 100 + 3 x 10 + 8 x 1
On remarque les égalités suivantes : 1000 = 10^3 ; 100 = 10^2 ; 10 = 10^1 ; 1 = 10^0
Donc 4138 peut s'écrire : 4 x 10^3 + 1 x 10^2 + 3 x 10^1 + 8 x 10^0
Où 10 est appelé BASE de cette numération (ici décimale),
Où chaque chiffre (compris entre 0 et 9) est soit celui des unités, dizaines, etc.
On peut généraliser cette définition à une numération à base n
Si n = 2 alors on a le binaire : tout nombre est écrit avec 0 et 1
Si n = 16 alors on a l'hexadécimal : tout nombre s'écrit grâce à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, et F.

En informatique, les données sont également codées en hexadécimal
Exemple : FAC = F$\times16^2$ + A$\times16^1$ + C$\times16^0$ = $15\times16^2 + 10\times16^1 + 12\times16^0$ = 4012

☞***<u>Exercices</u> : Reprendre la grille Excel permettant de convertir un décimal en binaire, et l'adapter pour convertir en hexadécimal.***

Activité 3 : Un exemple plus récent : le bibinaire

Boby LAPOINTE, chanteur, acteur et humoriste replonge, en 1968, (quelques temps plus tôt il avait eu un bac Math Elem , terminale S maintenant !) dans les mathématiques et met au point le système bi-binaire, qui lui vaudra un succès d'estime auprès de la communauté scientifique en 1971.

A cette époque, le binaire était utilisé (deux « chiffres » 0 et 1), ainsi que l'hexadécimal (16 « chiffres » de 0 à 9 puis A, B, C, D, E, F).

Rappelons que B. Lapointe était originaire du sud de la France … pays de la bibine ou vin de mauvaise qualité, encore un trait d'humour de sa part !

Considérons les quinze premiers nombres naturels (de 0 à 15) écrits en base deux et complétés par des zéros à gauche. Cela donne le tableau suivant pour ces nombres :

Décimal		Décimal		Décimal		Décimal	
0	00 00	4	01 00	8	10 00	12	11 00
1	00 01	5	01 01	9	10 01	13	11 01
2	00 10	6	01 10	10	10 10	14	11 10
3	00 11	7	01 11	11	10 11	15	11 11

Boby LAPOINTE remarqua que tous les nombres pouvaient être découpés en tranches, chacune des tranches pouvant être 00, 01, 10 ou 11.
Pour les groupes de droite, il choisit des voyelles : 00 = o ; 01 = a ; 10 = e ; 11 = i
Pour les groupes de gauche, il fit le choix de consonnes : 00 = H ; 01 = B ; 10 = K ; 11 = D
Donc compter de 0 à 15 donne cette comptine : Ho, Ha, He, Hi, Bo, Ba, Be, Bi, Ko, Ka, Ke, Ki, Do, Da, De, Di
Pour écrire un nombre, il suffit de combiner ces phonèmes :

$17 = 1 \times 16 + 1$: HaHa $\quad$ $1997 = 7 \times 16^2 + 12 \times 16 + 13$: BiDoDa

☞***Exercices :***

- ***Que vaut le nombre bibinaire KeKiDiBiBi en décimal ?***
- ***Créer des " mots" en bibinaire et les écrire codés en nombres.***

Activité 4 : Quelques conversions.

Un processeur n'utilise seulement que des 0 et des 1, voici pourquoi en informatique, les données sont également codées en hexadécimal utilisant les 10 chiffres habituels auxquels on ajoute les 6 premières lettres de l'alphabet en majuscules : ce système de numération permet une écriture plus condensée.
Il s'agit de grouper les quartets (donc des blocs de 4 symboles consécutifs) du code binaire 4 par 4.

Exemples :

Le décimal 125 est en fait codé en mémoire par l'octet 01111101
Séparons-le en 2 quartets : 0111 – 1101
chaque quartet binaire représente un nombre décimal : 7 – 13 (voir tableau Bibinaire) ce qui donne 7D en hexadécimal.

La couleur « vert d'eau » sur un moniteur est codée en hexadécimal 82DAB7
soit 8-2-13-10-11-7 (tableau Bibinaire) c'est à dire 1000-0010-1101-1010-1011-0111
donc en binaire 100000101101101010110111 en mémoire,
ce qui correspond au décimal 8 575 671

☞***Exercices : Application pratique : le noir est codé FFFFFF, ce qui correspond à quel binaire ? à quel décimal ?***