
CHAPITRE 5 : L'ANALYSE DE BOX & JENKINS

SECTION 1 : APPROCHE ÉCONOMIQUE DES SÉRIES TEMPORELLES

L'étude des séries temporelles est l'étude de l'évolution d'une variable aléatoire (ou processus aléatoire) qui a pour principal objectif de faciliter l'élaboration de prévisions **conjoncturelles** (le court ou le très court terme).

1. DÉFINITION

On appelle série temporelle une suite d'observations chiffrées et ordonnées dans le temps.

Le temps est la caractéristique principale des séries temporelles.

On note Y_t la série étudiée et t le temps associé. Sur un graphique on porte Y_t en ordonnées et t en abscisses.

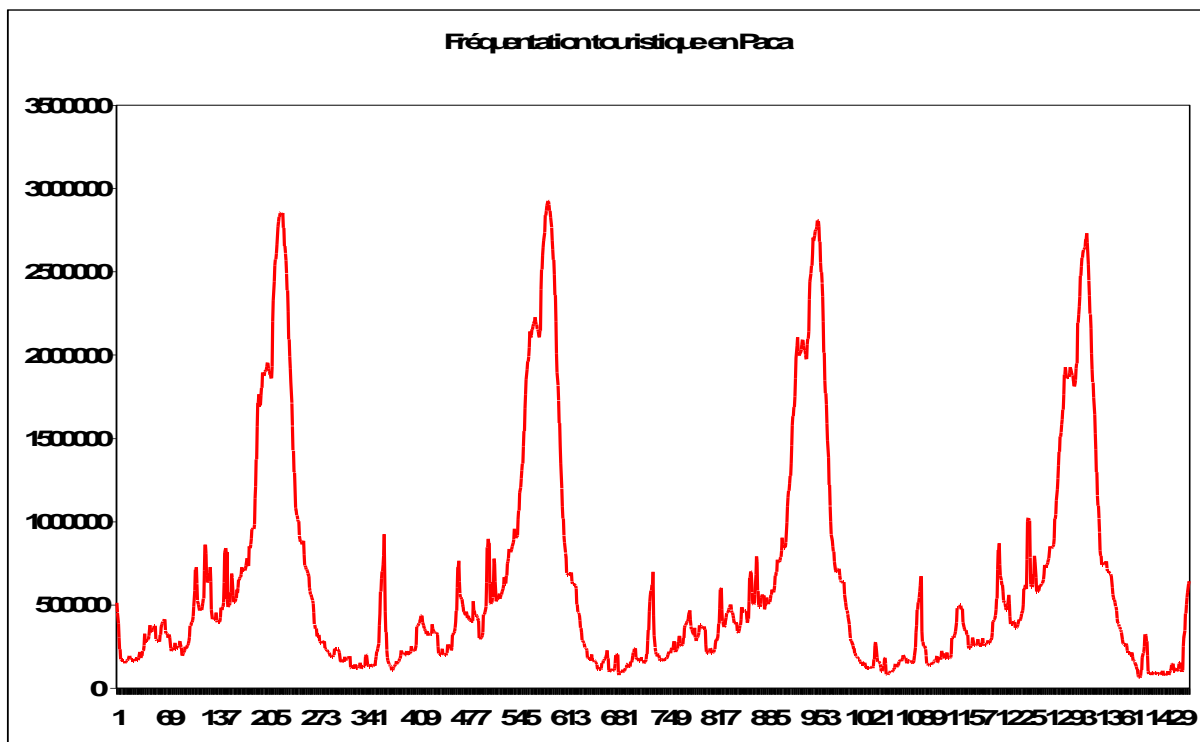
2. LES COMPOSANTES D'UNE SÉRIE TEMPORELLE

On peut distinguer quatre composantes :

- ❶ le trend,
- ❷ le cycle,
- ❸ les variations saisonnières,
- ❹ les variations accidentelles.

3. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

La seule représentation graphique de séries temporelles se présente sous la forme suivante :



4. LA MODÉLISATION

Pour modéliser une série temporelle il existe deux grandes catégories de méthodes :

→ ① **Des méthodes statistiques** :

- Désaisonnalisation par la régression linéaire,
- Désaisonnalisation par les moyennes mobiles (séries CVS)...
- Le lissage exponentiel simple, double, multiple...

→ ② **Des méthodes autoprojectives** :

construites à partir de la seule connaissance du passé de la série, de la forme :

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p})$$

C'est l'objet de ce chapitre.

SECTION 2 : APPROCHE MATHÉMATIQUE DES SÉRIES TEMPORELLES

1. DÉFINITION D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE

Un processus est stationnaire du second ordre (c'est à dire les deux premiers moments : la moyenne et la variance) ou faiblement stationnaire s'il respecte les conditions suivantes :

- $E(y_t) = E(y_{t+n}) = m \quad \forall t \text{ et } \forall n$. La moyenne est constante et indépendante du temps.
- $\text{Var}(y_t) < \infty \quad (= \sigma^2)$. La variance est finie et indépendante du temps.
- $\text{Cov}(y_t, y_{t+k}) = \sigma(k)$. La covariance est indépendante du temps. Elle ne dépend que de la différence de temps seule et non du temps.

Une série temporelle est donc stationnaire si elle est la réalisation d'un processus stationnaire. Ceci implique que la série ne comporte ni tendance, ni saisonnalité et aucun facteur n'évoluant avec le temps.

Exemples de quelques processus stationnaires :

- Un processus *bruit blanc* (ε_t), que l'on peut définir comme une suite de variables aléatoires réelles homoscédastiques et indépendantes. On l'appelle aussi processus **IID** (processus discret formé de variables mutuellement **I**ndépendantes et **I**dentiquement **D**istribuées).
- Un processus moyenne mobile (MA) qui est une combinaison linéaire de *bruits blancs* de la forme :

$$Y_t = \sum \beta_i \varepsilon_{t-i}$$

2. LA FONCTION D'AUTOCOVARIANCE : $\sigma(k)$

La fonction d'autocovariance mesure la covariance pour un couple de valeurs séparées par un intervalle de longueur k appelé retard. Elle apporte simultanément de l'information sur la variabilité de la série et sur les liaisons temporelles. Elle se définit de la manière suivante :

$$\sigma(k) = \text{cov}(y_t, y_{t+k}) = \text{cov}(y_t, y_{t-k})$$

➤ C'est une fonction paire : $\sigma(k) = \sigma(-k)$

Si $k=0$: $\text{cov}(y_t, y_t) = \text{Var}(y_t) = \sigma(0)$

3. LA FONCTION D'AUTOCORRELATION : ACF

Définition :

La fonction d'autocorrélation est une fonction notée $\rho(k)$ qui mesure la corrélation entre le processus Y_t et le processus Y_{t+k} qui est le processus d'origine décalée d'une valeur k . En général les valeurs admissibles pour k sont les suivantes :

$N/6 \leq k \leq N/3$ (Box & Jenkins suggèrent $N/4$)
 $k = N/5$ si $N \geq 150$

On recherchera par exemple l'autocorrélation entre :

Y_t et Y_{t+1}

Y_t et Y_{t+2}

Y_t et $Y_{t+3} \dots \dots \dots$

Mais pas entre Y_{t+1} et Y_{t+2}

Formule :

$$\begin{aligned} \rho(k) &= \frac{COV(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{VAR(Y_t)} \times \sqrt{VAR(Y_{t+k})}} \\ &= \frac{COV(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{\sigma(0)} \times \sqrt{\sigma(0)}} \\ &= \frac{\sigma(k)}{\sigma(0)} \end{aligned}$$

Avec : $\rho(0) = 1$
 $\rho(k) = \rho(-k)$ fonction symétrique
 $\rho(k) \in [-1, 1]$

La représentation graphique de cette fonction s'appelle un corrélogramme.

