ВикипедиЯ

Обратные тригонометрические функции

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Обра́тные тригономе́три́ческие фу́нкции (*круговые функции*, *аркфункции*) — математические функции, являющиеся обратными к тригонометрическим функциям. К обратным тригонометрическим функциям обычно относят шесть функций:

- арксинус (обозначение: $\arcsin x$; угол, синус которого равен x)
- арккосинус (обозначение: $\arccos x$; угол, косинус которого равен x и т. д.)
- арктангенс (обозначение: $\mathrm{arctg}\, x$; в иностранной литературе $\arctan x$)
- арккотангенс (обозначение: $\mathrm{arcctg}\, x$; в иностранной литературе $\mathrm{arccot}\, x$ или $\mathrm{arccotan}\, x$)
- арксеканс (обозначение: $\mathrm{arcsec}\, x$)
- арккосеканс (обозначение: $\mathrm{arccosec}\, x$; в иностранной литературе $\mathrm{arccsc}\, x$)

Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-» (от лат. ***arcus*** — дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку. Так, обычный синус позволяет по дуге окружности найти стягивающую её хорду, а обратная функция решает противоположную задачу. Манера обозначать таким образом обратные тригонометрических функции появилась у австрийского математика Карла Шерфера (нем. *Karl Scherffer*; 1716—1783) и закрепилась благодаря Лагранжу. Впервые специальный символ для обратной тригонометрической функции использовал Даниил Бернулли в 1729 году. Английская и немецкая математические школы до конца XIX века предлагали иные обозначения: $\sin^{-1}, \dfrac{1}{\sin}$, но они не прижились[1]. Лишь изредка в иностранной литературе, также как и в научных/инженерных калькуляторах, пользуются обозначениями типа $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ для арксинуса, арккосинуса и т. п.[2], — такая запись считается не очень удобной, так как возможна путаница с возведением функции в степень -1.

Тригонометрические функции периодичны, поэтому функции, обратные к ним, многозначны. То есть, значение аркфункции представляет собой множество углов (дуг), для которых соответствующая прямая тригонометрическая функция равна заданному числу. Например, $\arcsin 1/2$ означает множество углов $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6} \ldots \; (30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ \ldots)\right)$, синус которых равен $1/2$. Из множества значений каждой аркфункции выделяют её главные значения (см. графики главных значений аркфункций ниже), которые обычно и имеют в виду, говоря об арксинусе, арккосинусе и т. д.

В общем случае при условии $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$ все решения уравнения $\sin x = \alpha$ можно представить в виде $x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.[3]

Содержание

Основное соотношение

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Функция arcsin

Аркси́нусом числа x называется такое значение угла y, выраженного в радианах, для которого

$$\sin y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1.$$

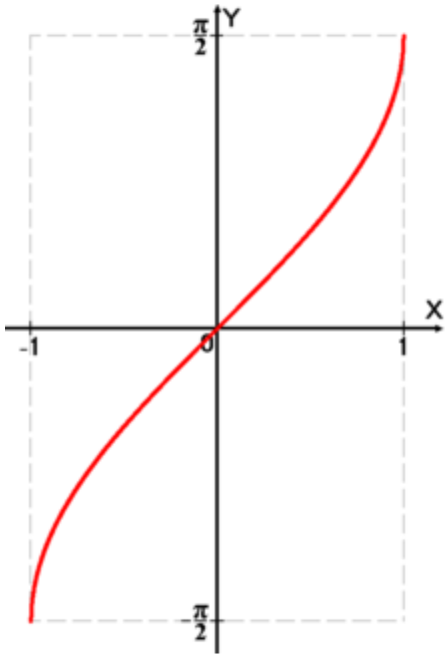


График функции $y = \arcsin x$

Функция $y = \arcsin x$ непрерывна и ограничена на всей своей области определения. Она является строго возрастающей.

- $\sin(\arcsin x) = x \qquad$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1,$
- $\arcsin(\sin y) = y \qquad$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2},$
- $D(\arcsin x) = [-1; 1]$ (область определения),
- $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (область значений).

