ВикипедиЯ

Гиперболические функции

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Гиперболи́ческие фу́нкции — семейство элементарных функций, выражающихся через экспоненту и тесно связанных с тригонометрическими функциями.

Содержание

Определение
- Геометрическое определение

Свойства
- Связь с тригонометрическими функциями
- Важные соотношения
- Неравенства
- Разложение в степенные ряды
- Графики
- Аналитические свойства

Обратные гиперболические функции
- Графики

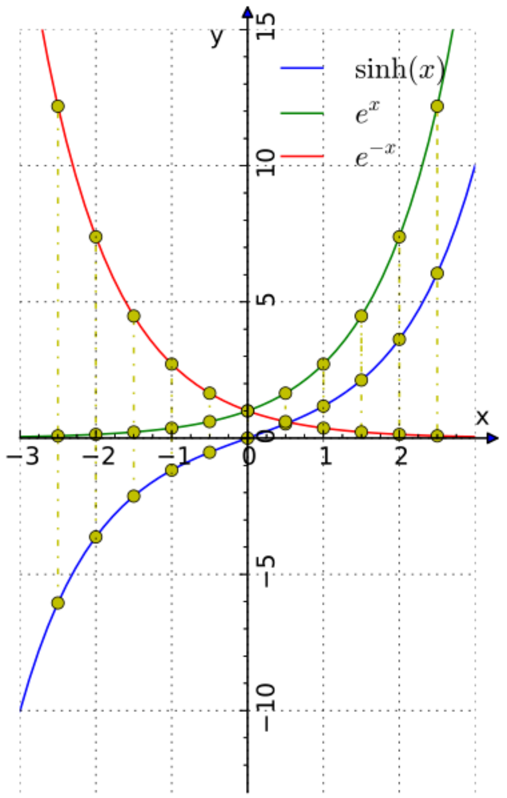
История

Применение

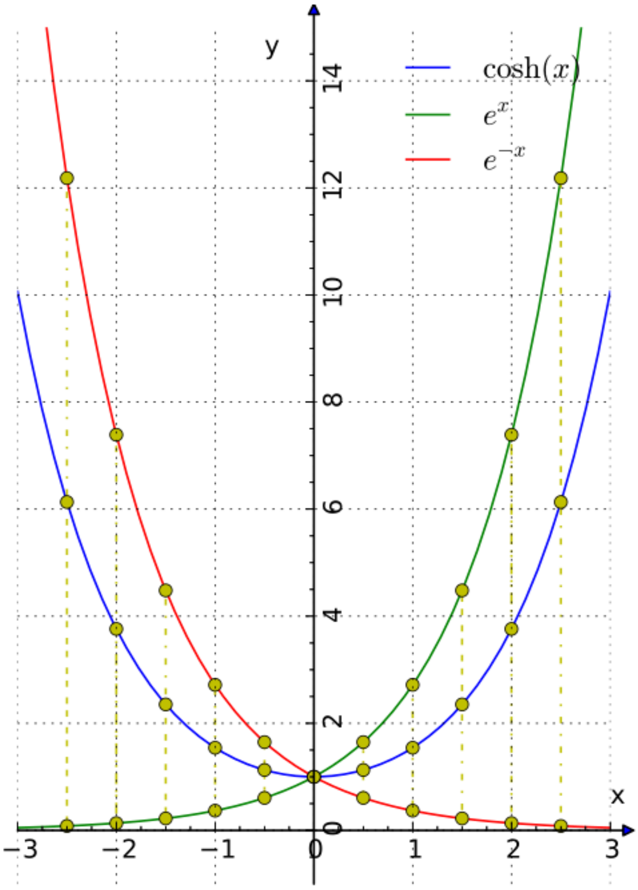
Литература

Ссылки

Определение



$\operatorname{sh} x$



$\operatorname{ch} x$

Гиперболические функции задаются следующими формулами:

- **гиперболический синус**:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(в англоязычной литературе обозначается $\sinh x$)