La matrice de corrélation est une matrice symétrique. Elle se construit comme suit :

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k) \\ \rho(1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \rho(1) \\ \rho(k) & \dots & \rho(1) & 1 \end{bmatrix}$$

4. LA FONCTION D'AUTOCORRELATION PARTIELLE : PACF

Pour calculer les PACF on applique les OLS sur l'équation suivante :

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_k Y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Et on retient les a_k comme valeur de l'autocorrélation partielle.

Prenons le cas où $k=2$:

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

On veut donc mesurer la relation entre Y_t et Y_{t-2} en prenant en compte l'effet de Y_{t-1} sur Y_t . En d'autres termes on recherche la relation entre Y_t et Y_{t-2} conditionnellement aux variables intermédiaires (ici Y_{t-1}). On a donc :

$$r(k) = \text{cor}(Y_t, Y_{t-k} \mid Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k+1})$$

On peut aussi tracer le corrélogramme du PACF. Ce dernier évolue comme l'ACF entre $[-1, +1]$.

Plus spécifiquement nous avons les formules suivantes :

$r(0) = 1$ [par définition]

$r(1) = \rho(1)$

$$r(2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

$$r(3) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\rho(3) - 2\rho(2)\rho(1) - \rho(1)^2\rho(3) + \rho(1)^3 + \rho(2)^2\rho(1)}{1 - 2\rho(1)^2 + 2\rho(2)\rho(1)^2 - \rho(2)^2}$$

A l'ordre k nous avons :

$$r(k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \rho(k-1) \\ \rho(k-1) & \dots & \rho(1) & \rho(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \rho(1) \\ \rho(k-1) & \dots & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

5. L'OPÉRATEUR RETARD

On note L l'opérateur retard tel que :

$$LY_t = Y_{t-1}$$

On peut appliquer m fois cet opérateur, on a la relation :

$$L^m Y_t = Y_{t-m}$$

Sous forme polynômiale nous avons :

$$\mathbf{B}(\mathbf{L})Y_t = \left(\sum_{i=0}^P \alpha_i \mathbf{L}^i \right) Y_t = \sum_{i=0}^P \alpha_i Y_{t-i}$$

6. L'OPÉRATEUR DE DIFFÉRENTIATION

On note Δ l'opérateur $(1-L)$ et d l'ordre de différentiation. On a donc :

$$\Delta^d Y_t = (1-L)^d Y_t$$

pour $d=1$ $\Delta Y_t = (1-L) Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

pour $d=2$ $\Delta^2 Y_t = (1-L)^2 Y_t = (1-2L+L^2) Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$

Pour des ordres supérieurs à 2, il est plus judicieux d'utiliser la formule :

$$\Delta^d = \Delta (\Delta^{d-1})$$

7. SÉRIES EN L ET INVERSE D'UN POLYNÔME

Soit le processus suivant :

$$(1 - \alpha L) Y_t = \varepsilon_t$$

$(1 - \alpha L)$ est un polynôme en L de degrés un. Pouvons-nous l'inverser ? C'est à dire pouvons-nous avoir :

$$(1) \quad Y_t = (1 - \alpha L)^{-1} \varepsilon_t$$

Plusieurs cas vont se présenter :

CAS 1	CAS 2	CAS 3
$ \alpha < 1$	$ \alpha > 1$	$ \alpha = 1$
Le polynôme $(1 - \alpha L)$ est inversible	Le polynôme $(1 - \alpha L)$ est inversible	Le polynôme $(1 - \alpha L)$ n'est pas inversible CF. théorie de la coïntégration

Cas n°1 : Il existe un théorème :

« l'inverse d'un polynôme est une suite infinie »

$$(1 - \alpha L)^{-1} = \frac{1}{1 - \alpha L} = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i L^i$$

L'expression (1) devient :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i L^i \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}$$

Résumé et Conclusion

Pour le cas n°1, la condition d'inversibilité peut s'exprimer par deux éléments équivalents :

⇒ ① $(1 - \alpha L)$ est inversible si tous les coefficients de ce polynôme sont à l'intérieur du cercle unité c'est à dire si :

$$|\alpha| < 1 \quad \text{à l'ordre 1.}$$

A l'ordre 2 il faut rajouter d'autres hypothèses plus restrictives. De même pour les autres ordres.

⇒ ② $(1 - \alpha L)$ est inversible si toutes les racines de ce polynôme sont à l'extérieur du cercle unité c'est à dire si :

$$|\lambda| > 1 \quad \text{cela est valable pour tout ordre.}$$

SECTION 3 : LES PROCESSUS UNIVARIÉS

1) PRÉSENTATION DES PROCESSUS

Si on note Y_t la série étudiée au temps t (mois par exemple), intuitivement on peut penser que le mois précédent affecte le mois courant. On a alors l'expression :

$$Y_t = (\text{cste} +) \alpha_1 Y_{t-1}$$

Plus généralement on peut aussi penser que le mois courant dépend des mois ou des années antérieures. On a alors :

$$Y_t = (\text{cste} +) \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots$$

Mais on peut supposer sans trop se tromper que la *mémoire* du phénomène se trouve dans un passé proche, il n'est donc pas utile de remonter trop loin dans le temps. On peut considérer, au delà d'une distance p entre deux événements, la dépendance comme presque nulle. Nous avons alors :

$$Y_t = (\text{cste} +) \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p}$$

Les paramètres cste , α_1 , α_2 , ..., α_p sont inconnus. Certains paramètres peuvent être nuls. Le nombre de retards p est aussi inconnu et représente la mémoire du phénomène.

➤ Une forte relation entre deux observations consécutives engendre une valeur élevée du coefficient α_1 . Au fur et à mesure que l'on s'éloigne dans le passé, les valeurs des coefficients α_i décroissent en fonction de i vers 0.

➤ Si la série présente un caractère saisonnier, la valeur de α_i augmentera périodiquement pour les valeurs de i multiple de la périodicité. Dans ce cas il faut choisir une valeur de p assez grande, mais beaucoup de coefficients seront proches de 0.

Réécrivons la relation précédente sous la forme :

$$Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-2} - \dots - \alpha_p Y_{t-p} = \text{cste}$$

Nous avons alors une équation aux différences d'ordre p avec un second membre constant, définie seulement sur la période d'observation $t = 1, \dots, T$.

Mais cette équation purement **déterministe** ne permet pas de décrire convenablement toutes les variations de la série. Il est nécessaire et parfois indispensable de faire intervenir dans cette équation un effet **aléatoire** pour prendre en compte toutes les causes des variations indépendantes du système et non mesurables. C'est par exemple :

- Les effets climatiques,
- Les effets biologiques,
- Les erreurs d'observations...

Pour prendre en compte cet effet aléatoire on va rajouter un élément ω_t à l'équation de base :

$$Y_t = (\text{cste} +) \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \omega_t$$

Les ω_t sont supposés être des bruits blancs

Toutefois, cette simple (et seule) hypothèse ne rend pas compte de la diversité des situations : des conditions climatiques favorables sur une période assez longue peuvent entraîner une augmentation sensible de la production...mais aussi provoquer une modification des cours.

Cet exemple montre bien que l'effet de cette conjoncture climatique ne sera pas instantané mais qu'elle se perpétuera sur une période plus ou moins longue.

De ce fait l'hypothèse d'indépendance des erreurs doit être levée car trop restrictive. On va supposer alors que l'effet aléatoire ω_t est une somme pondérée d'effets aléatoires indépendants de la forme :

$$\omega_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

Les ε_t étant des bruits blancs.