Свойства функции arcsin

- $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ (функция является нечётной).
- $\arcsin x > 0$ при $0 < x \leqslant 1.$
- $\arcsin x = 0$ при $x = 0.$
- $\arcsin x < 0$ при $-1 \leqslant x < 0.$
- $\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\arccos \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$
- $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$

Получение функции arcsin

Дана функция $y = \sin x$. На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие $y = \arcsin x$ функцией не является. Поэтому мы рассмотрим отрезок, на котором она строго возрастает и принимает все значения области значений — $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Так как для функции $y = \sin x$ на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ каждое значение функции достигается при единственном значении аргумента, то на этом отрезке существует обратная функция $y = \arcsin x$, график которой симметричен графику функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$. (графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов координатной плоскости Oxy)

Функция arccos

Аркко́синусом числа x называется такое значение угла y в радианной мере, для которого $\cos y = x, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \pi, |x| \leqslant 1.$

Функция $y = \arccos x$ непрерывна и ограничена на всей своей области определения. Она является строго убывающей и неотрицательной.

- $\cos(\arccos x) = x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1,$
- $\arccos(\cos y) = y$ при $0 \leqslant y \leqslant \pi.$
- $D(\arccos x) = [-1; 1]$ (область определения),
- $E(\arccos x) = [0; \pi]$ (область значений).

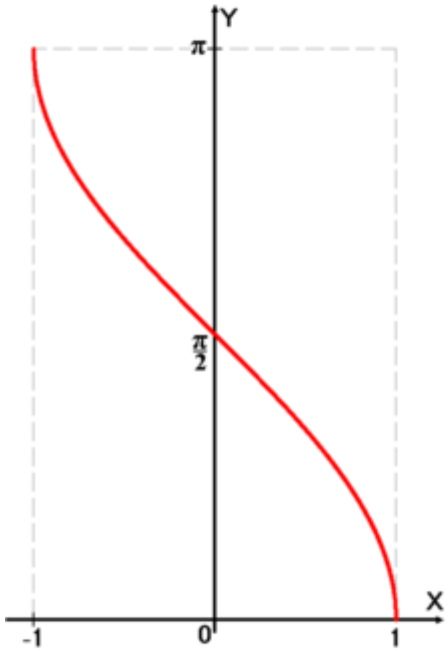


График функции $y = \arccos x$

Свойства функции arccos

- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$. Функция центрально-симметрична относительно точки $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, является индифферентной (ни чётной, ни нечётной).
- $\arccos x > 0$ при $-1 \leqslant x < 1.$
- $\arccos x = 0$ при $x = 1.$
- $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x.$
- $\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$
- $\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$
- $\arccos x = 2 \arcsin \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$
- $\arccos x = 2 \arccos \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$
- $\arccos x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Получение функции arccos

Дана функция $y = \cos x.$ На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие $y = \arccos x$ функцией не является. Поэтому мы рассмотрим отрезок, на котором она строго убывает и принимает все свои значения — $[0;\pi]$. На этом отрезке $y=\cos x$ строго монотонно убывает и принимает все свои значения только один раз, а значит, на отрезке $[0;\pi]$ существует обратная функция $y=\arccos x$, график которой симметричен графику $y=\cos x$ на отрезке $[0;\pi]$ относительно прямой $y=x$.

