ВикипедиЯ

Числа Фибоначчи

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Чи́сла Фибона́ччи (также **Фибона́чи**[1]) — элементы числовой последовательности

> 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, … (последовательность A000045 в OEIS),

в которой первые два числа равны либо 1 и 1, либо 0 и 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Названы в честь средневекового математика Леонардо Пизанского (известного как Фибоначчи)[2].

Более формально, последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\}$ задаётся линейным рекуррентным соотношением:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Иногда числа Фибоначчи рассматривают и для отрицательных значений n, как двусторонне бесконечную последовательность, удовлетворяющую тому же рекуррентному соотношению. При этом члены с отрицательными индексами легко получить с помощью эквивалентной формулы «назад»: $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$:

n	…	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
F_n	…	−55	34	−21	13	−8	5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…

Легко заметить, что $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$.

Содержание

Происхождение

Формула Бине

Тождества

Свойства

Вариации и обобщения

В других областях
- В природе

См. также

Примечания

Литература

Ссылки

Происхождение

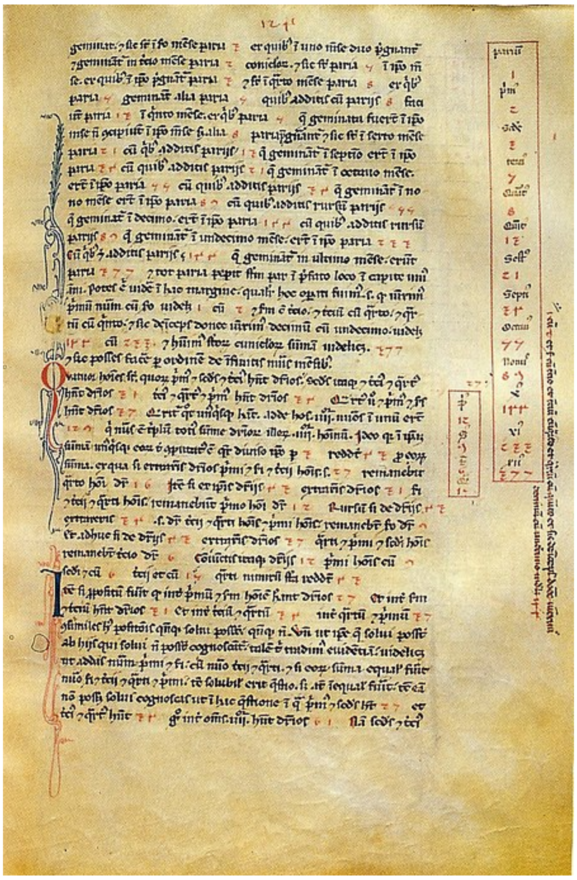
Последовательность Фибоначчи была хорошо известна в древней Индии, где она применялась в метрических науках (просодии, другими словами — стихосложении) намного раньше, чем стала известна в Европе.

Образец длиной n может быть построен путём добавления S к образцу длиной n-1, либо L к образцу длиной n-2; и просодицисты показали, что число образцов длиною n является суммой двух предыдущих чисел в последовательности. Дональд Кнут рассматривает этот эффект в книге «Искусство программирования».

На Западе эта последовательность была исследована Леонардо Пизанским, известным как Фибоначчи, в его труде «Liber Abaci» (1202). Он рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, предполагая, что: изначально есть новорождённая пара кроликов (самец и самка); со второго месяца после своего рождения кролики начинают спариваться и каждый месяц производить новую пару кроликов; кролики никогда не умирают. Сколько пар кроликов будет через год?

- В начале первого месяца есть только одна новорождённая пара (1).
- В конце первого месяца по-прежнему только одна пара кроликов, но уже спарившаяся (1)
- В конце второго месяца первая пара рождает новую пару и опять спаривается (2)
- В конце третьего месяца первая пара рождает ещё одну новую пару и спаривается, вторая пара только спаривается (3)
- В конце четвёртого месяца первая пара рождает ещё одну новую пару и спаривается, вторая пара рождает новую пару и спаривается, третья пара только спаривается (5)

В конце n-го месяца количество пар кроликов будет равно количеству пар в предыдущем месяце плюс количество новорождённых пар, которых будет столько же, сколько пар было два месяца назад. Таким образом: $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.