- **гиперболический косинус**:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(в англоязычной литературе обозначается $\cosh x$)

- **гиперболический тангенс**:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

(в англоязычной литературе обозначается $\tanh x$)

- **гиперболический котангенс**:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

(в англоязычной литературе обозначается $\coth x$)

- **гиперболический секанс**:

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

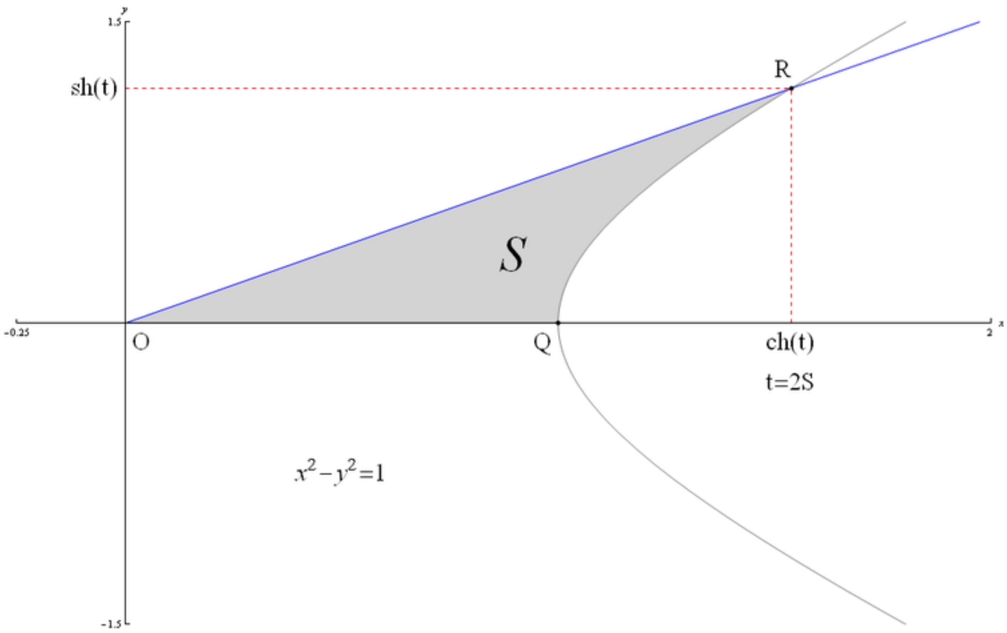
Гиперболический секанс иногда также обозначается как $\operatorname{sech} x$.

- **гиперболический косеканс**:

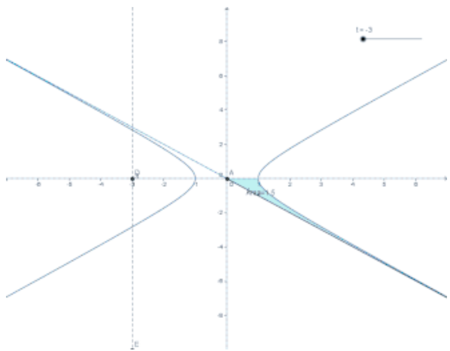
$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Геометрическое определение

Ввиду соотношения $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ гиперболические функции дают параметрическое представление гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ ($x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t$). При этом аргумент $t = 2S$, где S — площадь криволинейного треугольника OQR, взятая со знаком «+», если сектор лежит выше оси OX, и «−» в противоположном случае. Очевидно, что и гиперболические функции определяются через этот параметр, например, уравнения гиперболического синуса в параметрической форме: $x = t, y = f(t)$, где $f(t)$ — ордината точки гиперболы, соответствующей площади $t = 2S$. Это определение аналогично определению тригонометрических функций через единичную окружность, которое тоже можно построить подобным образом.



Определение гиперболических функций через гиперболу


Параметризация гиперболического синуса (анимация).

