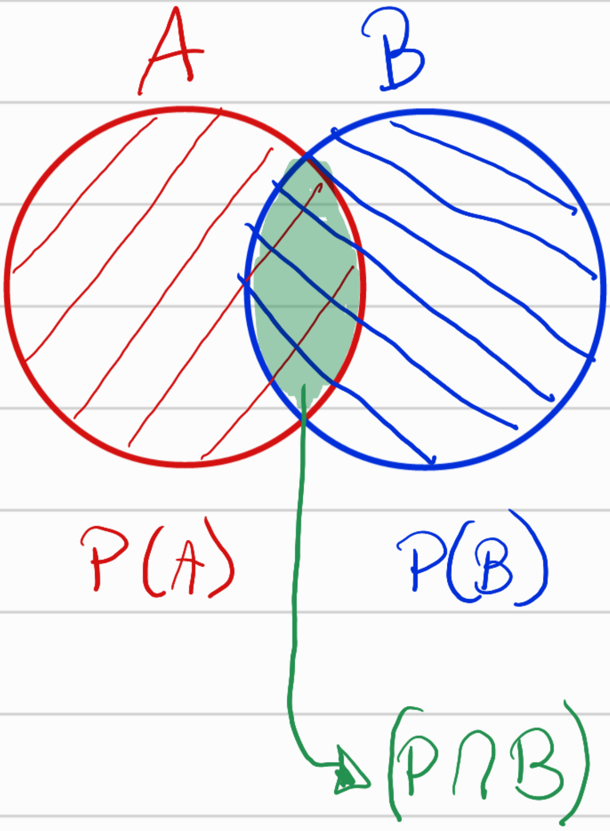
Teorema de Bayes

Para saber se será necessário utilizar a fórmula da probabilidade da união de dois eventos para a resolução de um exercício, é a presença do conectivo OR.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P \cap B$$

A fórmula subtrai $P(A \cap B)$ porque ao somar $P(A)$ e $P(B)$, a intersecção é contada duas vezes (uma vez para $P(A)$ e outra para $P(B)$, tornando necessário a subtração para correção da contagem.

Exemplo 1: com o lançamento de um dado

No exemplo, temos um dado com os seguintes números de elementos do espaço amostral $n(S)$ para o evento: :

$n(S) = 6$

A = O número 2, 3 ou 4 sair $(A = \{2,3,4\})$

ou

B = Um número par sair $(B = \{2,4,6\})$

C = Um número ímpar sair $(C = \{1,3,5\})$

ou

Determinando $P(A \cup B)$ e $P(A \cup C)$

a) $P(A \cup B)$

$A = \{2,3,4\}$

$B = \{2,4,6\}$

$A \cap B = \{2,4\}$ (ambos pertencem para A e B)

Aplicando a formula da união de dois eventos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A) = 3/6$, já que o evento A contém 3 resultados ({2,3,4}) em um total de 6 possíveis
$P(B) = 3/6$, já que o evento A contém 3 resultados ({2,4,6})
$P(A \cap B) = 2/6$ já que a intersecção $A \cap B$ contém 2 resultados ({2,4}).

Substituindo na fórmula:

$$P(A \cup B) = 3/6 + 3/6 - 2/6 = 4/6 = 2/3$$

b) $P(A \cup C)$

$A = \{2,3,4\}$
$C = \{1,3,5\}$
$A \cap B = \{3\}$ (3 pertencem para A e C)

fórmula da união de dois eventos

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

$P(A)$ = como no exemplo anterior

$P(C) = 3/6$, já que o evento C contém 3 resultados ($\{1, 3, 5\}$).

$P(A \cap C) = 1/6$, já que a intersecção contém 1 resultado ($\{3\}$).

Substituindo na fórmula:

$$P(A \cup C) = 3/6 + 3/6 - 1/6 = 5/6$$

Conclusão:

A probabilidade de sair um número que esteja no evento A ou B ($P(A \cup B)$) $= 2/3$

A probabilidade de sair um número que esteja no evento A ou C ($P(A \cup C)$) $= 5/6$

Exemplo 2: No lançamento de duas moedas temos:

A: Uma cara

B = Duas coroas

Qual a probabilidade de sair duas coroas <u>ou</u> uma cara?