Функция arctg

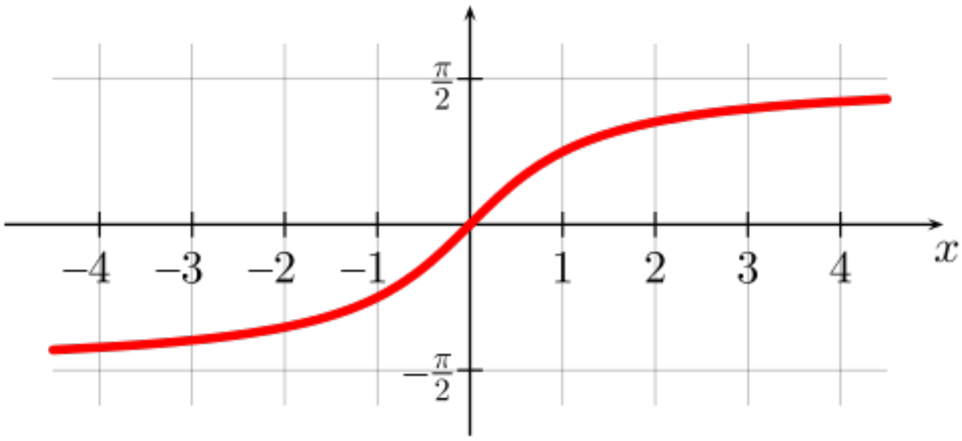


График функции $y=\operatorname{arctg} x$

Аркта́нгенсом числа x называется такое значение угла y, выраженное в радианах, для которого $\operatorname{tg} y=x, \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

Функция $y=\operatorname{arctg} x$ определена на всей числовой прямой, всюду непрерывна и ограничена. Она является строго возрастающей.

- $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ при $x\in\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y)=y$ при $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$,
- $D(\operatorname{arctg} x)=(-\infty;\infty)$ (область определения),
- $E(\operatorname{arctg} x)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (область значений).

Свойства функции arctg

- $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$ (функция является нечётной).
- $\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\operatorname{arctg} x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, при $x>0$.
- $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

- $\operatorname{arctg} x = -i \operatorname{arth} ix$, где arth — обратный гиперболический тангенс, гиперболический ареатангенс.
- $\operatorname{arth} x = i \operatorname{arctg} ix$.

Получение функции arctg

Дана функция $y = \operatorname{tg}\ x$. На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие $y = \operatorname{arctg}\ x$ функцией не является (так как нарушается требование однозначности). Поэтому рассмотрим отрезок, на котором она строго возрастает и принимает все свои значения только один раз — $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом отрезке $y = \operatorname{tg}\ x$ строго монотонно возрастает и принимает все свои значения только один раз, следовательно, на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ существует обратная $y = \operatorname{arctg}\ x$, график которой симметричен графику $y = \operatorname{tg}\ x$ на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ относительно прямой $y = x$.

Функция arcctg

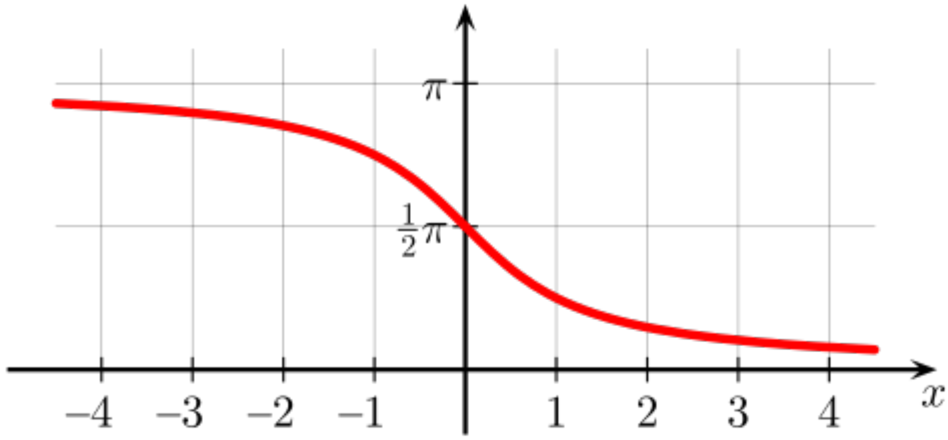


График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Арккота́нгенсом числа x называется такое значение угла y (в радианной мере измерения углов), для которого $\operatorname{ctg}\ y = x, \quad 0 < y < \pi$.

Функция $y = \operatorname{arcctg}\ x$ определена на всей числовой прямой, всюду непрерывна и ограничена. Она является строго убывающей и всюду положительной.

- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\ x) = x$ при $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\ y) = y$ при $0 < y < \pi$,
- $D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; \infty)$,
- $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$.

Свойства функции arcctg

- $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$. График функции центрально-симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция является индифферентной (ни чётной, ни нечётной).
- $\operatorname{arcctg} x > 0$ при любых x.
- $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0 \end{cases}$
- $\operatorname{arcctg} x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$.

