ВикипедиЯ

Преобразование Лапласа

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Преобразова́ние Лапла́са ($\mathscr{L}$) — интегральное преобразование, связывающее функцию $F(s)$ комплексного переменного (*изображение*) с функцией $f(x)$ вещественного переменного (*оригинал*). С его помощью исследуются свойства динамических систем и решаются дифференциальные и интегральные уравнения.

Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчётах, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Так, свёртка двух функций сводится в пространстве изображений к операции умножения, а линейные дифференциальные уравнения становятся алгебраическими.

Содержание

Определение

Прямое преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа функции вещественной переменной $f(t)$ называется функция $F(s)$ комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$[1], такая что:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

Правая часть этого выражения называется *интегралом Лапласа*.

Функцию $f(t)$ называют оригиналом в преобразовании Лапласа, а функцию $F(s)$ называют изображением функции $f(t)$.

В литературе связь между оригиналом и изображением часто обозначают так: $f(t) \risingdotseq F(s)$ и $F(s) \fallingdotseq f(t)$, причём изображение принято записывать с заглавной буквы.

Обратное преобразование Лапласа

Обратным преобразованием Лапласа функции комплексного переменного $F(s)$ называется функция $f(t)$ вещественной переменной, такая что:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1 - i\cdot\infty}^{\sigma_1 + i\cdot\infty} e^{st} F(s)\,ds,$$

где σ_1 — некоторое вещественное число (см. условия существования). Правая часть этого выражения называется *интегралом Бромвича*.

Двустороннее преобразование Лапласа

Двустороннее преобразование Лапласа — обобщение на случай задач, в которых для функции $f(x)$ участвуют значения $x < 0$.

Двустороннее преобразование Лапласа определяется следующим образом:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx.$$

Дискретное преобразование Лапласа

Применяется в сфере систем компьютерного управления. Дискретное преобразование Лапласа может быть применено для решётчатых функций.

Различают D-преобразование и Z-преобразование.

- **D -преобразование**

Пусть $x_d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$ — решётчатая функция, то есть значения этой функции определены только в дискретные моменты времени nT , где n — целое число, а T — период дискретизации.

Тогда, применяя преобразование Лапласа, получим:

$$\mathcal{D}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-snT}.$$

- **Z -преобразование**

Если применить следующую замену переменных:

$$z = e^{sT},$$

получим Z-преобразование:

$$\mathcal{Z}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot z^{-n}.$$

Свойства и теоремы

- **Абсолютная сходимость**

Если интеграл Лапласа абсолютно сходится при $\sigma = \sigma_0$, то есть существует предел

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b |f(x)| e^{-\sigma_0 x}\, dx = \int\limits_0^\infty |f(x)| e^{-\sigma_0 x}\, dx,$$

то он сходится абсолютно и равномерно для $\sigma \geqslant \sigma_0$ и $F(s)$ — аналитическая функция при $\sigma \geqslant \sigma_0$ ($\sigma = \operatorname{Re} s$ — вещественная часть комплексной переменной s). Точная нижняя грань σ_a множества чисел σ, при которых это условие выполняется, называется *абсциссой абсолютной сходимости* преобразования Лапласа для функции $f(x)$.

- **Условия существования прямого преобразования Лапласа**

Преобразование Лапласа $\mathcal{L}\{f(x)\}$ существует в смысле абсолютной сходимости в следующих случаях:

1. $\sigma \geqslant 0$: преобразование Лапласа существует, если существует интеграл $\int\limits_0^\infty |f(x)|\, dx;$

2. $\sigma > \sigma_a$: преобразование Лапласа существует, если интеграл $\int\limits_0^{x_1} |f(x)|\,dx$ существует для каждого конечного $x_1 > 0$ и $|f(x)| \leqslant Ke^{\sigma_a x}$ для $x > x_2 \geqslant 0$;
3. $\sigma > 0$ или $\sigma > \sigma_a$ (какая из границ больше): преобразование Лапласа существует, если существует преобразование Лапласа для функции $f'(x)$ (производная от $f(x)$) для $\sigma > \sigma_a$.

Примечание: это достаточные условия существования.

