ВикипедиЯ

Метод золотого сечения

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Метод золотого сечения — метод поиска экстремума действительной функции одной переменной на заданном отрезке. В основе метода лежит принцип деления отрезка в пропорциях золотого сечения. Является одним из простейших вычислительных методов решения задач оптимизации. Впервые представлен Джеком Кифером в 1953 году.

Содержание

Описание метода

Пусть задана функция $f(x):\ [a,\ b] \to \mathbb{R},\ f(x) \in \mathrm{C}([a,\ b])$. Тогда для того, чтобы найти неопределённое значение этой функции на заданном отрезке, отвечающее критерию поиска (пусть это будет минимум), рассматриваемый отрезок делится в пропорции золотого сечения в обоих направлениях, то есть выбираются две точки x_1 и x_2 такие, что:

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-a}{x_2-a} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots,$$ где Φ — пропорция золотого сечения.

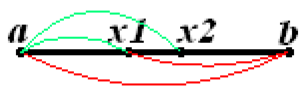

Иллюстрация выбора промежуточных точек метода золотого сечения.

Таким образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= b - \frac{(b-a)}{\Phi} \\ x_2 &= a + \frac{(b-a)}{\Phi} \end{aligned}$$

То есть точка x_1 делит отрезок $[a,\ x_2]$ в отношении золотого сечения. Аналогично x_2 делит отрезок $[x_1,\ b]$ в той же пропорции. Это свойство и используется для построения итеративного процесса.

Алгоритм

1. На первой итерации заданный отрезок делится двумя симметричными относительно его центра точками и рассчитываются значения в этих точках.
2. После чего тот из концов отрезка, к которому среди двух вновь поставленных точек ближе оказалась та, значение в которой максимально (для случая поиска минимума), отбрасывают.

3. На следующей итерации в силу показанного выше свойства золотого сечения уже надо искать всего одну новую точку.
4. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Формализация

1. **Шаг 1.** Задаются начальные границы отрезка $a, \ b$ и точность ε.
2. **Шаг 2.** Рассчитывают начальные точки деления: $x_1 = b - \dfrac{(b-a)}{\Phi}, \quad x_2 = a + \dfrac{(b-a)}{\Phi}$ и значения в них целевой функции: $y_1 = f(x_1), \ y_2 = f(x_2)$.
   - Если $y_1 \geq y_2$ (для поиска max изменить неравенство на $y_1 \leq y_2$), то $a = x_1$
   - Иначе $b = x_2$.
3. **Шаг 3.**
   - Если $|b-a| < \varepsilon$, то $x = \dfrac{a+b}{2}$ и останов.
   - Иначе возврат к шагу 2.

Алгоритм взят из источника: *Джон Г.Мэтьюз, Куртис Д.Финк*. "Численные методы. Использование MATLAB". — М, СПб: "Вильямс", 2001. — 716 с.

Простейшая реализация данного алгоритма на языке F# (содержит лишние вычисления минимизируемой функции):

```
let phi = 0.5 * (1.0 + sqrt 5.0)
let rec minimize f eps a b =
    if abs(b - a) < eps then
        0.5 * (a + b)
    else
        let t = (b - a) / phi
        let x1, x2 = b - t, a + t
        if f x1 >= f x2 then
            minimize f eps x1 b
        else
            minimize f eps a x2
// Примеры вызова:
minimize cos 1e-6 0.0 6.28
// = 3.141592794; число итераций: 33; функция f вызвана 64 раза.
minimize (fun x -> (x - 1.0)**2.0) 1e-6 0.0 10.0
// = 1.000000145; число итераций: 35; функция f вызвана 68 раз.
```

Метод чисел Фибоначчи

В силу того, что в асимптотике $\Phi = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, метод золотого сечения может быть трансформирован в так называемый метод чисел Фибоначчи. Однако при этом в силу свойств чисел Фибоначчи количество итераций строго ограничено. Это удобно, если сразу задано количество возможных обращений к функции.

Алгоритм

1. **Шаг 1.** Задаются начальные границы отрезка $a, \ b$ и число итераций n, рассчитывают начальные точки деления: $x_1 = a + (b-a)\dfrac{F_{n-2}}{F_n}, \quad x_2 = a + (b-a)\dfrac{F_{n-1}}{F_n}$ и значения в них целевой функции: $y_1 = f(x_1), \ y_2 = f(x_2)$.
2. **Шаг 2.** $n = n - 1$.
   - Если $y_1 > y_2$, то $a = x_1, \ x_1 = x_2, \ x_2 = b - (x_1 - a), \ y_1 = y_2, \ y_2 = f(x_2)$.
   - Иначе $b = x_2, \ x_2 = x_1, \ x_1 = a + (b - x_2), \ y_2 = y_1, \ y_1 = f(x_1)$.

3. **Шаг 3.**
   - Если $n = 1$, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и остановка.
   - Иначе возврат к шагу 2.

Литература

1. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1986.
2. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. Пер. с англ. — М.: Мир, 1985.
3. *Коршунов Ю. М.* Математические основы кибернетики. — М.: Энергоатомиздат, 1972.
4. *Максимов Ю. А., Филлиповская Е. А.* Алгоритмы решения задач нелинейного программирования. — М.: МИФИ, 1982.
5. *Максимов Ю. А.* Алгоритмы линейного и дискретного программирования. — М.: МИФИ, 1980.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970. — С. 575—576.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров (http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Korn1973ru.djvu). — М.: Наука, 1973. — С. 832 с илл..
8. *Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк.* Численные методы. Использование MATLAB. — 3-е издание. — М., СПб.: Вильямс, 2001. — С. 716.

См. также

- Золотое сечение
- Числа Фибоначчи

Источник — https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Метод_золотого_сечения&oldid=95496380

Эта страница в последний раз была отредактирована 8 октября 2018 в 09:41.

Текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike; в отдельных случаях могут действовать дополнительные условия.
Wikipedia® — зарегистрированный товарный знак некоммерческой организации Wikimedia Foundation, Inc.