Finalement l'équation que nous allons retenir est :

$$Y_t = (\text{cste} +) \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

Nous allons étudier toutes les formes possibles :

MA-AR-ARMA-ARIMA-SARMA-SARIMA.

SECTION 4 : LES PROCESSUS MOYENNES MOBILES : MA(q)

1. DÉFINITION

On appelle Moyenne Mobile d'ordre q [noté MA(q) : Moving Average] le processus défini de la manière suivante :

$$Y_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

En utilisant l'opérateur de retard L :

$$Y_t = (1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q) \varepsilon_t$$

Finalement sous forme polynomiale :

$$Y_t = \beta(L) \varepsilon_t$$

(1)

Avec :

ε_t un bruit blanc

β_i des réels (on suppose généralement que $\beta_0 = 1$)

2. PROPRIÉTÉS

2.1. STATIONNARITÉ

Un MA(q) est **toujours stationnaire** car c'est une combinaison linéaire de variables aléatoires non corrélées (les ε_t). **Il est stationnaire par définition.**

2.2. CONDITIONS D'INVERSIBILITÉ

Le processus (1) admet une représentation autorégressive (inversibilité) si les racines du polynôme $\beta(L)$ sont à **l'extérieur** du cercle unité :

$$|\lambda_i| > 1$$

Le processus (1) peut maintenant s'écrire :

$$\varepsilon_t = \beta^{-1}(L) Y_t$$

Nous obtenons une représentation autorégressive du processus MA(q). La condition d'inversibilité assure que les coefficients du polynôme $\beta^{-1}(L)$ tendent vers zéro lorsque L tend vers l'infini et, par conséquent que l'effet du passé diminue avec l'âge. De ce fait un processus MA(q) apparaît aussi comme un processus AR(∞) :

$$\text{MA}(q) \Leftrightarrow \text{AR}(\infty)$$

3. CALCULS DE $\sigma(k)$, ACF et PACF

On va utiliser un MA(2) de la forme :

$$Y_t = (1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2) \varepsilon_t$$

On suppose que ce processus est inversible.

3.1. CALCUL DE $\sigma(k)$

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \text{cov}(Y_t, Y_t) \\ &= \text{cov}(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}) \\ &= \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + \text{cov}(\beta_1 \varepsilon_{t-1}, \beta_1 \varepsilon_{t-1}) + \text{cov}(\beta_2 \varepsilon_{t-2}, \beta_2 \varepsilon_{t-2}) \\ &= \sigma^2 + \beta_1^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\sigma(0) = (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \text{cov}(Y_t, Y_{t+1}) \\ &= \text{cov}(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+1} + \beta_1 \varepsilon_t + \beta_2 \varepsilon_{t-1}) \\ &= \text{cov}(\varepsilon_t, \beta_1 \varepsilon_t) + \text{cov}(\beta_1 \varepsilon_{t-1}, \beta_2 \varepsilon_{t-1}) \\ &= \beta_1 \sigma^2 + \beta_1 \beta_2 \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\sigma(1) = (\beta_1 + \beta_1 \beta_2) \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
\sigma(2) &= \text{cov}(Y_t, Y_{t+2}) \\
&= \text{cov}(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+2} + \beta_1 \varepsilon_{t+1} + \beta_2 \varepsilon_t) \\
&= \text{cov}(\varepsilon_t, \beta_2 \varepsilon_t) \\
&= \beta_2 \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\sigma(2) = \beta_2 \sigma^2$$

Finalelement :

$$\sigma(k) = 0 \text{ pour } k \geq 3$$

3.2. CALCUL DE L'ACF

Par définition nous avons :

$$\begin{cases} \rho(k) = \sigma(k) / \sigma(0) \\ \rho(0) = 1 \end{cases}$$

$$\rho(1) = \sigma(1) / \sigma(0) = (\beta_1 + \beta_1 \beta_2) / (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)$$

$$\rho(2) = \sigma(2) / \sigma(0) = \beta_2 / (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)$$

$$\rho(3) = 0$$

Finalelement :

$$\rho(k) = 0 \text{ pour } k \geq 3$$

3.3. CALCUL DU PACF

Le PACF d'un MA(2) est compliqué. La valeur initiale est égale à $\rho(1)$ mais les valeurs suivantes ne peuvent pas être définies à partir d'une formulation générale.

Par définition nous avons :

$$\begin{cases} r(0) = 1 \\ r(1) = \rho(1) \end{cases}$$

Calculons $r(2)$:

$$r(2) = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} = \frac{\left(\frac{\beta_2}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} \right) - \left(\frac{\beta_1 + \beta_1\beta_2}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} \right)^2}{1 - \left(\frac{\beta_1 + \beta_1\beta_2}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} \right)^2}$$

La particularité du PACF est la suivante :

$$r(k) \neq 0 \text{ pour } k \geq 2$$

SECTION 5 : LES PROCESSUS AUTORÉGRESSIFS : AR(p)

1. DÉFINITION

On appelle processus Autorégressif d'ordre p [noté AR(p)] un processus qui génère l'observation courante à partir de ses observations passées de la forme :

$$Y_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} = \varepsilon_t$$

En utilisant l'opérateur L :

$$(1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3 + \dots + \alpha_p L^p) Y_t = \varepsilon_t$$

Sous forme polynomiale nous avons :

$$\alpha(L) Y_t = \varepsilon_t$$

Avec : ε_t un bruit blanc
 α_i des réels (on suppose généralement que $\alpha_0 = 1$)

2. PROPRIÉTÉS

2.1. INVERSIBILITÉ

Un $AR(p)$ est toujours inversible. [cf. théorème de DOOB (1953)]

2.2. CONDITIONS DE STATIONNARITÉ

Un processus $AR(p)$ est stationnaire si les racines du polynôme $\alpha(L)$ sont à l'extérieur du cercle unité :

$$|\lambda_i| > 1$$

Le processus $AR(p)$ peut maintenant s'écrire :

$$Y_t = \alpha^{-1}(L) \varepsilon_t$$

Nous obtenons ainsi une représentation moyenne mobile d'un processus $AR(p)$: les Y_t s'exprime linéairement en fonction des résidus. De ce fait un processus $AR(p)$ apparaît aussi comme un processus $MA(\infty)$:

$$AR(p) \Leftrightarrow MA(\infty)$$

3. CALCULS DE $\sigma(k)$, ACF et PACF

On va utiliser un AR(2) de la forme :

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

On suppose que ce processus est stationnaire.

3.1. CALCUL DE $\sigma(k)$

A la différence d'un MA(2), ici il faut considérer deux cas :

Cas n°1 : $k=0$

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \text{cov}(Y_t, Y_t) \\ &= \text{cov}(\alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t, \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t) \\ &= \text{cov}(\alpha_1 Y_{t-1}, \alpha_1 Y_{t-1}) + \text{cov}(\alpha_2 Y_{t-2}, \alpha_2 Y_{t-2}) + \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) \\ &= \alpha_1^2 \text{cov}(Y_{t-1}, Y_{t-1}) + \alpha_2^2 \text{cov}(Y_{t-2}, Y_{t-2}) + \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) \\ &= \alpha_1^2 \sigma(0) + \alpha_2^2 \sigma(0) + \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\sigma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}$$

Cas n°2 : $k > 0$

On part de l'équation :

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Multiplions chaque membre par Y_{t-k} :

$$Y_t Y_{t-k} = \alpha_1 Y_{t-1} Y_{t-k} + \alpha_2 Y_{t-2} Y_{t-k} + \varepsilon_t Y_{t-k}$$

Prenons l'espérance mathématique :

$$E(Y_t Y_{t-k}) = \alpha_1 E(Y_{t-1} Y_{t-k}) + \alpha_2 E(Y_{t-2} Y_{t-k}) + E(\varepsilon_t Y_{t-k})$$