- **Условия существования обратного преобразования Лапласа**

Для существования обратного преобразования Лапласа достаточно выполнение следующих условий:

1. Если изображение $F(s)$ — аналитическая функция для $\sigma \geqslant \sigma_a$ и имеет порядок меньше −1, то обратное преобразование для неё существует и непрерывно для всех значений аргумента, причём $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 0$ для $t \leqslant 0$.
2. Пусть $F(s) = \varphi[F_1(s),\ F_2(s),\ \ldots,\ F_n(s)]$, так что $\varphi(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$ аналитична относительно каждого z_k и равна нулю для $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$, и $F_k(s) = \mathcal{L}\{f_k(x)\}\ \ (\sigma > \sigma_{ak}\colon k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, тогда обратное преобразование существует и соответствующее прямое преобразование имеет абсциссу абсолютной сходимости.

Примечание: это достаточные условия существования.

- **Теорема о свёртке**

Преобразованием Лапласа свёртки двух оригиналов является произведение изображений этих оригиналов:

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} \cdot \mathcal{L}\{g(x)\}.$$

- **Умножение изображений**

$$f(x)g(0) + \int\limits_0^x f(x-\tau)g'(\tau)\,d\tau = sF(s)G(s).$$

Левая часть этого выражения называется интегралом Дюамеля, играющим важную роль в теории динамических систем.

- **Дифференцирование и интегрирование оригинала**

Изображением по Лапласу первой производной от оригинала по аргументу является произведение изображения на аргумент последнего за вычетом оригинала в нуле справа:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s \cdot F(s) - f(0^+).$$

В более общем случае (производная n-го порядка):

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f^{(1)}(0^+) - \ldots - s f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-}$$

Изображением по Лапласу интеграла от оригинала по аргументу является изображение оригинала, делённое на свой аргумент:

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

- **Дифференцирование и интегрирование изображения**

Обратное преобразование Лапласа от производной изображения по аргументу есть произведение оригинала на свой аргумент, взятое с обратным знаком:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -x f(x).$$

Обратное преобразование Лапласа от интеграла изображения по аргументу есть оригинал этого изображения, делённый на свой аргумент:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int\limits_s^{+\infty} F(s)\,ds\right\} = \frac{f(x)}{x}.$$

- **Запаздывание оригиналов и изображений. Предельные теоремы**

Запаздывание изображения:

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a);$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax} f(x).$$

Запаздывание оригинала:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as} F(s);$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(x-a)H(x-a).$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда.

Теоремы о начальном и конечном значении (предельные теоремы):

$f(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} sF(s)$, если все полюсы функции $sF(s)$ находятся в левой полуплоскости.

Теорема о конечном значении очень полезна, так как описывает поведение оригинала на бесконечности с помощью простого соотношения. Это, например, используется для анализа устойчивости траектории динамической системы.

- **Другие свойства**

Линейность:

$$\mathcal{L}\{af(x) + bg(x)\} = aF(s) + bG(s).$$

Умножение на число:

$$\mathcal{L}\{f(ax)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Прямое и обратное преобразование Лапласа некоторых функций

Ниже представлена таблица преобразования Лапласа для некоторых функций.

№	Функция	Временная область $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	Частотная область $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	Область сходимости для причинных систем
1	дельта-функция	$\delta(t)$	1	$\forall s$
1a	запаздывающая дельта-функция	$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$	
2	запаздывание n-го порядка с частотным сдвигом	$\frac{(t-\tau)^n}{n!}e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot H(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$s > 0$
2a	степенная n-го порядка	$\frac{t^n}{n!} \cdot H(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$s > 0$
2a.1	степенная q-го порядка	$\frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \cdot H(t)$	$\frac{1}{s^{q+1}}$	$s > 0$
2a.2	функция Хевисайда	$H(t)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2b	функция Хевисайда с запаздыванием	$H(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$	$s > 0$
2c	«ступенька скорости»	$t \cdot H(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
2d	n-го порядка с частотным сдвигом	$\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t} \cdot H(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$s > -\alpha$
2d.1	экспоненциальное затухание	$e^{-\alpha t} \cdot H(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$s > -\alpha$
3	экспоненциальное приближение	$(1-e^{-\alpha t}) \cdot H(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$s > 0$
4	синус	$\sin(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
5	косинус	$\cos(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
6	гиперболический синус	$\mathrm{sh}\,(\alpha t) \cdot H(t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	$s > \|\alpha\|$
7	гиперболический косинус	$\mathrm{ch}\,(\alpha t) \cdot H(t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$s > \|\alpha\|$
8	экспоненциально затухающий синус	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$s > -\alpha$
9	экспоненциально затухающий косинус	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$s > -\alpha$
10	корень n-го порядка	$\sqrt[n]{t} \cdot H(t)$	$s^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$s > 0$

