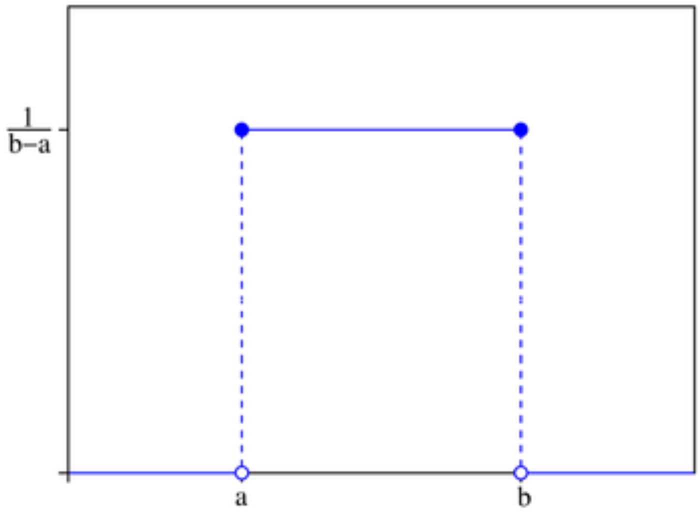
ВикипедиЯ

Непрерывное равномерное распределение

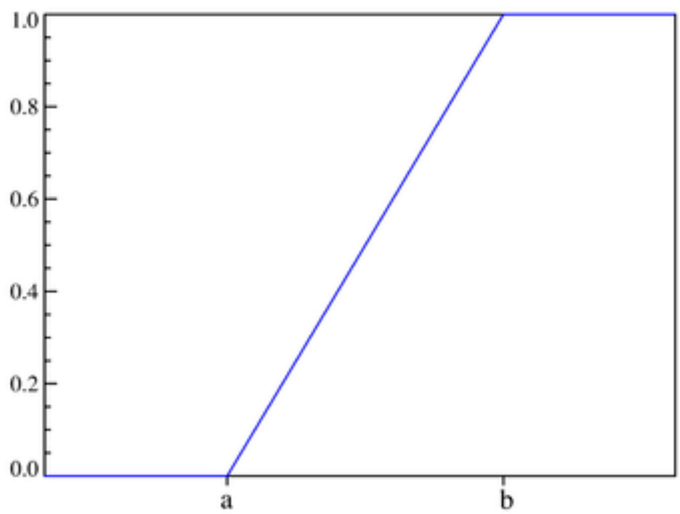
Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Непреры́вное равноме́рное распределе́ние в теории вероятностей — распределение случайной вещественной величины, принимающей значения, принадлежащие некоторому промежутку конечной длины, характеризующееся тем, что плотность вероятности на этом промежутке почти всюду постоянна.

Непрерывное равномерное распределение



Плотность вероятности



Функция распределения

Обозначение	$\mathcal{U}(a,b)$, $Rav(a,b)$
Параметры	$a,b \in (-\infty,\infty)$, a — коэффициент сдвига, $b-a$ — коэффициент масштаба
Носитель	$a \leqslant x \leqslant b$

Содержание

Определение

Говорят, что случайная величина имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, где $a,b \in \mathbb{R}$, если её плотность $f_X(x)$ имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Пишут: $X \sim U[a,b]$. Иногда значения плотности в граничных точках $x=a$ и $x=b$ меняют на другие, например 0 или $\dfrac{1}{2(b-a)}$. Так как интеграл Лебега от плотности не зависит от поведения последней на множествах меры нуль, эти вариации не влияют на вычисления связанных с этим распределением вероятностей.

Плотность вероятности	$\frac{1}{b-a}$	$a \leqslant x \leqslant b$
	0	$x < a$, $x > b$
Функция распределения	0	$x < a$
	$\frac{x-a}{b-a}$	$a \leqslant x < b$
	1	$x \geqslant b$
Математическое ожидание	$\frac{a+b}{2}$	
Медиана	$\frac{a+b}{2}$	
Мода	любое число из отрезка $[a, b]$	
Дисперсия	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Коэффициент асимметрии	0	
Коэффициент эксцесса	$-\frac{6}{5}$	
Дифференциальная энтропия	$\ln(b-a)$	
Производящая функция моментов	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$	
Характеристическая функция	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$	

Функция распределения

Интегрируя определённую выше плотность, получаем:

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}.$$

Так как плотность равномерного распределения разрывна в граничных точках отрезка $[a, b]$, то функция распределения в этих точках не является дифференцируемой. В остальных точках справедливо стандартное равенство:

$$\frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}.$$

Производящая функция моментов

Простым интегрированием получаем производящую функцию моментов:

$$M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)},$$

откуда находим все интересующие моменты непрерывного равномерного распределения:

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$\mathrm{D}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вообще,

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}.$$

Стандартное равномерное распределение

Если $a = 0$ и $b = 1$, то есть $X \sim U[0,1]$, то такое непрерывное равномерное распределение называют **стандартным**.

Имеет место элементарное утверждение:

> Если случайная величина $X \sim U[0,1]$ и $Y = a + (b-a)X$, то $Y \sim U[\min(a,b), \max(a,b)]$.

Таким образом, имея генератор случайной выборки из стандартного непрерывного равномерного распределения, легко построить генератор выборки любого непрерывного равномерного распределения.

Более того, имея такой генератор и зная функцию обратную к функции распределения случайной величины, можно построить генератор выборки *любого* непрерывного распределения (не обязательно равномерного) с помощью метода обратного преобразования. Поэтому стандартно равномерно распределённые случайные величины иногда называют *базовыми случайными величинами*.

Существуют также частные преобразования, позволяющие на основе равномерного распределения получить случайные распределения другого вида. Так, например, для получения нормального распределения служит преобразование Бокса — Мюллера.

См. также

- Дискретное равномерное распределение;
- Метод обратного преобразования.