Свойства

Связь с тригонометрическими функциями

Гиперболические функции выражаются через тригонометрические функции от мнимого аргумента.

$$\operatorname{sh} x = -i \sin(ix), \quad \operatorname{ch} x = \cos(ix), \quad \operatorname{th} x = -i \operatorname{tg}(ix).$$

$$\operatorname{sh}(ix) = i \sin x, \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos x, \quad \operatorname{th}(ix) = i \operatorname{tg} x.$$

Функция Гудермана связывает тригонометрические функции и гиперболические функции без привлечения комплексных чисел.

Важные соотношения

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

Доказательство

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-}}{}$$

1. Чётность/нечётность:
   1. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$
   2. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x.$
   3. $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$
   4. $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x.$
   5. $\operatorname{sch}(-x) = \operatorname{sch} x.$
   6. $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x.$
2. Формулы сложения:
   1. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \ \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \ \operatorname{ch} x.$
   2. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \ \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \ \operatorname{sh} x.$
   3. $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \ \operatorname{th} y}.$
   4. $\operatorname{cth}(x \pm y) = \dfrac{1 \pm \operatorname{cth} x \ \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$

3. Формулы двойного угла:
   1. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \ \operatorname{sh} x = \dfrac{2\ \operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x}.$
   2. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{1+\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x}.$
   3. $\operatorname{th} 2x = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}.$
   4. $\operatorname{cth} 2x = \dfrac{1}{2}(\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x).$
   5. $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\operatorname{sh} 2x} = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{1+\operatorname{ch} 2x}.$
   6. $\operatorname{ch} 2x \pm \operatorname{sh} 2x = (\operatorname{sh} x \pm \operatorname{ch} x)^2.$
4. Формулы кратных углов:
   1. $\operatorname{sh} 3x = 4\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{sh} x.$
   2. $\operatorname{ch} 3x = 4\operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch} x.$
   3. $\operatorname{th} 3x = \operatorname{th} x \dfrac{3+\operatorname{th}^2 x}{1+3\operatorname{th}^2 x}.$
   4. $\operatorname{sh} 5x = 16\operatorname{sh}^5 x + 20\operatorname{sh}^3 x + 5\operatorname{sh} x.$
   5. $\operatorname{ch} 5x = 16\operatorname{ch}^5 x - 20\operatorname{ch}^3 x + 5\operatorname{ch} x.$
   6. $\operatorname{th} 5x = \operatorname{th} x \dfrac{\operatorname{th}^4 x + 10\operatorname{th}^2 x + 5}{5\operatorname{th}^4 x + 10\operatorname{th}^2 x + 1}.$
5. Произведения:
   1. $\operatorname{sh} x \ \operatorname{sh} y = \dfrac{\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)}{2}.$
   2. $\operatorname{sh} x \ \operatorname{ch} y = \dfrac{\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)}{2}.$
   3. $\operatorname{ch} x \ \operatorname{ch} y = \dfrac{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)}{2}.$
   4. $\operatorname{th} x \ \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)}{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)}.$
6. Суммы:
   1. $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh} \dfrac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x \mp y}{2}.$
   2. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2\operatorname{ch} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x-y}{2}.$
   3. $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2\operatorname{sh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sh} \dfrac{x-y}{2}.$
   4. $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \ \operatorname{ch} y}.$
7. Формулы понижения степени:

1. $\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}.$
2. $\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}.$

8. Производные:

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Примечание
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	**Доказательство** $(sh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2} \cdot e^x - e^{-x} \cdot (-1) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	**Доказательство** $(ch(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2} \cdot e^x + e^{-x} \cdot (-1) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	**Доказательство** $(th(x))' = \left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)' = \frac{(sh(x))' \cdot ch(x) - sh(x) \cdot (ch(x))'}{ch^2(x)} = \frac{ch(x) \cdot ch(x) -}{ch^2(}$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	**Доказательство** $(cthx)' = \left(\frac{ch(x)}{sh(x)}\right)' = \frac{(ch(x))' \cdot sh(x) - ch(x) \cdot (sh(x))'}{sh^2(x)} = \frac{sh(x) \cdot sh(x) - c}{sh^2(x}$
$\operatorname{sch} x$	$-\frac{sh(x)}{ch^2(x)}$	**Доказательство** $(sch(x))' = \left(\frac{1}{ch(x)}\right)' = \frac{(1)' \cdot ch(x) - 1 \cdot (ch(x))'}{ch^2(x)} = -\frac{sh(x)}{ch^2(x)}$
$\operatorname{csch} x$	$-\frac{ch(x)}{sh^2(x)}$	**Доказательство** $(csch(x))' = \left(\frac{1}{sh(x)}\right)' = \frac{(1)' \cdot sh(x) - 1 \cdot (sh(x))'}{sh^2(x)} = -\frac{ch(x)}{sh^2(x)}$

1. Интегралы:

См. также: ***Список интегралов от гиперболических функций***, ***Список интегралов от обратных гиперболических функций***

1. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$
2. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$

3. $\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x + C.$
4. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \operatorname{th} x + C.$
5. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\operatorname{cth} x + C.$
6. $\operatorname{sh} x = \int\limits_0^x \operatorname{ch} t dt.$
7. $\operatorname{ch} x = 1 + \int\limits_0^x \operatorname{sh} t dt.$
8. $\operatorname{th} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t}.$

2. Представление через гиперболический тангенс половинного угла:
   1. $\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$
   2. $\operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$
   3. $\operatorname{th} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$
   4. $\operatorname{cth} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}$
   5. $\operatorname{sch} x = \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$
   6. $\operatorname{csch} x = \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}$

Неравенства

Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется:

1. $0 \leq \operatorname{ch} x - 1 \leq |\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x$
2. $|\operatorname{th} x| < 1$

Разложение в степенные ряды

$$\operatorname{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{ch}\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

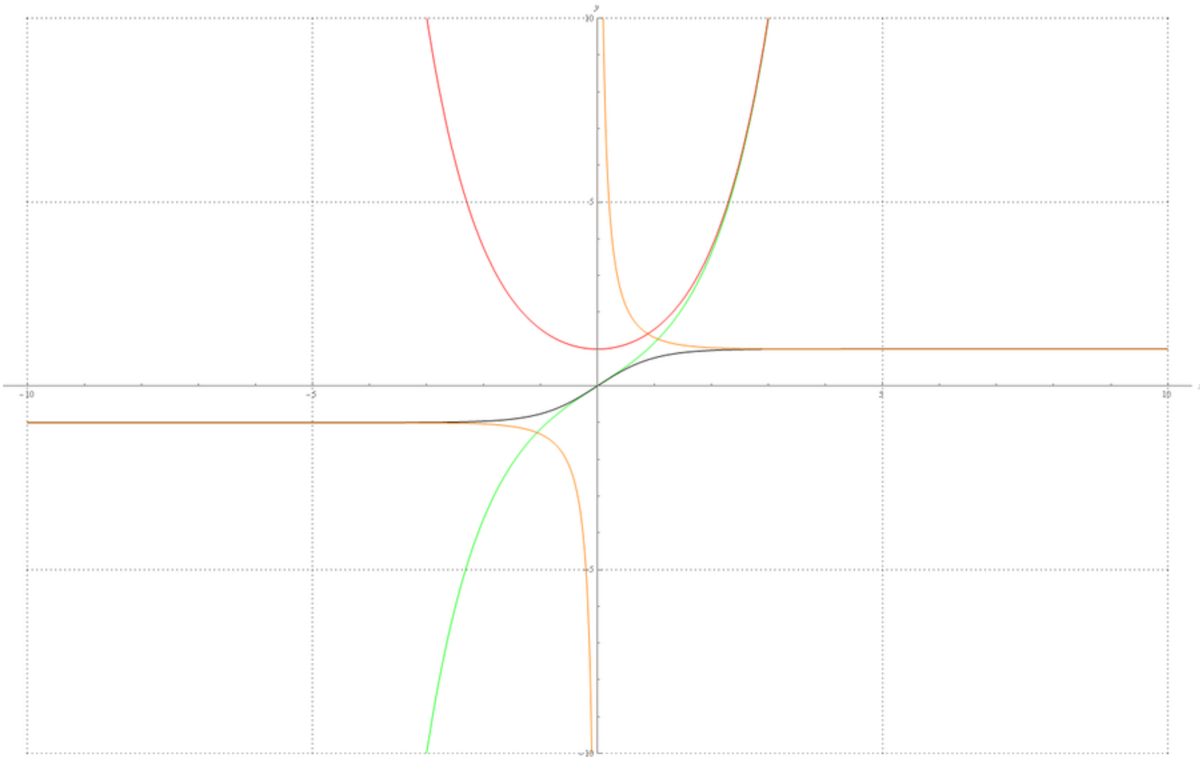
$$\mathrm{th}\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{cth}\ x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \ldots = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}, \quad 0 < |x| < \pi$$ (Ряд Лорана)