Nous obtenons l'équation de récurrence suivante :

$$\boxed{\sigma(k) = \alpha_1 \sigma(k-1) + \alpha_2 \sigma(k-2)}$$

Si $k=1$ $\boxed{\sigma(1) = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} \sigma(0)}$

Si $k=2$ $\boxed{\sigma(2) = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 \sigma(0)}$

Et ainsi de suite. Finalement :

$$\sigma(k) \neq 0 \text{ pour } k \geq 3$$

3.2. CALCUL DE L'ACF

Par définition nous avons :

$$\begin{cases} \rho(k) = \sigma(k) / \sigma(0) \\ \rho(0) = 1 \end{cases}$$

Cas n°2 : $k > 0$

En divisant chaque membre de l'équation :

$$\sigma(k) = \alpha_1 \sigma(k-1) + \alpha_2 \sigma(k-2)$$

par $\sigma(0)$ on obtient l'équation de récurrence déterminant l'ACF :

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \alpha_2 \rho(k-2)$$

Si $k=1$ $\rho(1) = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$

Si $k=2$ $\rho(2) = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2 - \alpha_2^2}{1-\alpha_2}$

Et ainsi de suite. Finalement :

$$\rho(k) \neq 0 \text{ pour } k \geq 3$$

3.3. CALCUL DU PACF

Le PACF d'un AR(2) n'est pas compliqué. La valeur initiale est égale à $\rho(1)$. $r(2)$ peut être calculé facilement.

Par définition nous avons :

$$\begin{cases} r(0) = 1 \\ r(1) = \rho(1) \end{cases}$$

Calculons $r(2)$:

$$r(2) = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} = \frac{\left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2 - \alpha_2^2}{1 - \alpha_2} \right) - \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \right)^2}{1 - \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \right)^2}$$

La particularité du PACF est la suivante :

$$r(k) = 0 \text{ pour } k \geq 3$$

SECTION 6 : LES PROCESSUS ARMA(p,q)

1. DÉFINITION

On appelle processus ARMA d'ordre p et q [noté ARMA(p,q)] un processus qui génère l'observation courante à partir de ses observations passées et des variables aléatoires passées et présentes de la forme :

$$Y_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

En utilisant l'opérateur L on obtient :

$$(1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3 + \dots + \alpha_p L^p) Y_t = (1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q) \varepsilon_t$$

Soit sous forme polynomiale :

$$\alpha(L) Y_t = \beta(L) \varepsilon_t$$

Avec : ε_t un bruit blanc
 α_i des réels (avec $\alpha_0 = 1$)
 β_i des réels (avec $\beta_0 = 1$)

2. PROPRIÉTÉS

2.1. INVERSIBILITÉ

Un processus ARMA est inversible si les racines du polynôme $\alpha(L)$ sont en dehors du cercle unité. On a alors la représentation MA(∞) suivante :

$$Y_t = \alpha(L)^{-1} \beta(L) \varepsilon_t$$

2.2. CONDITIONS DE STATIONNARITÉ

Un processus ARMA est stationnaire si les racines du polynôme $\beta(L)$ sont en dehors du cercle unité. On a alors la représentation AR(∞) suivante :

$$\alpha(L) \beta(L)^{-1} Y_t = \varepsilon_t$$

3. CALCULS DE LA FONCTION D'AUTOCOVARIANCE, DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION, DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION PARTIELLE

NB : il n'existe pas de résultat particulier concernant la forme des corrélogrammes de l'ACF et du PACF. Comme un ARMA est un mélange de processus AR et de processus MA, il s'avère très délicat d'identifier ce processus par une simple étude des fonctions d'autocorrélation.

Pour les calculs on va utiliser un ARMA(1,1) de la forme :

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t - \beta \varepsilon_{t-1}$$

En supposant $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$

3.1. CALCUL DE $\sigma(k)$

Cas n°1 : $k > 0$

On part de l'équation :

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t - \beta \varepsilon_{t-1}$$

Multiplions chaque membre par Y_{t-k} :

$$Y_t Y_{t-k} = \alpha Y_{t-1} Y_{t-k} + \varepsilon_t Y_{t-k} - \beta \varepsilon_{t-1} Y_{t-k}$$

Prenons l'espérance mathématique :

$$E(Y_t Y_{t-k}) = \alpha E(Y_{t-1} Y_{t-k}) + E(\varepsilon_t Y_{t-k}) - \beta E(\varepsilon_{t-1} Y_{t-k})$$

Nous obtenons l'équation de récurrence suivante :

$$(1) \quad \sigma(k) = \alpha \sigma(k-1) + E(\varepsilon_t Y_{t-k}) - \beta E(\varepsilon_{t-1} Y_{t-k})$$

Cas n°2 : k=0

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \alpha \sigma(1) + E(\varepsilon_t Y_t) - \beta E(\varepsilon_{t-1} Y_t) \\ &= \alpha \sigma(1) + \sigma^2 - \beta E(\varepsilon_{t-1} Y_t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Car } E(\varepsilon_t Y_t) = E(\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-k} Y_{t-k}) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

Intéressons-nous maintenant à $E(\varepsilon_{t-1} Y_t)$:

Soit $Y_t - \alpha Y_{t-1} = \varepsilon_t - \beta \varepsilon_{t-1}$ que nous multiplions par ε_{t-1}

$$Y_t \varepsilon_{t-1} - \alpha Y_{t-1} \varepsilon_{t-1} = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \beta \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}$$

Prenons l'espérance mathématique :

$$E(Y_t \varepsilon_{t-1}) - \alpha E(Y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) - \beta E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

$$E(Y_t \varepsilon_{t-1}) - \alpha \sigma^2 = -\beta \sigma^2$$

$$\text{Car } E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$$

Finale^{ment} nous obtenons :

$$E(Y_t \varepsilon_{t-1}) = (\alpha - \beta)\sigma^2$$

Que nous pouvons remplacer dans (2) :

$$\sigma(0) = \alpha\sigma(1) + (1 - \beta^2 + \alpha\beta)\sigma^2$$

Cas n°3 : k=1

On part de l'équation (1) dans laquelle on remplace k par 1 :

$$\sigma(1) = \alpha\sigma(0) + E(\varepsilon_t Y_{t-1}) - \beta E(\varepsilon_{t-1} Y_{t-1})$$

En remarquant que $E(\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}) = \sigma^2$ et $E(\varepsilon_t Y_{t-1}) = 0$, on obtient :

$$\sigma(1) = \alpha\sigma(0) - \beta\sigma^2$$

On remarque une relation de dépendance entre $\sigma(1)$ et $\sigma(0)$. Après calcul nous obtenons :

$$\sigma(0) = \frac{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{1 - \alpha^2} \sigma^2$$

$$\sigma(1) = \frac{(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta)}{1 - \alpha^2} \sigma^2$$

Cas n°4 : k=2

$$\sigma(2) = \alpha\sigma(1) + E(\varepsilon_t Y_{t-2}) - \beta E(\varepsilon_{t-1} Y_{t-2})$$

Or les deux derniers termes étant nuls, on a l'équation de récurrence suivante :

$$\sigma(2) = \alpha\sigma(1)$$

Pour terminer : pour un ordre $k \geq 2$, on a l'équation :

$$\sigma(k) = \alpha\sigma(k - 1)$$

3.2. CALCUL DE L'ACF

Par définition nous avons :

$$\begin{cases} \rho(k) = \sigma(k) / \sigma(0) \\ \rho(0) = 1 \end{cases} \quad \text{à l'ordre 1 uniquement}$$

$$\rho(0) = 1$$

$$\rho(1) = \frac{(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta)}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta}$$

Pour les ordres $k \geq 2$, on a l'équation de récurrence :

$$\rho(k) = \alpha\rho(k - 1)$$

$$\rho(2) = \alpha\rho(1) = \alpha \frac{(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta)}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta}$$

$$\rho(3) = \alpha\rho(2) \quad \dots$$

3.3. CALCUL DU PACF

Par définition nous avons :

$$\begin{cases} r(0) = 1 \\ r(1) = \rho(1) \end{cases}$$

Calculons $r(2)$:

$$r(2) =$$

$$\frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$$

$$= \frac{\left(\alpha \frac{(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta)}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta} \right) - \left(\frac{(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta)}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta} \right)^2}{1 - \left(\frac{(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta)}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta} \right)^2}$$

$$= \frac{\beta(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta)}{(1 - \alpha\beta)(1 - \alpha\beta + \beta^2) - \beta^3(\alpha - \beta)}$$

Pour les valeurs suivantes, on ne peut pas définir de formulation générale. !!!