Страница *Книги абака* (лат. *Liber abaci*) Фибоначчи из Национальной центральной библиотеки Флоренции.
В правом блоке демонстрируется последовательность Фибоначчи.
Позиции от 0 до 12 обозначены тёмным цветом римскими цифрами, а значения красным цветом индо-арабскими цифрами

Формула Бине

Формула Бине выражает в явном виде значение F_n как функцию от n:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\varphi - (-\varphi)^{-1}} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{2\varphi - 1},$$

где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. При этом φ и $(-\varphi)^{-1} = 1 - \varphi$ являются корнями характеристического уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

Из формулы Бине следует, что для всех $n \geqslant 0$, F_n есть ближайшее к $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ целое число, то есть $F_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rceil$. В частности, при $n \to \infty$ справедлива асимптотика $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

Формула Бине может быть аналитически продолжена следующим образом:

$$F_z = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^z - \frac{\cos \pi z}{\varphi^z} \right).$$

При этом соотношение $F_{z+2} = F_{z+1} + F_z$ выполняется для любого комплексного числа z.

Тождества

- $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$
- $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ (см. рис.)
- $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$
- $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$
- $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$
- $F_{5n} = 25F_n^5 + 25(-1)^nF_n^3 + 5F_n$
- $F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$

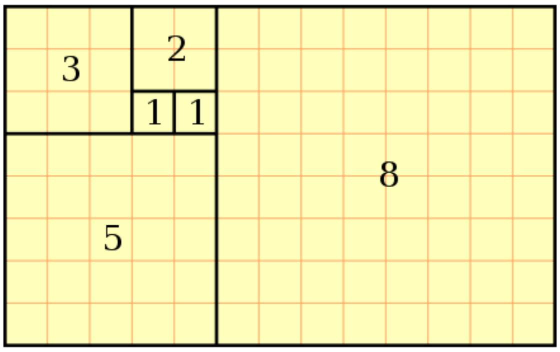


Иллюстрация формулы для суммы квадратов первых *n* чисел Фибоначчи[3].

И более общие формулы:

- $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} = F_{n+1}F_{m+1} - F_{n-1}F_{m-1}$
- $F_{(k+1)n} = F_{n-1}F_{kn} + F_nF_{kn+1}$
- $F_n = F_lF_{n-l+1} + F_{l-1}F_{n-l}$
- Числа Фибоначчи представляются значениями континуант на наборе единиц: $F_{n+1} = K_n(1,\dots,1)$, то есть

$$F_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а также}$$

$$F_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{pmatrix},$$

  где матрицы имеют размер $n \times n$, *i* — мнимая единица.

- Числа Фибоначчи можно выразить через многочлены Чебышёва:

$$F_{n+1} = (-i)^n U_n\left(\frac{-i}{2}\right),$$

$$F_{2n+2} = U_n\left(\frac{3}{2}\right).$$

- Для любого *n*,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

  - *Следствие*. Подсчёт определителей даёт

$$(-1)^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

- $F_{n+1} = \dfrac{F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2}$

Свойства

- Наибольший общий делитель двух чисел Фибоначчи равен числу Фибоначчи с индексом, равным наибольшему общему делителю индексов, то есть $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$. Следствия:
  - F_m делится на F_n тогда и только тогда, когда m делится на n (за исключением $n = 2$). В частности, F_m делится на $F_3 = 2$ (то есть является чётным) только для $m = 3k$; F_m делится на $F_4 = 3$ только для $m = 4k$; F_m делится на $F_5 = 5$ только для $m = 5k$ и т. д.
  - F_m может быть простым только для простых m (с единственным исключением $m = 4$). Например, число $F_{13} = 233$ простое, и его индекс 13 также прост. Обратное не верно, наименьший контрпример — $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$. Неизвестно, бесконечно ли множество чисел Фибоначчи, являющихся простыми.
- Последовательность чисел Фибоначчи является частным случаем возвратной последовательности, её характеристический многочлен $x^2 - x - 1$ имеет корни φ и $-\dfrac{1}{\varphi}$.
- Отношения $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ являются подходящими дробями золотого сечения ϕ и, в частности, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.
- Суммы биномиальных коэффициентов на диагоналях треугольника Паскаля являются числами Фибоначчи ввиду формулы

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

- В 1964 году Дж. Кон (*J. H. E. Cohn*) доказал,[4] что единственными точными квадратами среди чисел Фибоначчи являются числа Фибоначчи с индексами 0, 1, 2, 12:

$$F_0 = 0^2 = 0,\ F_1 = 1^2 = 1,\ F_2 = 1^2 = 1,\ F_{12} = 12^2 = 144.$$

- Производящей функцией последовательности чисел Фибоначчи является:

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

- Множество чисел Фибоначчи совпадает с множеством неотрицательных значений многочлена

$$z(x, y) = 2xy^4 + x^2y^3 - 2x^3y^2 - y^5 - x^4y + 2y,$$

на множестве неотрицательных целых чисел *x* и *y*.[5]

- Произведение и частное двух любых различных чисел Фибоначчи, отличных от единицы, никогда не является числом Фибоначчи.
- Период чисел Фибоначчи по модулю натурального числа *n* называется периодом Пизано и обозначается π(*n*). Периоды Пизано π(*n*) образуют последовательность:

  1, 3, 8, 6, 20, 24, 16, 12, 24, 60, 10, 24, 28, 48, 40, 24, 36, … (последовательность A001175 в OEIS)

  - В частности, последние цифры чисел Фибоначчи образуют периодическую последовательность с периодом π(10)=60, последняя пара цифр чисел Фибоначчи образует последовательность с периодом π(100)=300, последние три цифры — с периодом π(1000)=1500, последние четыре — с периодом π(10000)=15000, последние пять — с периодом π(100000)=150000 и т. д.
- Натуральное число *N* является числом Фибоначчи тогда и только тогда, когда $5N^2 + 4$ или $5N^2 - 4$ является квадратом.[6]
- Не существует арифметической прогрессии длиной больше 3, состоящей из чисел Фибоначчи.[7]
- Число Фибоначчи $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ равно количеству кортежей длины *n* из нулей и единиц, в которых нет двух соседних единиц. При этом F_{n+1} равно количеству таких кортежей, начинающихся с нуля, а F_n — начинающихся с единицы.
- Произведение любых n подряд идущих чисел Фибоначчи делится на произведение первых n чисел Фибоначчи.

- Число 0,112358132134… (после запятой записаны подряд идущие числа Фибоначчи) является иррациональным.

Вариации и обобщения

*Основная статья: **Обобщение чисел Фибоначчи***

- Числа трибоначчи
- Числа Фибоначчи являются частным случаем последовательностей Люка $F_n = U_n(1, -1)$.
  - При этом их дополнением являются числа Люка $L_n = V_n(1, -1)$.

В других областях

Существует мнение, что почти все утверждения, находящие числа Фибоначчи в природных и исторических явлениях, неверны — это распространённый миф, который часто оказывается неточной подгонкой под желаемый результат[8][9].

В природе

- Филлотаксис (листорасположение) у растений описывается последовательностью Фибоначчи. Семена подсолнуха, сосновые шишки, лепестки цветков, ячейки ананаса также располагаются согласно последовательности Фибоначчи[10][11][12][13]
- Длины фаланг пальцев человека относятся примерно как числа Фибоначчи[10][14].
- Раковины моллюсков, в частности Наутилуса, строятся по спирали, соотносящейся[*как?*] с рядом чисел Фибоначчи.