$$\mathrm{sch}\ x = \frac{1}{\mathrm{ch}\ x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}\,x^{2n}}{(2n)!}$$

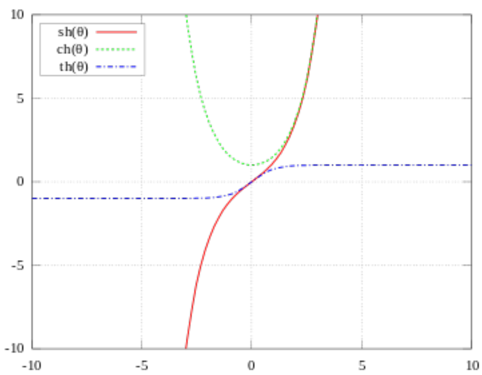
Здесь B_{2n} — числа Бернулли, E_{2n} — числа Эйлера.

Графики



sh(x), ch(x), th(x), cth(x)

Аналитические свойства

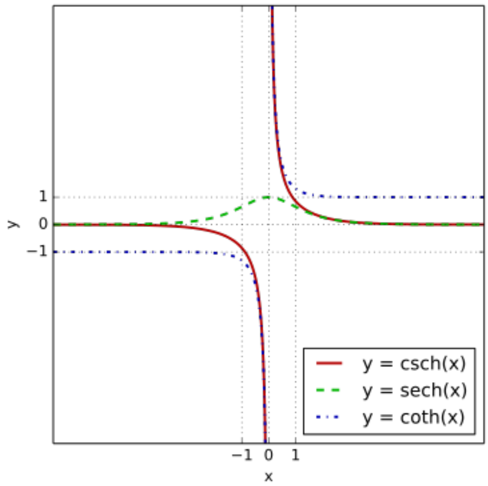


sh, ch и th

Гиперболический синус и гиперболический косинус аналитичны во всей комплексной плоскости, за исключением существенно особой точки на бесконечности. Гиперболический тангенс аналитичен везде, кроме полюсов в точках $z = i\pi(n + 1/2)$, где n — целое. Вычеты во всех этих полюсах равны единице. Гиперболический котангенс аналитичен везде, кроме точек $z = i\pi n$, вычеты его в этих полюсах также равны единице.