Получение функции arcctg

Дана функция $y = \operatorname{ctg} x$. На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие $y = \operatorname{arcctg} x$ функцией не является. Поэтому рассмотрим промежуток, на котором она строго убывает и принимает все свои значения только один раз — $(0; \pi)$. На этом отрезке $y = \operatorname{ctg} x$ строго убывает и принимает все свои значения только один раз, следовательно, на интервале $(0; \pi)$ существует обратная функция $y = \operatorname{arcctg} x$, график которой симметричен графику $y = \operatorname{ctg} x$ на отрезке $(0; \pi)$ относительно прямой $y = x$.

График арккотангенса получается из графика арктангенса, если последний отразить относительно оси ординат (то есть заменить знак аргумента, $x \to -x$) и сместить вверх на $\pi/2$; это вытекает из вышеупомянутой формулы $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}(-x) + \pi/2$.

Функция arcsec

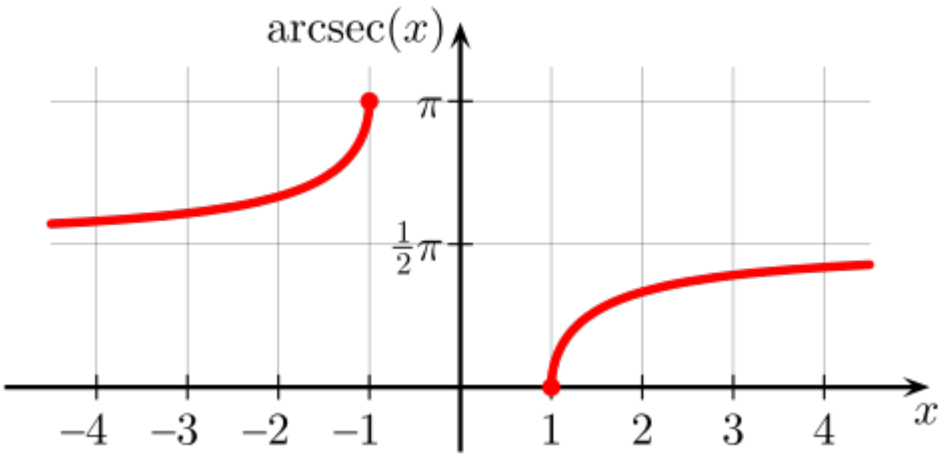


График функции $y = \operatorname{arcsec} x$

Арксе́кансом числа x называется такое значение угла y (в радианной мере измерения углов), для которого $\sec y = x, \qquad |x| \geqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Функция $y = \operatorname{arcsec} x$ непрерывна и ограничена на всей своей области определения. Она является строго возрастающей и всюду неотрицательной.

- $\sec(\operatorname{arcsec} x) = x$ при $|x| \geqslant 1$,
- $\operatorname{arcsec}(\sec y) = y$ при $0 \leqslant y \leqslant \pi$.
- $D(\operatorname{arcsec} x) = (-\infty; -1] \cup [1, \infty)$ (область определения),
- $E(\operatorname{arcsec} x) = [0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi]$ (область значений).

Свойства функции arcsec

- $\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$. График функции центрально-симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция является индифферентной (ни чётной, ни нечётной).
- $\operatorname{arcsec} x \geqslant 0$ при любых x.
- $\operatorname{arcsec} x = \begin{cases} \arcsin \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, & x \geqslant 1 \\ \pi + \arcsin \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, & x \leqslant -1 \end{cases}$
- $\operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccosec} x$.
- $\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$.