Quando lançamos duas moedas, o espaço amostral (Ω) é composto pelos seguintes resultados possíveis:

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$$

CC: representa cara em ambas moedas

CK: representa cara na primeira moeda e coroa na segunda

KC: representa coroa na primeira moeda e cara na segunda

KK: representa coroa em ambas moedas.

Portanto, existem 4 resultados possíveis.

1) Definição dos eventos

Evento A (sair uma cara): Os resultados que satisfazem essa condição são CK e KC.

Assim: $A = \{CK, KC\}$.

Evento B (sair duas coroas): O resultado que satisfaz essa condição é KK.

Assim: $B = \{KK\}$

Calculo da probabilidade de $A \cup B$

Queremos encontrar qual a probabilidade de sair uma cara e duas coroas, então:

formula da união de dois eventos

$$P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

P(A): Existem dois resultados favoráveis para o evento A, então:

$P(A) : 2/4 = 1/2$

$P(B)$: Existe apenas um resultado favorável para o evento B, então:

$P(B) : 1/4$

$P(A \cap B)$ = Essa intersecção é o conjunto vazio ($\emptyset$), já que não há resultados em comum entre uma cara e duas coroas, então:

$P(A \cap B) = \emptyset$

Substituindo na fórmula:

$P(A \cup B) = 2/4 + 1/4 - 0 = 3/4$

Portanto, a probabilidade de ocorrer uma cara <u>ou</u> duas coroas no lançamento de duas moedas é 3/4 ou 75%.

Exemplo 3: Probabilidade do complemento.

Evento A: O evento sair pelo menos um 6 em 10 lançamentos de um dado.
Complemento (A^c): é não sair nenhum 6 em 10 lançamentos de um dado.

Resolvendo:

a. Se lançarmos o dado uma vez, a probabilidade de não sair um 6 é $5/6$.

b. Como os lançamentos são independentes, a probabilidade de não sair um 6 em 10 lançamentos consecutivos é:

$$P(A^c) = \left(5/6\right)^{10}$$

Probabilidade de sair pelo menos um 6:
Usamos a probabilidade do complemento, onde:

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Calculando:

$$P(A^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,1615$$

$$P(A) = 1 - 0,1615 = 0.8385$$

Portanto, a probabilidade de sair pelo menos um 6 em 10 lançamentos de um dado é aproximadamente 0,8385, ou seja, 83,85%

Exemplo 4: Probabilidade Condicional

Queremos determinar a probabilidade de o número sorteado ser 9, dado que sabemos que o número é ímpar.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

$P(A|B)$ = probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B já ocorreu.

$P(A \cap B)$ = probabilidade de ocorrer tanto A quanto B.

$P(B)$ = probabilidade do evento B ocorrer.

Eventos:

A: o número sorteado é 9.

B: o número sorteado é ímpar

Determinar $P(B)$:

Os números inteiros são: $\{1, 2, 3, ..., 15\}$, desse, os números ímpares são: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

Portanto, temos 8 números ímpares, sendo a probabilidade de o número sorteado ser ímpar:

$$P(B) = 8/15$$

Determinar $P(A \cap B)$:

Como o número 9 é ímpar, o evento $A \cap B$ corresponde ao evento sair o número 9 que é um dos 8 números ímpares possíveis, portanto:

$$P(A \cap B) = 1/15$$

Aplicando a formula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/15}{8/15} = 0{,}125$$

Portanto, a probabilidade de um número sorteado ser 9, dado que é impar é 0,125 ou 12,5%

Exemplo 5: Probabilidade Condicional
A ideia é retirar uma carta que seja simultâneamente de copas e um ás de um baralho.

Formula da probabilidade de Intersecção de dois eventos:

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$$

$P(A \cap B)$ = probabilidade de ocorrer os dois eventos simultaneamente

$P(B)$ = probabilidade do evento B ocorrer

$P(A|B)$ = probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B já ocorreu.

Eventos:

A: retirar a carta copas do baralho

B: retirar um ás do baralho

Determinar $P(B)$:

Em um baralho padrão existem 52 cartas, sendo 4 ases (um de cada naipe: copas, ouro, espada e paus) portanto, a probabilidade de retirar um ás é:

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Determinar $P(A|B)$:

Sabemos que já retiramos um ás (evento B ocorreu) e há exatamente 1 ás de copas no baralho, como são 4 no total, a probabilidade de que o ás seja de copas é:

$$P(A|B) = 1/4$$

Aplicando a formula

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{13} * \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$$

Portanto, a probabilidade de retirar uma carta que seja simultâneamente de copas e um ás é $1/52$.