11	натуральный логарифм	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot H(t)$	$-\frac{t_0}{s}[\ln(t_0 s) + \gamma]$	$s > 0$
12	функция Бесселя первого рода порядка n	$J_n(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{\omega^n\left(s+\sqrt{s^2+\omega^2}\right)^{-n}}{\sqrt{s^2+\omega^2}}$	$s > 0$ $(n > -1)$
13	модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n	$I_n(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{\omega^n\left(s+\sqrt{s^2-\omega^2}\right)^{-n}}{\sqrt{s^2-\omega^2}}$	$s > \lvert\omega\rvert$
14	функция Бесселя второго рода нулевого порядка	$Y_0(\alpha t) \cdot H(t)$	$-\frac{2\operatorname{arsh}(s/\alpha)}{\pi\sqrt{s^2+\alpha^2}}$	$s > 0$
15	модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка	$K_0(\alpha t) \cdot H(t)$		
16	функция ошибок	$\operatorname{erf}(t) \cdot H(t)$	$\frac{e^{s^2/4}\operatorname{erfc}(s/2)}{s}$	$s > 0$

Примечания к таблице:

- $H(t)$ — функция Хевисайда;
- $\delta(t)$ — дельта-функция;
- $\Gamma(z)$ — гамма-функция;
- γ — постоянная Эйлера — Маскерони;
- t — вещественная переменная;
- s — комплексная переменная;
- α, β, τ и ω — вещественные числа;
- n — целое число.
- Причинная система — система, в которой импульсная передаточная функция $h(t)$ равна нулю для любого момента времени $t < 0$.

Применения преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа находит широкое применение во многих областях математики (операционное исчисление), физики и техники:

- Решение систем дифференциальных и интегральных уравнений — с помощью преобразования Лапласа легко переходить от сложных понятий математического анализа к простым алгебраическим соотношениям.[2]
- Расчёт передаточных функций динамических систем, таких, к примеру, как аналоговые фильтры.
- Расчёт выходных сигналов динамических систем в теории управления и обработке сигналов — так как выходной сигнал линейной стационарной системы равен свёртке её импульсной характеристики с входным сигналом, преобразование Лапласа позволяет заменить эту операцию на простое умножение.
- Расчёт электрических схем. Производится путём решения

дифференциальных уравнений, описывающих схему операторным методом.
- Решение нестационарных задач математической физики.

Процедура решения дифференциального уравнения с использованием преобразования Лапласа состоит в следующем:

1. По заданному входном воздействию с помощью таблиц соответствий находят изображение.
2. По д.у. составляю передаточную функцию.
3. Находят изображение величины пунктов 1 и 2.
4. Определяют оригинал.[3]

Связь с другими преобразованиями

Фундаментальные связи

Практически все интегральные преобразования имеют схожую природу и могут получаться одно из другого через выражения соответствия. Многие из них являются частными случаями других преобразований. Далее даны формулы, связывающие преобразования Лапласа с некоторыми другими функциональными преобразованиями.

Преобразование Лапласа — Карсона

Преобразование Лапласа — Карсона (иногда называют просто преобразование Карсона, иногда, не совсем корректно, используют преобразование Карсона, называя его преобразованием Лапласа) получается из преобразования Лапласа путём домножения изображения на комплексную переменную:

$$\mathcal{L}_K\{f(x)\} = sF(s).$$

Преобразование Карсона широко используется в теории электрических цепей, так как при таком преобразовании размерности изображения и оригинала совпадают, поэтому коэффициенты передаточных функций имеют физический смысл.