Функция arccosec

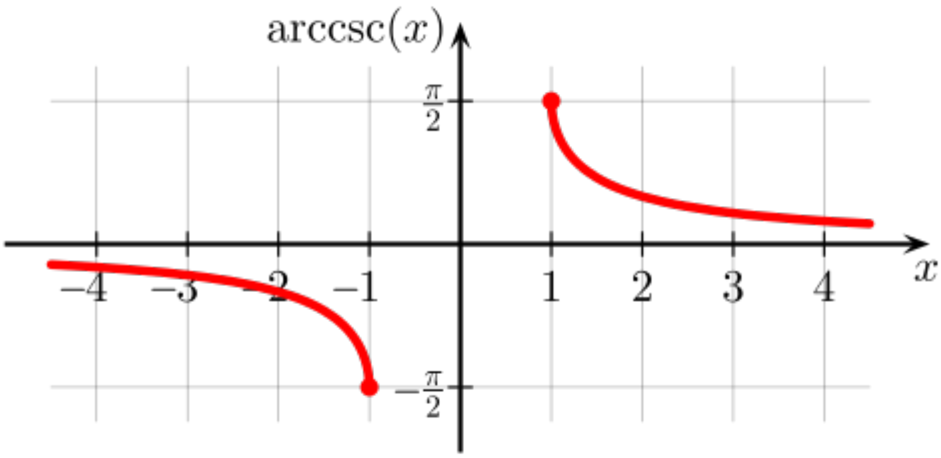


График функции $y = \operatorname{arccosec} x$

Арккосе́кансом числа x называется такое значение угла y (в радианной мере измерения углов), для которого $\operatorname{cosec} y = x, \qquad |x| \geqslant 1, \quad -\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2.$

Функция $y = \operatorname{arccosec} x$ непрерывна и ограничена на всей своей области определения. Она является строго убывающей.

- $\operatorname{cosec}(\operatorname{arccosec} x) = x$ при $|x| \geqslant 1$,

- $\operatorname{arccosec}(\operatorname{cosec} y) = y$ при $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$.
- $D(\operatorname{arccosec} x) = (-\infty; -1] \cup [1, \infty)$ (область определения),
- $E(\operatorname{arccosec} x) = [-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}]$ (область значений).

Свойства функции arccosec

- $\operatorname{arccosec}(-x) = -\operatorname{arccosec} x$ (функция является нечётной).
- $\operatorname{arccosec}\ x = \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1 \\ -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & x < -1 \end{cases}$
- $\operatorname{arccosec} x = \pi/2 - \operatorname{arcsec} x$.
- $\operatorname{arccosec} x = \arcsin \dfrac{1}{x}$.

Разложение в ряды

- $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \cdots \ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$ для всех $|x| \leq 1$ [4]
- $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$ для всех $|x| \leq 1$
- $\operatorname{arctg}\ x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ для всех $|x| \leq 1$

Производные от обратных тригонометрических функций

Все обратные тригонометрические функции бесконечно дифференцируемы в каждой точке своей области определения. Первые производные:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

$$(\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Интегралы от обратных тригонометрических функций

Неопределённые интегралы

Для действительных и комплексных x:

$$\int \arcsin x\,dx = x\,\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$
$$\int \arccos x\,dx = x\,\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C,$$
$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\,\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C,$$
$$\int \operatorname{arcctg} x\,dx = x\,\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C,$$
$$\int \operatorname{arcsec} x\,dx = x\,\operatorname{arcsec} x - \ln\left(x\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right)\right) + C,$$
$$\int \operatorname{arccosec} x\,dx = x\,\operatorname{arccosec} x + \ln\left(x\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right)\right) + C.$$

Для действительных $x \geq 1$:

$$\int \operatorname{arcsec} x\,dx = x\,\operatorname{arcsec} x - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C,$$
$$\int \operatorname{arccosec} x\,dx = x\,\operatorname{arccosec} x + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

См. также ***Список интегралов от обратных тригонометрических функций***

Использование в геометрии

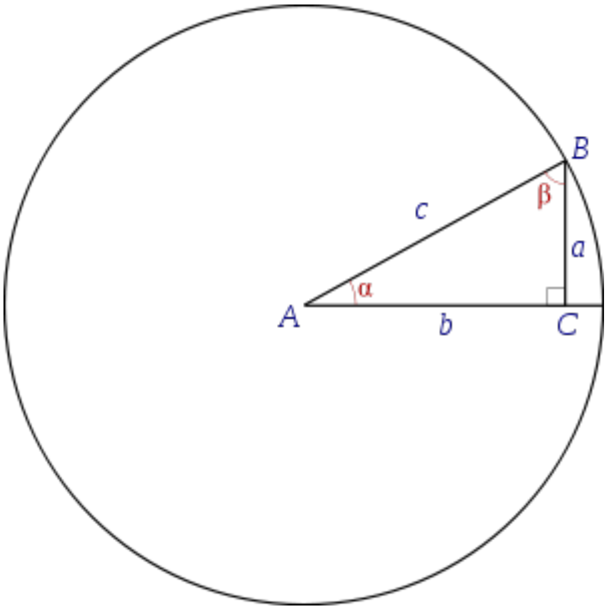
Обратные тригонометрические функции используются для вычисления углов треугольника, если известны его стороны, например, с помощью теоремы косинусов.