Exemplo 6: Independência de eventos

Dois eventos A e B são independentes se:

$$P(A|B) = P(A) \quad e \quad P(A|B) = P(B)$$

ou seja, a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade do outro, nesse caso, o teorema do produto para dois eventos independentes é:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Dados do problema:

Probabilidade de uma pessoa ser do tipo sanguíneo $O = P(O) = 40\% = 0,4$

Probabilidade de uma pessoa ser do tipo sanguíneo $A = P(A) = 30\% = 0,30$

Probabilidade de uma pessoa ser do tipo sanguíneo $B = P(B) = 20\% = 0,20$

Probabilidade de uma pessoa ser RH^+: $P(RH^+) = 90\% = 0,90$

Probabilidade de uma pessoa ser RH^-: $P(RH^-) = 1 - P(RH^+) = 10\% = 0,10$

É dito que o fator RH é independente do tipo sanguíneo, então podemos usar o teorema do produto para eventos independentes.

Tipo sanguíneo O e RH^+:

$$P(O \cap RH^+) = P(O)\,P(RH^+)$$
$$P(O \cap RH^+) = 0{,}40 * 0{,}90 = 0{,}36$$

Então, a probabilidade de uma pessoa do tipo O ser RH^+ é 36%.

Tipo sanguíneo AB e RH^-:

Não temos a informação de uma pessoa do tipo sanguíneo AB, mas podemos deduzir, já que os tipos sanguíneos somam 100%, sabemos que:

$$P(AB) = 1 - P(O) - P(A) - P(B)$$

então:

$$P(AB) = 1 - 0{,}40 - 0{,}30 - 0{,}20 = 0{,}10$$

ou seja, a probabilidade de uma pessoa ser do tipo sanguíneo AB = 0,10

Tipo sanguíneo AB e RH⁻:

Como o fator RH é independente do tipo sanguíneo, a probabilidade de ser do tipo AB e RH- é o produto dessas probabilidades

$$P(AB \cap RH-) = P(AB)\,P(RH-)$$
$$P(AB \cap RH-) = 0{,}10 * 0{,}10 = 0{,}01$$

Aplicando a formula da união

$$P(AB \cup RH-) = P(AB) + P(RH-) - P(AB \cap RH-)$$
$$P(AB \cup RH-) = 0{,}10 + 0{,}10 - 0{,}01 = 0{,}19$$

Portanto:

A: a probabilidade de uma pessoa ser do tipo sanguíneo O e $RH^+ = 36\%$

B: a probabilidade de uma pessoa ser do tipo sanguíneo AB e $RH^- = 19\%$

Exercício 7: Teorema da Probabilidade Total

Entendendo:

A máquina 1 é responsável por 75% da produção total de bolos:

$$P(M_1) = 0{,}75$$

Dos bolos produzidos pela M_1, 20% são azuis:

$$P(Azul \mid M_1) = 0{,}20$$

A M_2 é responsável por 25% da produção total de bolos:

$$P(M_2) = 0{,}25$$

Dos bolos produzidos pela M_2, 30% são azuis:

$$P(Azul \mid M_2) = 0{,}30$$

A: Probabilidade de um bolo azul ser produzido.

Regra da Soma Total

$P(Azul) = P(M_1) * P(Azul \mid M_1) + P(M_2) * P(Azul \mid M_2)$

então:

$P(Azul) = (0,75 * 0,20) + (0,25 * 0,30)$

$P(Azul) = 0.15 + 0,075$

$P(Azul) = 0,225$ //

Então, a probabilidade de ser produzido uma bola Azul = 22,5% //

B: Probabilidade da bola azul ser produzida pela máquina 1:

A resposta pode ser encontrada utilizando o Teorema de Bayes

$$P(M_1 \mid Azul) = \frac{P(Azul \mid M_1) * P(M_1)}{P(Azul)}$$

então:

$$P(M_1 \mid Azul) = \frac{0,20 * 0,75}{0,225}$$

$$P(M_1 \mid Azul) = \frac{0,15}{0,225}$$

$$P(M_1 \mid Azul) = \frac{2}{3}$$ //

Conclusão:

A probabilidade de uma bola azul ser produzida é 22,5%. Já a probabilidade de uma bola azul ter sido feita na M_1, dado que sabemos que a bola é azul é 66,67%.