SECTION 7 : LES PROCESSUS ARIMA(p,d,q)

1. DÉFINITION

On appelle processus ARIMA d'ordre p, q et d [noté ARIMA(p,d,q)] un processus non stationnaire que l'on stationnarisera à un certain ordre (d). Sa forme polynomiale est la suivante :

$$\alpha(L) (1-L)^d Y_t = \beta(L) \varepsilon_t$$

En faisant le changement de variable :

$$(1-L)^d Y_t = W_t$$

On obtient un processus ARMA(p,q) :

$$\alpha(L) W_t = \beta(L) \varepsilon_t$$

qui est stationnaire [Cf. la section précédente].

2. PROPRIÉTÉS

L'originalité d'un processus ARIMA est qu'il possède $p + q$ racines en dehors du cercle unité (pour la stationnarité et l'inversibilité) mais aussi d racines égales à 1.

On peut calculer les ACF et PACF d'un tel processus, malheureusement on ne peut pas définir de formulation générale.

3. APPLICATIONS NUMÉRIQUES

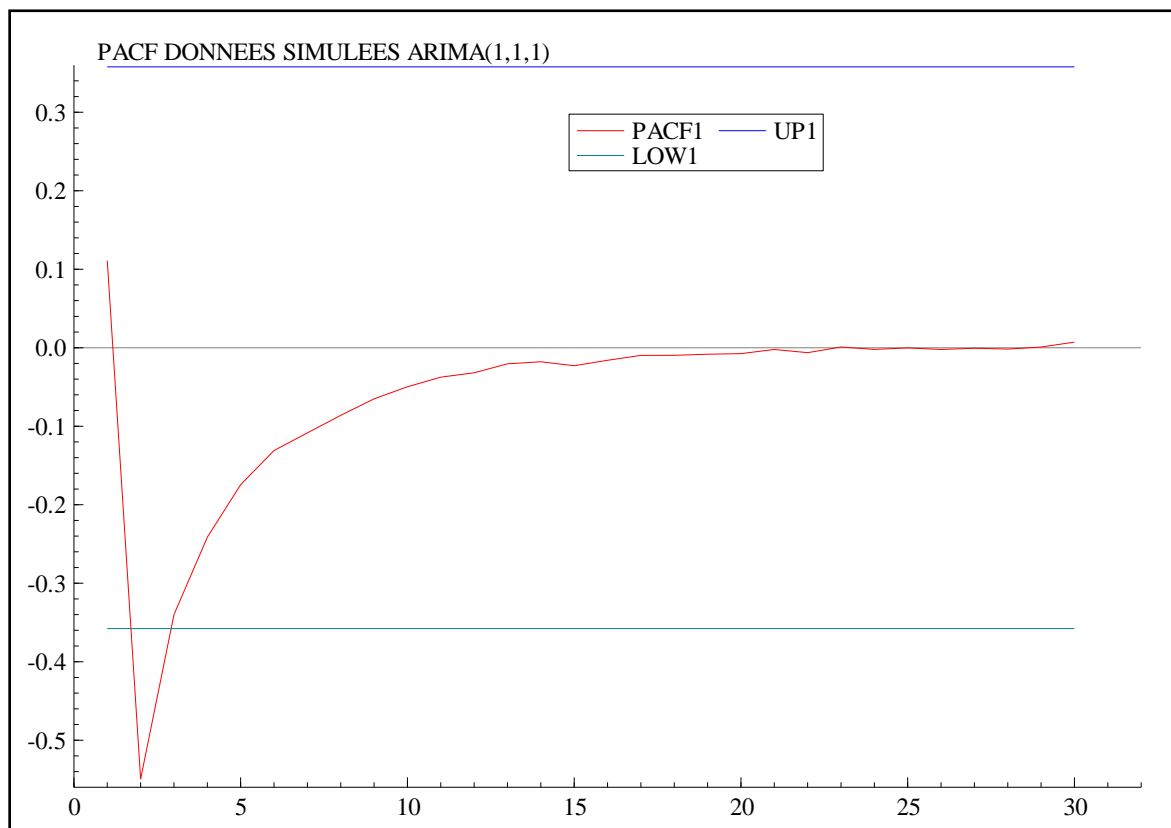
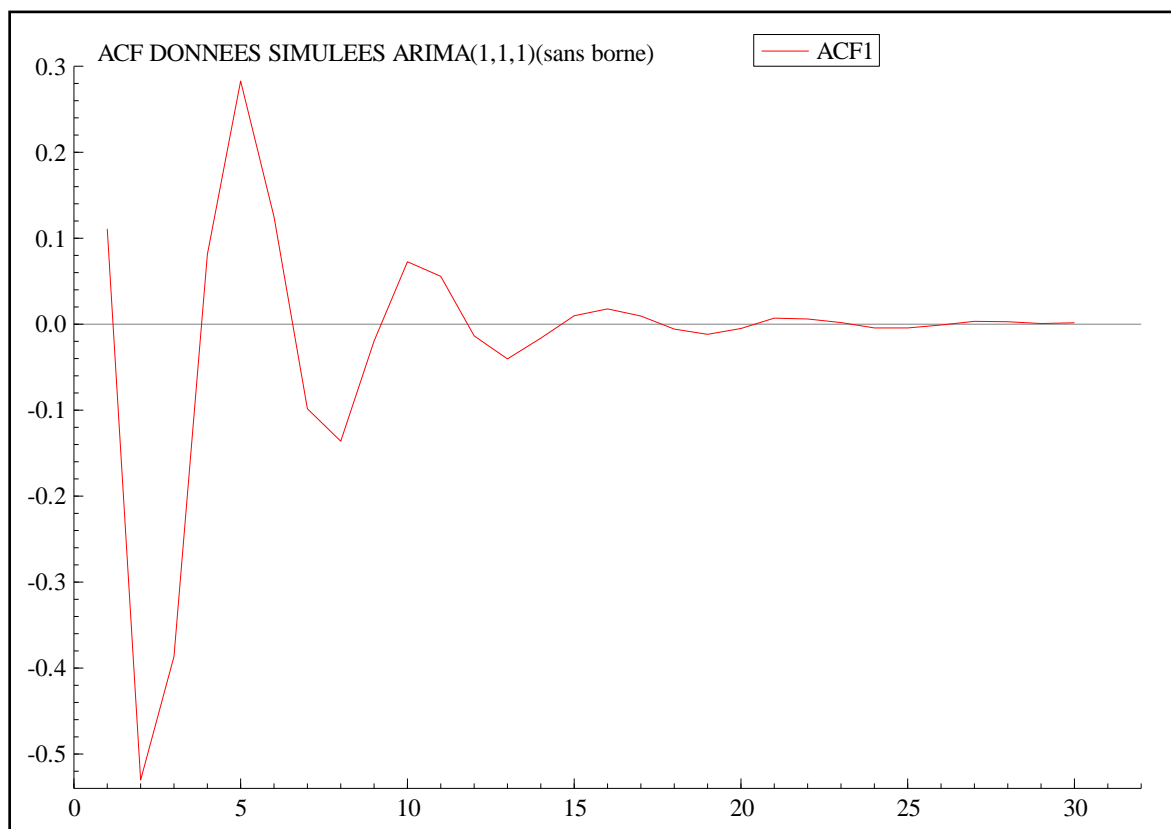
Etudions un processus ARIMA(1,1,1) :

$$(1-\alpha L)(1-L)Y_t = (1-\beta L) \varepsilon_t$$

Après développement nous obtenons :

$$Y_t = Y_{t-1} + \alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2} + \varepsilon_t - \beta \varepsilon_{t-1}$$

