Теорема Леви о монотонной сходимости

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Теорема о монотонной сходимости (**теорема Беппо́ Ле́ви**) — это теорема из теории интегрирования Лебега, имеющая фундаментальное значение для функционального анализа и теории вероятностей, где служит инструментом для доказательства многих положений. Даёт одно из условий при которых можно переходить к пределу под знаком интеграла Лебега[1], теорема позволяет доказать существование суммируемого предела у некоторых ограниченных функциональных последовательностей.

Содержание

Различные формулировки из функционального анализа

Далее $L_1(X,\mu)$ обозначает пространство интегрируемых функций на пространстве с мерой (X,μ). Мера не предполагается конечной. Для всех интегралов далее областью интегрирования является всё пространство X.

Теорема Леви (о монотонном пределе интегрируемых функций). Пусть $f_n \in L_1(X,\mu)$ — монотонно возрастающая последовательность функций, интегрируемых на X, то есть

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X.$$

Если их интегралы ограничены в совокупности:

$$\int f_n(x)d\mu \leqslant K,$$

Тогда:

1. почти всюду существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) := f(x)$ (то есть функции $f_n(x)$ сходятся поточечно к некоторой функции $f(x)$ почти всюду на X);
2. предельная функция $f(x)$ интегрируема на X, то есть $f \in L_1(X,\mu)$;
3. функции $f_n(x)$ сходятся к функции $f(x)$ в среднем, то есть по норме

пространства $L_1(X,\mu)$;

4. допустим предельный переход под знаком интеграла:

$$\int f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)d\mu.$$

Другая форма теоремы Леви относится к почленному интегрированию неотрицательных рядов:

Теорема Леви (о почленном интегрировании неотрицательных рядов). Пусть $\varphi_n \in L_1(X,\mu)$ — неотрицательные функции, интегрируемые на X. Если ограничены в совокупности интегралы от частичных сумм ряда

$$\int \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)d\mu \leqslant C,$$

тогда

1. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ сходится почти всюду к конечному значению;
2. сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ является интегрируемой функцией;
3. последовательность частичных сумм ряда сходится к его сумме по норме пространства $L_1(X,\mu)$;
4. допустимо почленное интегрирование функционального ряда:

$$\int \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int \varphi_k(x)d\mu.$$

Первая и вторая форма теоремы переходят одна в другую при замене $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k(x)$, или $\varphi_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$. Однако вторая форма допускает следующее расширение на интегрирование функциональных рядов, не обязательно знакопостоянных:

Теорема Леви (о почленном интегрировании функциональных рядов). Пусть $\varphi_n \in L_1(X,\mu)$ — функции, интегрируемые на X. Если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int |\varphi_k(x)|d\mu < \infty,$$

тогда

1. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ абсолютно сходится почти всюду к конечному значению;

2. сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$ является интегрируемой функцией;
3. последовательность частичных сумм ряда сходится к его сумме по норме пространства $L_1(X, \mu)$;
4. допустимо почленное интегрирование функционального ряда:

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi_k(x) d\mu.$$

Чтобы получить теорему Леви в этой форме, нужно применить теорему Лебега о мажорированной сходимости, так как частичные суммы ряда допускают интегрируемую мажоранту:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x)| = \varphi(x)$$

Формулировка из теории вероятностей

Так как математическое ожидание случайной величины определяется как её интеграл Лебега по пространству элементарных исходов Ω, вышеприведенная теорема переносится и в теорию вероятностей. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонная последовательность неотрицательных п.н. интегрируемых случайных величин. Тогда

$$\mathbb{E} \left[\lim_{n \to \infty} X_n \right] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E} X_n.$$

См. также

- Теорема Лебега о мажорируемой сходимости
- Лемма Фату

Примечания

1. То есть даёт условие, при котором из сходимости функциональной последовательности $f_n(x) \to f(x)$ к суммируемому пределу следует сходимость и равенство интегралов $\lim\limits_{n \to \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx$.

Литература

- *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — изд. четвёртое, переработанное. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
- *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 495 с.
- *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. — 2-е. — М.: Физматлит, 1961. — 436 с.