Обратные гиперболические функции

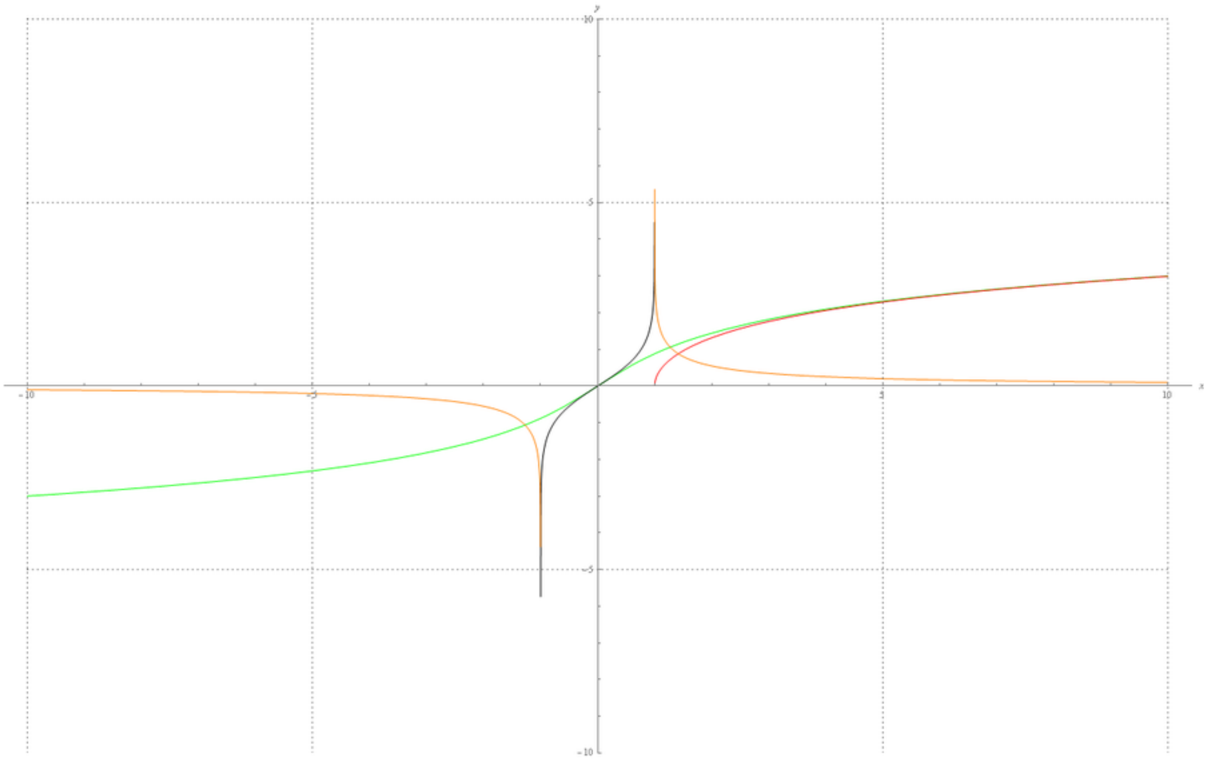
Иначе называются ареа-функциями: к названиям соответствующих гиперболических функций добавляется префикс «ареа-» — от лат. *«area»* — «площадь». Главные значения ареа-функций определяются следующими выражениями.



csch, sech и cth

- $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ — обратный гиперболический синус, ареа-синус.
- $\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right); x \geq 1$ — обратный гиперболический косинус, ареа-косинус.
- $\operatorname{arth} x = \ln \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}; |x| < 1$ — обратный гиперболический тангенс, ареа-тангенс.
- $\operatorname{arcth} x = \ln \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}; |x| > 1$ — обратный гиперболический котангенс, ареа-котангенс.
- $\operatorname{arsch} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}; 0 < x \leq 1$ — обратный гиперболический секанс, ареа-секанс. Заметим, что решение $y = -\ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$ также удовлетворяет уравнению $\operatorname{sch} y = x$, однако главные значения ареа-функций являются однозначными функциями.
- $\operatorname{arcsch} x = \ln \frac{1 + \operatorname{sgn} x \sqrt{1 + x^2}}{x} = \begin{cases} \ln \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{x}, & x < 0 \\ \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}, & x > 0 \end{cases}$ — обратный гиперболический косеканс, ареа-косеканс.