Pour avoir le corrélogramme de l'ACF et PACF choisissons (par exemple) les valeurs .6 pour α et .8 pour β :



Pour information un ARIMA(2,2,2) s'écrit :

$$(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2)(1-L)^2 Y_t = (1-\beta_1 L-\beta_2 L^2) \varepsilon_t$$

On va maintenant étudier les processus saisonniers.

SECTION 8 : LES PROCESSUS SARMA(s,p,q,P,Q)

1. DÉFINITION

On appelle processus SARMA d'ordre s,p,q,P,Q [noté SARMA(s,p,q,P,Q)] un processus saisonnier (non stationnaire). Sa forme polynomiale est la suivante :

$$\alpha(L) A(L^s) Y_t = \beta(L) B(L^s) \varepsilon_t$$

$\alpha(L)$ est d'ordre p
 $A(L^s)$ est d'ordre P

$\beta(L)$ est d'ordre q
 $B(L^s)$ est d'ordre Q

2. PROPRIÉTÉS

On peut calculer les ACF et PACF d'un tel processus, malheureusement on ne peut pas définir de formulation générale.

3. APPLICATIONS NUMÉRIQUES

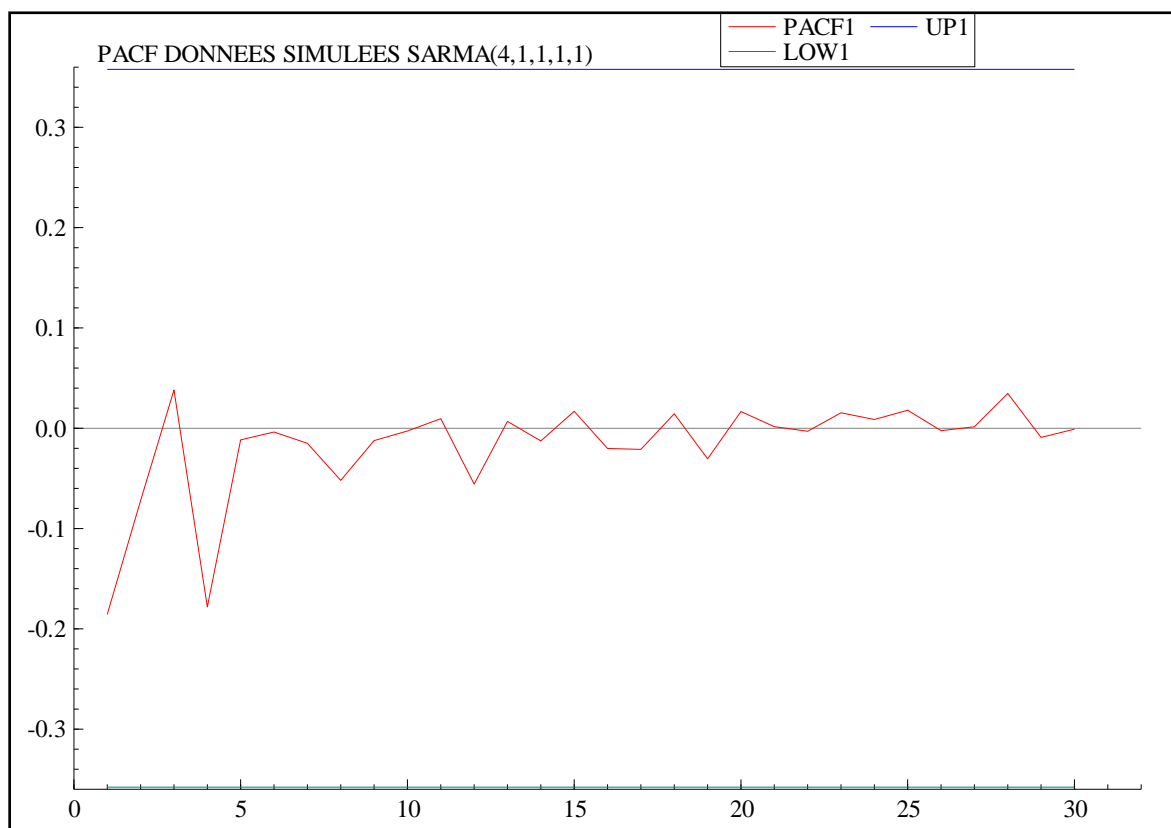
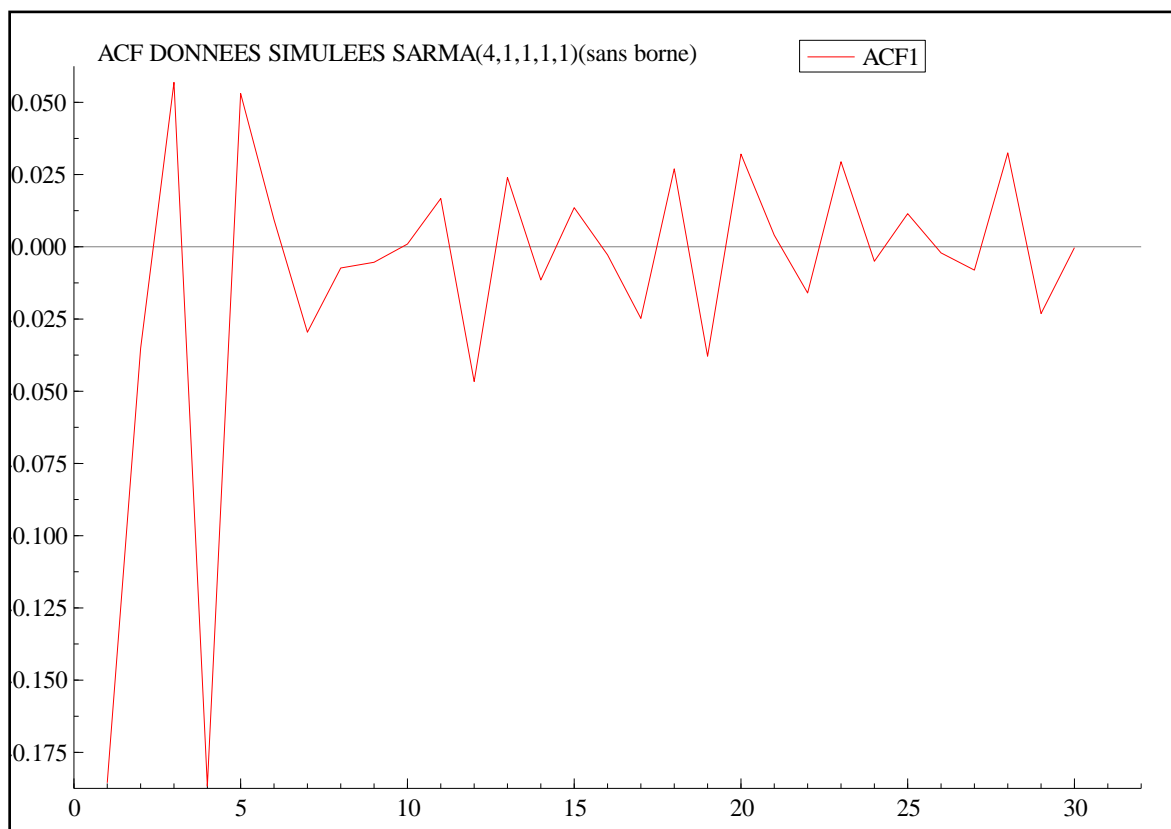
Etudions un processus SARMA(4,1,1,1,1) :

$$(1-\alpha L)(1-aL^4)Y_t = (1-\beta L)(1-bL^4) \varepsilon_t$$

Après développement nous obtenons :