См. также

- Дерево Фибоначчи
- Метод Фибоначчи с запаздываниями
- Метод Фибоначчи поиска экстремума
- Фибоначчи
- Фибоначчиева система счисления
- Числа Бине
- Числа Леонардо
- Таблица Витхоффа
- Последовательность коров Нараяны
- Золотое сечение

Примечания

1. Т. В. Кропотова, В. Г. Подольский, П. Е. Кашаргин. ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ. Казанский федеральный университет институт физики
2. Числа Фибоначчи // Большая советская энциклопедия : [в 30 т.] / гл. ред. А. М. Прохоров. — 3-е изд. — М. : Советская энциклопедия, 1969—1978.
3. Фибоначчи числа // Энциклопедический словарь юного математика / Сост. Савин А. П.. — 2-е изд. — М.: Педагогика, 1989. — С. 312—314. — 352 с. — ISBN 5715502187.
4. *J H E Cohn*. Square Fibonacci Numbers Etc (http://math.la.asu.edu/~checkman/SquareFibonacci.html), стр. 109–113.
5. *P. Ribenboim.* The New Book of Prime Number Records (https://books.google.com/books?id=72eg8bFw40kC&pg=PA193). — Springer, 1996. — С. 193.
6. *Ira Gessel.* Problem H-187 // Fibonacci Quarterly. — 1972. — Т. 10. — С. 417–419.
7. *В. Серпинский.* Задача 66 // 250 задач по элементарной теории чисел (http://ilib.mccme.ru/djvu/serp-250-tch.htm). — М.: Просвещение, 1968. — 168 с.
8. Fibonacci Flim-Flam (http://www.lhup.edu/~dsimanek/pseudo/fibonacc.htm) Архивировано (https://www.webcitation.org/5nDtkyeKW?url=http://www.lhup.edu/~dsimanek/pseudo/fibonacc.htm) 1 февраля 2010 года. (англ.)
9. The Myth That Will Not Go Away (https://web.archive.org/web/20070523075937/http://www.maa.org/devlin/devlin_05_07.html) (англ.)
10. .Золотое сечение в природе (http://himekoscho.ucoz.ru/load/16-1-0-92)

11. Числа Фибоначчи (http://elementy.ru/trefil/21136)
12. Числа Фибоначчи (http://www.diary.ru/~Organon/p19280903.htm)
13. *Акимов О. Е.* Конец науки (http://sceptic-ratio.narod.ru/rep/kn15.htm#kn15g).
14. Г. Манукян. Поэзия чисел Фибоначчи (http://www.21mm.ru/item/291/)

Литература

- *Н. Н. Воробьёв.* Числа Фибоначчи (http://ilib.mccme.ru/plm/ann/a06.htm). — Наука, 1978. — Т. 39. — (Популярные лекции по математике).
- *А. И. Маркушевич.* Возвратные последовательности (http://ilib.mccme.ru/plm/ann/a01.htm). — Гос. Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1950. — Т. 1. — (Популярные лекции по математике).
- *А. Н. Рудаков.* Числа Фибоначчи и простота числа 2^{127}-1 (http://www.mccme.ru/free-books/matpros5.html) // Математическое Просвещение, третья серия. — 2000. — Т. 4.
- *Дональд Кнут.* Искусство программирования, том 1. Основные алгоритмы = The Art of Computer Programming, vol.1. Fundamental Algorithms. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2006. — С. 720. — ISBN 0-201-89683-4.
- *Дональд Кнут, Рональд Грэхем, Орен Паташник.* Конкретная математика. Основание информатики = Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. — М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006. — С. 703. — ISBN 5-94774-560-7.
- *Грант Аракелян.* Математика и история золотого сечения. — М.: Логос, 2014. — С. 404. — ISBN 978-5-98704-663-0.

Ссылки

- Первые 300 чисел Фибоначчи (http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibtable.html#100) (англ.).
- Числа Фибоначчи в природе (http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html) (англ.).

Источник — https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Числа_Фибоначчи&oldid=96603356