Графики



arsh(x), arch(x), arth(x), arcth(x)

Связь между некоторыми обратными гиперболическими и обратными тригонометрическими функциями:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Arsh} x = -i \operatorname{Arcsin}(-ix),\\
&\operatorname{Arsh}(ix) = i \operatorname{Arcsin} x,\\
&\operatorname{Arcsin} x = -i \operatorname{Arsh}(ix),\\
&\operatorname{Arcsin}(ix) = -i \operatorname{Arsh}(-x),\\
&\operatorname{Arccos}\ x = -i\ \operatorname{Arch}\ x,
\end{aligned}$$

где i — мнимая единица.

Эти функции имеют следующее разложение в ряд:

$$\operatorname{arsh} x = x - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^5}{5} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(2x) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^{-2}}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^{-4}}{4} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^{-6}}{6} + \ldots\right) = \ln(2x) - \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg($$

$$\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

В зарубежной литературе обратные гиперболические функции часто обозначают посредством знака минус первой степени: например, $\operatorname{Arth}\ x$ пишут как $\tanh^{-1} x$ (причём $(\tanh\ x)^{-1}$ обозначает другую функцию — $\operatorname{cth}\ x$), и т. д.

История

Первое появление гиперболических функций историки обнаружили в трудах английского математика Абрахама де Муавра (1707, 1722). Современное определение и обстоятельное их исследование выполнил Винченцо Риккати в 1757 году («Opusculorum», том I), он же предложил их обозначения: sh , ch. Риккати исходил из рассмотрения единичной гиперболы (см. рисунок в разделе #Определение).

Независимое открытие и дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено Иоганном Ламбертом (1768), который установил широкий параллелизм формул обычной и гиперболической тригонометрии. Н. И. Лобачевский впоследствии использовал этот параллелизм, пытаясь доказать непротиворечивость неевклидовой геометрии, в которой круговая тригонометрия заменяется на гиперболическую.

В обозначениях гиперболических функций утвердился некоторый разнобой. Например, в Энциклопедии Брокгауза и Эфрона используются обозначения sinhyp, coshyp, в русскоязычной литературе закрепились обозначения sh, ch, в англоязычной закрепились $\mathrm{sinh}, \mathrm{cosh}$.

Применение

Гиперболические функции часто встречаются при вычислении различных интегралов. Некоторые интегралы от рациональных функций и от функций, содержащих радикалы, довольно просто вычисляются с помощью замен переменных с использованием гиперболических функций.

Аналогично тому, как матрицы вида $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ описывают повороты двумерного евклидова пространства, матрицы $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\ x & \mathrm{sh}\ x \\ \mathrm{sh}\ x & \mathrm{ch}\ x \end{pmatrix}$ описывают повороты в простейшем двумерном пространстве Минковского. В связи с этим гиперболические функции часто встречаются в теории относительности.

Однородная веревка или цепочка, свободно подвешенная за свои концы, приобретает форму графика функции $y = a\ \mathrm{ch}\ \frac{x}{a}$ (в связи с чем график гиперболического косинуса иногда называют *цепной линией*). Это обстоятельство используется при проектировании арок, поскольку форма арки в виде перевёрнутой цепной линии наиболее эффективно распределяет нагрузку.

Литература

- *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — Москва: Наука, 1985. — С. 464.
- *Шерватов В. Г.* Гиперболические функции.. — Гостехиздат, 1954. — 58 с. — (Популярные лекции по математике). — 25 000 экз.
- *А. Р. Янпольский.* Гиперболические функции. — Москва, 1960. — 195 с.

Ссылки

- GonioLab (https://web.archive.org/web/20071006172054/http://glab.trixon.se/): Интерактивная демонстрация тригонометрических и гиперболических функций на Java Web Start
- БСЭ: Знаки математические (http://www.oval.ru/enc/27971.html)
- Обратные тригонометрические и гиперболические функции (англ.) (https://web.archive.org/web/20080416042111/http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/Com

plexFunTrigInverseMod.html)

Источник — https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Гиперболические_функции&oldid=109371153