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + aY_{t-4} - a\alpha Y_{t-5} + \varepsilon_t - \beta\varepsilon_{t-1} - b\varepsilon_{t-4} + b\beta\varepsilon_{t-5}$$

Pour avoir le corrélogramme de l'ACF et PACF choisissons (par exemple) les valeurs .6 pour α et .4 pour β , .1 pour a et .3 pour b :



Pour information un SARMA(4,2,2,2,2) s'écrit :

$$(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2) (1-a_1 L^4-a_2 L^8) Y_t = (1-\beta_1 L-\beta_2 L^2) (1-b_1 L^4-b_2 L^8) \varepsilon_t$$

On va maintenant étudier les processus non stationnaires et saisonniers.

SECTION 9 : LES PROCESSUS SARIMA(s,p,d,q,P,D,Q)

1. DÉFINITION

On appelle processus SARIMA d'ordre s,p,d,q,P,D,Q [noté SARIMA(s,p,d,q,P,D,Q)] un processus non stationnaire et saisonnier. Sa forme polynomiale est la suivante :

$$\alpha(L) A(L^s) (1-L)^d (1-L^s)^D Y_t = \beta(L) B(L^s) \varepsilon_t$$

$\alpha(L)$ est d'ordre p
 $A(L^s)$ est d'ordre P

$\beta(L)$ est d'ordre q
 $B(L^s)$ est d'ordre Q

2. PROPRIÉTÉS

On peut calculer les ACF et PACF d'un tel processus, malheureusement on ne peut pas définir de formulation générale.

3. APPLICATIONS NUMÉRIQUES

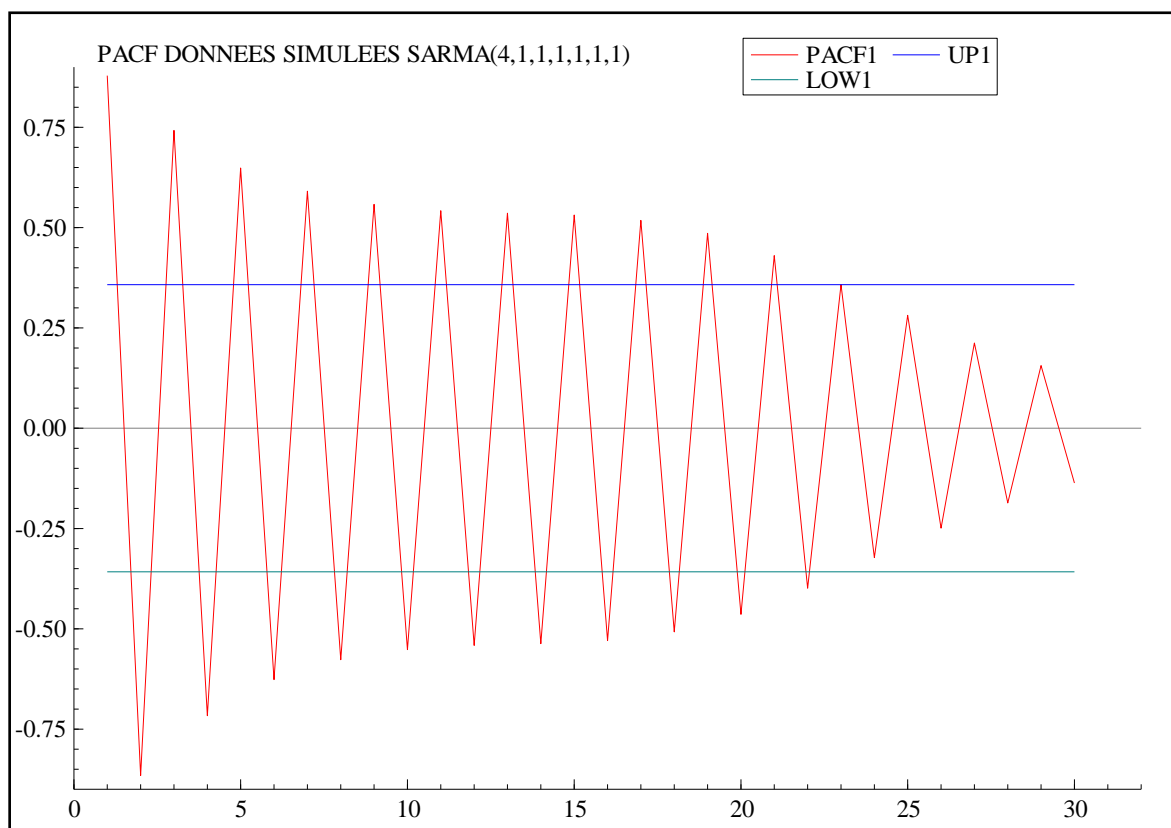
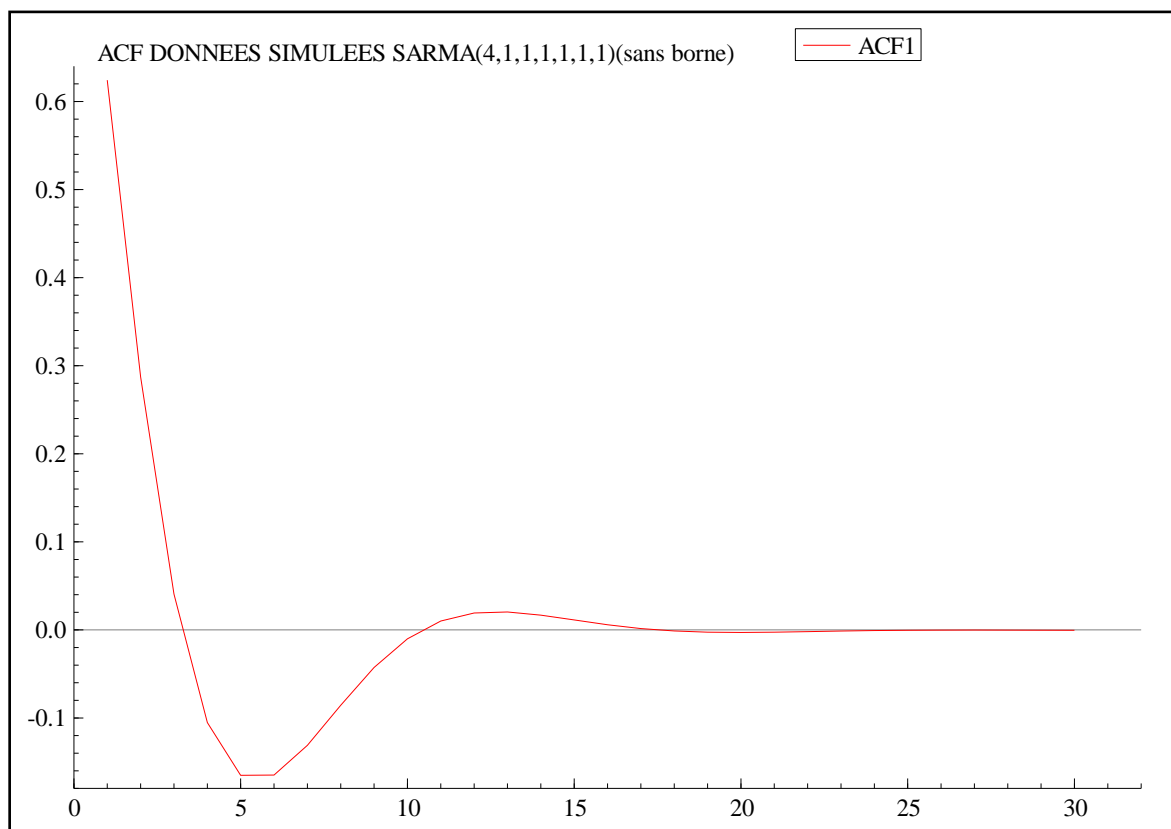
Etudions un processus SARIMA(4,1,1,1,1,1,1) :

