ВикипедиЯ

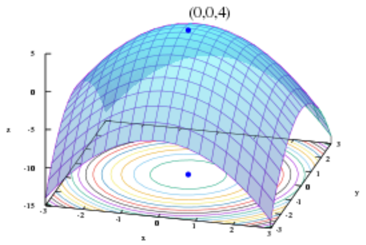
Оптимизация (математика)

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Оптимизация — в математике, информатике и исследовании операций задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных и/или нелинейных равенств и/или неравенств.

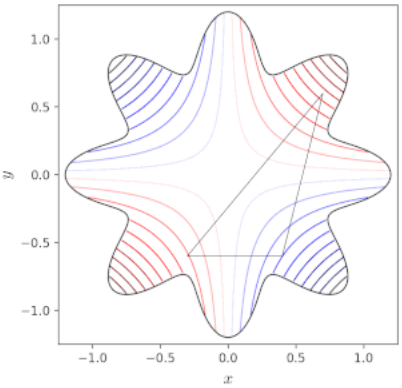
Теорию и методы решения задачи оптимизации изучает ***математическое программирование***.

Математическое программирование — это область математики, разрабатывающая теорию, численные методы решения многомерных задач с ограничениями. В отличие от классической математики, математическое программирование занимается математическими методами решения задач нахождения наилучших вариантов из всех возможных.[1]



Граф параболоида описанного функцией $z = f(x, y) = -(x^2 + y^2) + 4$. Глобальный максимум от $(x, y, z) = (0, 0, 4)$ обозначен синей точкой

Содержание



Поиск минимума Нелдера-Мида Функции оптимизации. Симплексные вершины упорядочиваются по их значению, при этом 1 имеет наименьшее (лучшее) значение.

Постановка задачи оптимизации

В процессе проектирования ставится обычно задача определения наилучших, в некотором смысле, структуры или значений параметров объектов. Такая задача называется оптимизационной. Если оптимизация связана с расчётом оптимальных значений параметров при заданной структуре объекта, то она называется *параметрической оптимизацией*. Задача выбора оптимальной структуры является *структурной оптимизацией*.

Стандартная математическая задача оптимизации формулируется таким образом. Среди элементов χ, образующих множества Χ, найти такой элемент χ^*, который доставляет минимальное значение $f(\chi^*)$ заданной функции $f(\chi)$. Для того, чтобы корректно поставить задачу оптимизации, необходимо задать:

1. *Допустимое множество* — множество $\mathbb{X} = \{\vec{x}|\ g_i(\vec{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$;
2. *Целевую функцию* — отображение $f:\ \mathbb{X} \to \mathbb{R}$;

3. *Критерий поиска* (max или min).

Тогда решить задачу $f(x) \to \min\limits_{\vec{x} \in \mathrm{X}}$ означает одно из:

1. Показать, что $\mathbb{X} = \varnothing$.
2. Показать, что целевая функция $f(\vec{x})$ не ограничена снизу.
3. Найти $\vec{x}^* \in \mathbb{X} : \ f(\vec{x}^*) = \min\limits_{\vec{x} \in \mathbb{X}} f(\vec{x})$.
4. Если $\nexists \vec{x}^*$, то найти $\inf\limits_{\vec{x} \in \mathbb{X}} f(\vec{x})$.

Если минимизируемая функция не является выпуклой, то часто ограничиваются поиском локальных минимумов и максимумов: точек x_0 таких, что всюду в некоторой их окрестности $f(x) \geq f(x_0)$ для минимума и $f(x) \leq f(x_0)$ для максимума.

Если допустимое множество $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, то такая задача называется *задачей безусловной оптимизации*, в противном случае — *задачей условной оптимизации*.

Классификация методов оптимизации

Общая запись задач оптимизации задаёт большое разнообразие их классов. От класса задачи зависит подбор метода (эффективность её решения). Классификацию задач определяют: целевая функция и допустимая область (задаётся системой неравенств и равенств или более сложным алгоритмом).[2]

Методы оптимизации классифицируют в соответствии с задачами оптимизации:

- Локальные методы: сходятся к какому-нибудь локальному экстремуму целевой функции. В случае унимодальной целевой функции, этот экстремум единственен, и будет глобальным максимумом/минимумом.
- Глобальные методы: имеют дело с многоэкстремальными целевыми функциями. При глобальном поиске основной задачей является выявление тенденций глобального поведения целевой функции.

Существующие в настоящее время методы поиска можно разбить на три большие группы:

1. детерминированные;
2. случайные (стохастические);
3. комбинированные.

По критерию размерности допустимого множества, методы оптимизации делят на методы *одномерной оптимизации* и методы *многомерной оптимизации*.