Двустороннее преобразование Лапласа

Двустороннее преобразование Лапласа $\mathcal{L}_B$ связано с односторонним с помощью следующей формулы:

$$\mathcal{L}_B\{f(x);\ s\} = \mathcal{L}\{f(x);\ s\} + \mathcal{L}\{f(-x);\ -s\}.$$

Преобразование Фурье

Непрерывное преобразование Фурье эквивалентно двустороннему преобразованию Лапласа с комплексным аргументом $s = i\omega$:

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(x)\}=\mathcal{L}\{f(x)\}\Big|_{s=i\omega}=F(s)\Big|_{s=i\omega}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f(x)\,dx.$$

Примечание: в этих выражениях опущен масштабирующий множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, который часто включается в определения преобразования Фурье.

Связь между преобразованиями Фурье и Лапласа часто используется для того, чтобы определить частотный спектр сигнала или динамической системы.

Преобразование Меллина

Преобразование Меллина и обратное преобразование Меллина связаны с двусторонним преобразованием Лапласа простой заменой переменных. Если в преобразовании Меллина

$$G(s)=\mathcal{M}\left\{g(\theta)\right\}=\int\limits_0^\infty\theta^s\frac{g(\theta)}{\theta}\,d\theta$$

положим $\theta=e^{-x}$, то получим двустороннее преобразование Лапласа.

Z-преобразование

Z-преобразование — это преобразование Лапласа решётчатой функции, производимое с помощью замены переменных:

$$z\equiv e^{sT},$$

где $T=1/f_s$ — период дискретизации, а f_s — частота дискретизации сигнала.

Связь выражается с помощью следующего соотношения:

$$X_q(s)=X(z)\Big|_{z=e^{sT}}.$$

Преобразование Бореля

Интегральная форма преобразования Бореля идентична преобразованию Лапласа, существует также обобщённое преобразование Бореля, с помощью которого использование преобразования Лапласа распространяется на более широкий класс функций.

Библиография

- *Ван дер Поль Б., Бремер Х.* . Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. — М.: Издательство иностранной литературы, 1952. — 507 с.
- *Диткин В. А., Прудников А. П.* . Интегральные преобразования и

операционное исчисление. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. — 544 с.
- *Диткин В. А., Кузнецов П. И. .* Справочник по операционному исчислению: Основы теории и таблицы формул. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. — 256 с.
- *Карслоу Х., Егер Д. .* Операционные методы в прикладной математике. — М.: Издательство иностранной литературы, 1948. — 294 с.
- *Кожевников Н. И., Краснощёкова Т. И., Шишкин Н. Е. .* Ряды и интегралы Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1964. — 184 с.
- *Краснов М. Л., Макаренко Г. И. .* Операционное исчисление. Устойчивость движения. — М.: Наука, 1964. — 103 с.
- *Микусинский Я. .* Операторное исчисление. — М.: Издательство иностранной литературы, 1956. — 367 с.
- *Романовский П. И. .* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1980. — 336 с.

См. также

- Первая теорема разложения
- Вторая теорема разложения
- Преобразование Фурье
- D с чертой-преобразование
- Дифференциальные уравнения

Ссылки

- Преобразование Лапласа и его некоторые свойства (dsplib.org) (http://ru.dsplib.org/content/laplace/laplace.html)
- Преобразование Лапласа на сайте exponenta.ru (http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/tfkp/theme12/theory.asp)

Примечания

1. В отечественной литературе обозначается также через p. См., например, *Диткин В. А., Кузнецов П. И.* Справочник по операционному исчислению: Основы теории и таблицы формул. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. — 256 с.
2. *Ващенко-Захарченко М. Е.* Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений. — Киев, 1862.
3. Архитектура системы автоматического управления группой малых беспилотных летательных аппаратов (https://dx.doi.org/10.14357/20718632180109) // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2018-03-20. — ISSN 2071-8632 (https://www.worldcat.org/search?fq=x0:jrnl&q=n2:2071-8632). — doi:10.14357/20718632180109 (https://dx.doi.org/10.14357%2F20718632180109).