В прямоугольном треугольнике эти функции от отношений сторон сразу дают угол. Так, если катет длины a является противолежащим для угла α, то

$$\alpha = \arcsin(a/c) = \arccos(b/c) = \operatorname{arctg}(a/b) = \operatorname{arccosec}(c/a) = \operatorname{arcsec}(c/b) = \operatorname{arcctg}$$

Связь с натуральным логарифмом

Для вычисления значений обратных тригонометрических функций от комплексного аргумента удобно использовать формулы, выражающие их через натуральный логарифм:



Прямоугольный треугольник *ABC*

$$\arcsin z = -i\ln(iz+\sqrt{1-z^2}) = \frac{\pi}{2} - i\ln(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$\arccos z = \frac{\pi}{2} + i\ln(iz+\sqrt{1-z^2}),$$

$$\operatorname{arctg}\ z = \frac{i}{2}(\ln(1-iz) - \ln(1+iz)),$$

$$\operatorname{arcctg}\ z = \frac{i}{2}\left(\ln\left(\frac{z-i}{z}\right) - \ln\left(\frac{z+i}{z}\right)\right),$$

$$\operatorname{arcsec} z = \arccos\left(z^{-1}\right) = \frac{\pi}{2} + i\ln\left(\sqrt{1-\frac{1}{z^2}} + \frac{i}{z}\right),$$

$$\operatorname{arccosec}\ z = \arcsin\left(z^{-1}\right) = -i\ln\left(\sqrt{1-\frac{1}{z^2}} + \frac{i}{z}\right).$$

Примечания

1. *Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник, изд. 3-е. — СПб.: ЛКИ, 2008. — С. 211. — ISBN 978-5-382-00839-4.
2. Здесь знак $^{-1}$ определяет функцию $x = f^{-1}(y)$, обратную функции $y = f(x)$
3. Энциклопедический словарь, 1985, с. 220.
4. При значении x, близком к 1, эта расчётная формула даёт большую погрешность. Поэтому можно воспользоваться формулой $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$, где $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$

Ссылки

- *Weisstein, Eric W.* Обратные тригонометрические функции (http://mathworld.wolfram.com/InverseTrigonometricFunctions.html) (англ.) на сайте Wolfram MathWorld.
- Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. — М.: «Советская Энциклопедия», 1982. — [dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/3612/%D0%9E%D0%91%D0%A0%D0%90%D0%A2%D0%9D%D0%AB%D0%95 Т. 3. — с. 1135].
- *Обратные тригонометрические функции* — статья из Большой советской энциклопедии. — М.: «Советская Энциклопедия», 1974. — Т. 18. — с. 225.
- Обратные тригонометрические функции (http://yunc.org/%D0%9E%D0%91%D0%A0%D0%90%D0%A2%D0%9D%D0%AB%D0%95_%D0%A2%D0%A0%D0%98%D0%93%D0%9E%D0%9D%D0%9E%D0%9C%D0%95%D0%A2%D0%A0%D0%98%D0%A7%D0%95%D0%A1%D0%9A%D0%98%D0%95_%D0%A4%D0%A3%D0%9D%D0%9A%D0%A6%D0%98%D0%98) // Энциклопедический словарь юного математика (https://ru.wikipedia.org/wiki/Энциклопедический_словарь_(Педагогика)) / Савин А.П. — М.: Педагогика, 1985. — С. 220–221. — 352 с.
- Построение графиков обратных тригонометрических функций онлайн (http://yotx.ru)
- Онлайн калькулятор: обратные тригонометрические функции (http://www.planetcalc.ru/326/)

См. также

- Тригонометрические функции
- Обратные гиперболические функции
- Теорема Данжуа — Лузина