По виду целевой функции и допустимого множества, задачи оптимизации и методы их решения можно разделить на следующие классы:

- Задачи оптимизации, в которых целевая функция $f(\vec{x})$ и ограничения $g_i(\vec{x}), \ i = 1, \ldots, m$ являются линейными функциями, разрешаются так называемыми методами *линейного программирования*.
- В противном случае имеют дело с задачей *нелинейного программирования* и применяют соответствующие методы. В свою очередь из них выделяют две частные задачи:
  - если $f(\vec{x})$ и $g_i(\vec{x}), \ i = 1, \ldots, m$ — выпуклые функции, то такую задачу называют задачей *выпуклого программирования*;
  - если $\mathbb{X} \subset \mathbb{Z}$, то имеют дело с задачей *целочисленного (дискретного) программирования*.

По требованиям к гладкости и наличию у целевой функции частных производных, их также можно разделить на:

- прямые методы, требующие только вычислений целевой функции в точках приближений;
- методы первого порядка: требуют вычисления первых частных производных функции;
- методы второго порядка: требуют вычисления вторых частных производных, то есть гессиана целевой функции.

Помимо того, оптимизационные методы делятся на следующие группы:

- аналитические методы (например, метод множителей Лагранжа и условия Каруша — Куна — Таккера);
- численные методы;
- графические методы.

В зависимости от природы множества **X** задачи математического программирования классифицируются как:

- задачи дискретного программирования (или комбинаторной оптимизации) — если **X** конечно или счётно;
- задачи целочисленного программирования — если **X** является подмножеством множества целых чисел;
- задачи нелинейного программирования, если ограничения или целевая функция содержат нелинейные функции и **X** является подмножеством конечномерного векторного пространства.
- Если же все ограничения и целевая функция содержат лишь линейные функции, то это — задача линейного программирования.

Кроме того, разделами математического программирования являются параметрическое программирование, динамическое программирование и стохастическое программирование.

Математическое программирование используется при решении оптимизационных задач исследования операций.

Способ нахождения экстремума полностью определяется классом задачи. Но перед тем, как получить математическую модель, нужно выполнить 4 этапа моделирования:

- Определение границ системы оптимизации
  - Отбрасываем те связи объекта оптимизации с внешним миром, которые не могут сильно повлиять на результат оптимизации, а, точнее, те, без которых решение упрощается
- Выбор управляемых переменных
  - «Замораживаем» значения некоторых переменных (неуправляемые переменные). Другие оставляем принимать любые значения из области допустимых решений (управляемые переменные)
- Определение ограничений на управляемые переменные
  - … (равенства и/или неравенства)
- Выбор числового критерия оптимизации (например, показателя эффективности)
  - Создаём целевую функцию

История

Задачи линейного программирования были первыми подробно изученными задачами поиска экстремума функций при наличии ограничений типа неравенств. В 1820 году Фурье и затем в 1947 году Джордж Данциг предложил метод направленного перебора смежных вершин в направлении возрастания целевой функции — симплекс-метод, ставший основным при решении задач линейного программирования.

Присутствие в названии дисциплины термина «программирование» объясняется тем, что первые исследования и первые приложения линейных оптимизационных задач были в сфере экономики, так как в английском языке слово «programming» означает планирование, составление планов или программ. Вполне естественно, что терминология отражает тесную связь, существующую между математической постановкой задачи и её экономической интерпретацией (изучение оптимальной экономической программы). Термин «линейное программирование» был предложен Дж. Данцигом в 1949 году для изучения теоретических и алгоритмических задач, связанных с оптимизацией линейных функций при линейных ограничениях.

Поэтому наименование «математическое программирование» связано с тем, что целью решения задач является выбор оптимальной программы действий.

Выделение класса экстремальных задач, определяемых линейным функционалом на множестве, задаваемом линейными ограничениями, следует отнести к 1930-м годам. Одними из первых, исследовавшими в общей форме задачи линейного программирования, были: Джон фон Нейман — математик и физик, доказавший основную теорему о матричных играх и изучивший экономическую модель, носящую его имя, и Л. В. Канторович — советский академик, лауреат Нобелевской премии (1975), сформулировавший ряд задач линейного программирования и предложивший в 1939 году метод их решения (метод разрешающих множителей), незначительно отличающийся от симплекс-метода.

В 1931 году венгерский математик Б. Эгервари рассмотрел математическую постановку и решил задачу линейного программирования, имеющую название «проблема выбора», метод решения получил название «венгерского метода».

Л. В. Канторовичем совместно с М. К. Гавуриным в 1949 году разработан метод потенциалов, который применяется при решении транспортных задач. В последующих работах Л. В. Канторовича, В. С. Немчинова, В. В. Новожилова, А. Л. Лурье, А. Брудно, А. Г. Аганбегяна, Д. Б. Юдина, Е. Г. Гольштейна и других математиков и экономистов получили дальнейшее развитие как математическая теория линейного и нелинейного программирования, так и приложение её методов к исследованию различных экономических проблем.

