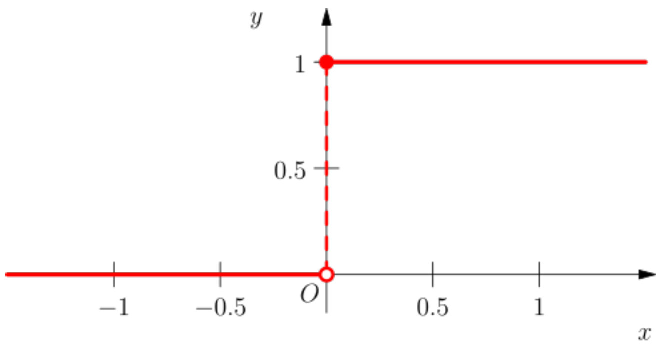
Википедия

Функция Хевисайда

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Фу́нкция Хевиса́йда (**едини́чная ступе́нчатая функция**, **функция едини́чного скачка**, **включённая едини́ца**, **«ступенька»**) — кусочно-постоянная функция, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице — для положительных[1]. В нуле эта функция, вообще говоря, не определена, однако её обычно доопределяют в этой точке некоторым числом, чтобы область определения функции содержала все точки действительной оси. Чаще всего неважно, какое значение функция принимает в нуле, поэтому могут использоваться различные определения функции Хевисайда, удобные по тем или иным соображениям, например:



Единичная функция Хевисайда. При $x = 0$ доопределена значением 1.

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Функцию Хевисайда легко записать, используя скобку Айверсона:

$$\theta(x) = [\,x \geqslant 0\,].$$

Функция Хевисайда широко используется в математическом аппарате теории управления и теории обработки сигналов для представления сигналов, переходящих в определённый момент времени из одного состояния в другое. В математической статистике эта функция применяется, например, для записи эмпирической функции распределения. Названа в честь Оливера Хевисайда.

Функция Хевисайда является первообразной функцией для дельта-функции Дирака, $\theta' = \delta$, это также можно записать как:

$$\theta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt.$$

Содержание

Дискретная форма
Аналитические формы
Запись
θ(0)
Преобразование Фурье

История
См. также
Примечания

Дискретная форма

Можно определить дискретную функцию Хевисайда как функцию от целого аргумента n:

$$\theta[n] = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geqslant 0, \end{cases}$$

где n — целое число.

Дискретный единичный импульс является первой разностью дискретной функции Хевисайда:

$$\delta[n] = \theta[n] - \theta[n-1].$$

Аналитические формы

Для более удобного использования функцию Хевисайда можно аппроксимировать с помощью непрерывной функции:

$$\theta(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{th} kx = \frac{1}{1+e^{-2kx}},$$

где большему k соответствует более крутой подъём функции в точке $x = 0$. Задавшись необходимой шириной области перехода функции Хевисайда Δx, значение k можно оценить как $k \approx \frac{10}{\Delta x}$.

Если принять $\theta(0) = 1/2$, уравнение можно записать в предельной форме:

$$\theta(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}(1 + \operatorname{th} kx) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+e^{-2kx}}.$$

Существует несколько других аппроксимаций непрерывными функциями:

$$\theta(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} kx\right);$$
$$\theta(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf} kx\right).$$

Запись

Часто используется и бывает полезной интегральная форма записи единичной функции:

$$\theta(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau + i\varepsilon} e^{-ix\tau}\, d\tau.$$

θ(0)

Значение функции в нуле часто задаётся как $\theta(0) = 0$, $\theta(0) = 1/2$ или $\theta(0) = 1$. $\theta(0) = 1/2$ — наиболее употребительный вариант, поскольку по соображениям симметрии в точке разрыва первого рода удобно доопределять функцию средним арифметическим соответствующих односторонних пределов, кроме того в этом случае функция Хевисайда связана с функцией знака:

$$\theta(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Значение в нуле может явно указываться в записи функции:

$$\theta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ n, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Преобразование Фурье

Производная функции Хевисайда равна дельта-функции (то есть функция Хевисайда — первообразная дельта-функции):

$$\theta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt.$$

Следовательно, применив преобразование Фурье к первообразной дельта-функции $\theta(t)$, получим её изображение вида:

$$\frac{1}{2\pi i\omega} + \frac{1}{2}\delta(\omega),$$

то есть:

$$\theta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i\omega} + \frac{1}{2}\delta(\omega)\right) e^{i\omega t}\,d\omega$$

(второй член — соответствующий нулевой частоте в разложении — описывает постоянное смещение функции Хевисайда вверх; без него получилась бы нечётная функция).

История

Эта функция использовалась ещё до появления её удобного обозначения. Например, Гульельмо Либри в 1830-х годах опубликовал несколько работ[2][3], посвящённых функции 0^{0^x}. По его мнению, 0^x равен 0, если $x > 0$; 1, если $x = 0$ (см. Ноль в нулевой степени); или ∞, если $x < 0$. Таким образом Либри заключает, что 0^{0^x} равняется 1, если $x > 0$, и 0 в противном случае. Пользуясь нотацией Айверсона, это можно было бы записать, как

$$0^{0^x} = [\,x > 0\,].$$

Однако такой нотации в то время не было, и Либри считал достижением, что эту функцию можно выразить через стандартные математические операции. Он использовал эту функцию для выражения абсолютной величины (обозначения $|x|$ тогда ещё не было, оно было введено позже Вейерштрассом) и индикатора таких условий, как $a \leq x \leq b$, и даже «x является делителем y»[4].

См. также

- Прямоугольная функция
- Дельта-функция
- Переходная функция
- Интеграл Дюамеля

Примечания

1. В теории автоматического управления и теории операторов Лапласа часто обозначается как $\eta(x)$. В англоязычной литературе часто обозначают $H(x)$ или $1(x)$. См., например,
   - *Волков И. К., Канатников А. Н.* Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 228 с. — (Математика в техническом университете; Вып. XI). — ISBN 5-7038-1273-9.;
   - *Методы* классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 656 с. — ISBN 5-7038-2189-4 (Т. 1).
2. *Guillaume Libri*. Note sur les valeurs de la fonction 0^{0^x}, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **6** (1830), 67-72.
3. *Guillaume Libri*. Mémoire sur les fonctions discontinues, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **10** (1833), 303—316.
4. Donald E. Knuth, Two notes on notation, *Amer. Math. Monthly* **99** no. 5 (May 1992), 403—422 (arXiv: math/9205211 [math.HO] (https://arxiv.org/abs/math/9205211)).

Источник — https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Функция_Хевисайда&oldid=108688629

Эта страница в последний раз была отредактирована 12 августа 2020 в 08:52.

Текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike; в отдельных случаях могут действовать дополнительные условия.
Wikipedia® — зарегистрированный товарный знак некоммерческой организации Wikimedia Foundation, Inc.