Методам линейного программирования посвящено много работ зарубежных учёных. В 1941 году Ф. Л. Хитчкок поставил транспортную задачу. Основной метод решения задач линейного программирования — симплекс-метод — был опубликован в 1949 году Дж. Данцигом. Дальнейшее развитие методы линейного и нелинейного программирования получили в работах Г. Куна, А. Таккера, Гасса (Saul. I. Gass), Чарнеса (A. Charnes), Била (E.M. Beale) и др.

Одновременно с развитием линейного программирования большое внимание уделялось задачам нелинейного программирования, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейны. В 1951 году была опубликована работа Г. Куна и А. Таккера, в которой приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для решения задач нелинейного программирования. Эта работа послужила основой для последующих исследований в этой области.

Начиная с 1955 году опубликовано много работ, посвященных квадратическому программированию (работы Била, Баранкина и Р. Дорфмана, Франка (M. Frank) и Ф. Вулфа, Г. Марковица и др.). В работах Денниса (J. B. Dennis), Розена (J. B. Rosen) и Зонтендейка (G. Zontendijk) разработаны градиентные методы решения задач нелинейного программирования.

В настоящее время для эффективного применения методов математического программирования и решения задач на компьютерах разработаны алгебраические языки моделирования, представителями которыми являются AMPL и LINGO.

См. также

- Многокритериальная оптимизация
- Математический анализ
- Скалярное ранжирование

Примечания

1. Источник: Алтайская краевая универсальная научная библиотека им. В.Я.Шишкова (АКУНБ) (http://elib.altstu.ru). Методы оптимизации: Учеб. пособие. Бразовская Н. В.; Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, [Центр дистанц. обучения].-Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2000, 120 с. - УДК/ББК 22.183.4 Б871
2. Поиск оптимума: компьютер расширяет возможности. — М.: Наука, 1989. — С. 14. — ISBN 5-02-006737-7.

Литература

- *Абакаров А. Ш., Сушков Ю. А.* Статистическое исследование одного алгоритма глобальной оптимизации (http://tomakechoice.com/paper/rand_s.pdf). — Труды ФОРА, 2004.
- *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов. — М.: Высшая школа, 1986.
- *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. Пер. с англ. — М.: Мир, 1985.
- *Гирсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — 118 с. — ISBN 5-93972-272-5.
- *Жиглявский А. А., Жилинкас А. Г.* Методы поиска глобального экстремума. — М.: Наука, Физматлит, 1991.
- *Карманов В. Г.* Математическое программирование. — Изд-во физ.-мат. литературы, 2004.
- *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970. — С. 575—576.
- *Коршунов Ю. М., Коршунов Ю. М.* Математические основы кибернетики. — М.: Энергоатомиздат, 1972.
- *Максимов Ю. А., Филлиповская Е. А.* Алгоритмы решения задач нелинейного программирования. — М.: МИФИ, 1982.
- *Максимов Ю. А.* Алгоритмы линейного и дискретного программирования. — М.: МИФИ, 1980.
- *Плотников А. Д.* Математическое программирование = экспресс-курс. — 2006. — С. 171. — ISBN 985-475-186-4.
- *Растригин Л. А.* Статистические методы поиска. — М., 1968.
- Диагональные методы глобальной оптимизации (Электронный ресурс) / Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. 341с. (http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110327.html)
- *Хемди А. Таха.* Введение в исследование операций = Operations Research: An Introduction. — 8 изд. — М.: Вильямс, 2007. — С. 912. — ISBN 0-13-032374-8.
- *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981. — 560 с.
- *С.И.Зуховицкий, Л.И.Авдеева.* Линейное и выпуклое программирование. — 2-е изд., перераб. и доп.. — М.: Издательство «Наука», 1967.
- *Минаев Ю. Н.* Стабильность экономико-математических моделей оптимизации. — М.: Статистика, 1980.
- *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. — М: Наука, 1971. — 424 с.
- *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. — М: Наука, 1975. — 528 с.
- *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. — М: Наука, 1978. — 352 с.
- *Дегтярев Ю. И.* Методы оптимизации. — М: Советское радио, 1980. — 272 с.
- *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. — М.: Мир, 1986. — 400 с.

Ссылки

- *Б.П. Поляк.* История математического программирования в СССР: анализ феномена (http://lab7.ipu.ru:8081/files/polyak/Pol-rus-Baikal'08.pdf) // Труды 14-й Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — 2008. — Т. 1. — С. 2-20.

Источник — https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Оптимизация_(математика)&oldid=93835693