$$(1-\alpha L)(1-aL^4)(1-L)(1-L^4)Y_t = (1-\beta L)(1-bL^4) \varepsilon_t$$

Après développement nous obtenons :

$$\begin{aligned} Y_t = & (-\alpha-1)Y_{t-1} + \alpha Y_{t-2} - aY_{t-4} \\ & + (a\alpha+\alpha+1+a)Y_{t-5} + (-a\alpha-\alpha)Y_{t-6} + aY_{t-8} \\ & + (-a\alpha-a)Y_{t-9} + a\alpha Y_{t-10} + \varepsilon_t - \beta\varepsilon_{t-1} - b\varepsilon_{t-4} + \\ & b\beta\varepsilon_{t-5} \end{aligned}$$

Pour avoir le corrélogramme de l'ACF et PACF choisissons (par exemple) les valeurs .6 pour α et .4 pour β , .1 pour a et .3 pour b :



Pour information un SARIMA(4,2,2,2,2,2,2) s'écrit :

$$\frac{(1-\alpha_1 L - \alpha_2 L^2) (1-a_1 L^4 - a_2 L^8) (1-L)^2 (1-L^4)^2}{(1-\beta_1 L - \beta_2 L^2) (1-b_1 L^4 - b_2 L^8)} Y_t = \varepsilon_t$$

Nous pouvons aussi avoir :

ARI

IMA

SARI

SIMA...

SECTION 10 : LA METHODE DE BOX ET JENKINS

La méthode de Box et Jenkins (1976) permet d'élaborer des prévisions qui peuvent être qualifiées d'optimales. Cette méthode se décompose en quatre étapes :

- 1) L'identification,**
- 2) L'estimation,**
- 3) La vérification,**
- 4) La prévision.**

Il faut préciser et c'est essentiel, cette méthode ne fonctionne que sur des séries parfaitement stationnaires.

1 : L'IDENTIFICATION

Cette étape est primordiale. Plus on sera rigoureux plus la prévision sera optimale. Cette étape nous permet de déterminer la loi de probabilité que suit la série étudiée.

Nous devons donner des valeurs aux paramètres :

d, p, q, Q, P, D, s

1.1 : CHOIX DE d

Choisir d c'est différencier la série pour la rendre stationnaire. En économie d peut prendre une des valeurs suivantes : 0, 1 ou 2.

Procédure :

Examen des graphiques suivants :

- données brutes,
- moyennes des données brutes,
- variances des données brutes

Examen des corrélogrammes suivants :

- ACF,
- PACF

Caractéristiques :

Les graphiques (brutes, moyennes et variances) doivent être stationnaires i.e. sans tendance.

Les corrélogrammes doivent tendre rapidement vers zéro.

Identification des modèles non stationnaires et transformation en modèles stationnaires :

La non stationnarité des séries économiques peut se présenter de différentes manières :

- 1) des moyennes non stationnaires et des variances stationnaires,
- 2) des moyennes stationnaires et des variances non stationnaires,
- 3) des moyennes et des variances non stationnaires.

1.1.1. En moyenne

La non stationnarité la plus fréquente est la non constance de la moyenne (arithmétique) entre différentes sous-périodes.

Une telle non stationnarité peut être aisément transformée en stationnarité par une opération de **différenciation à un certain ordre**. Par exemple à l'ordre 1 :

$$X_t = (1-L) Y_t$$

Dans le cas général on a :

$$- \quad X_t = (1-L)^d Y_t$$

Dans cette nouvelle série il ne doit plus y avoir de trend apparent. Les différentes moyennes doivent être toutes identiques (à ε près).

1.1.2. En variance

On calcule des variances pour des sous-période puis on les représente graphiquement : si elles ne sont pas constantes on doit appliquer une procédure de transformation. La plus courante est la stationnarisation de la variance par les Ln de la forme :

$$X_t = \text{Ln } Y_t$$

Nous devrions avoir maintenant une variance constante entre les sous-périodes.

Dans le cas où la variance et la moyenne ne sont pas stationnaires on effectue une double opération : **transformation logarithmique puis différenciation** de la série brute de la forme :

$$X_t = (1-L)^d \text{Ln } Y_t$$

1.2 : CHOIX DE p et q

Pour identifier l'ordre p d'un processus $AR(p)$ on représente le corrélogramme du PACF et on note les valeurs qui sortent de l'intervalle de confiance.

Pour identifier l'ordre q d'un processus $MA(q)$ on représente le corrélogramme de l'ACF et on note les valeurs qui sortent de l'intervalle de confiance.

1.3 : CHOIX DE s

Si une saisonnalité existe elle doit apparaître clairement sur le graphique des données brutes. Ensuite elle doit être confirmée par l'analyse du corrélogramme de l'ACF.

1.4 : CHOIX DE Q et P

Les paramètres Q et P existent si et seulement si une saisonnalité est présente. Pour déterminer leurs valeurs on regarde les corrélogrammes des ACF et PACF et on retient les valeurs multiples de s qui sortent des intervalles de confiance. On effectue aussi un changement de variable de la forme suivante :

Si $s=12$ alors si sur l'ACF les 12 et 24^{ième} retards sortent de l'intervalle de confiance alors Q vaudra 2.

1.5 : CHOIX DE D

Si s existe alors D vaut 1 par défaut.

2 : L'ESTIMATION

Cf. la méthode des OLS.

3 : LA VERIFICATION

Cf. les tests de la méthode des OLS.

4 : LA PREVISION

Mathématiquement les prévisions se conçoivent de la manière suivante :

Soit l'équation estimée suivante :

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

La prévision en t+1 est donnée par :

$$y_{t+1} = \alpha_1 y_t + \alpha_2 y_{t-1} + \varepsilon_{t+1} + \beta_1 \varepsilon_t$$

Dans la pratique on fait d'abord des prévisions sur le passé et ensuite, si le passé est bien reproduit, on fait des prévisions sur le futur.

Fiabilité des prévisions (sur le passé) :

On veut juger de la précision avec laquelle le modèle estimé reproduit l'évolution passée de l'économie.

On test la fiabilité du modèle de simulation en comparant les données observées et les données calculées.

Une mesure quantitative de cette comparaison (c'est à dire une évaluation qualitative de la simulation) est fournie par le **RMSE** (root mean square error), les racines carrées des erreurs quadratiques qui se calculent comme suit :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t^s - Y_t^a)^2}$$

Avec :

Y_s : la valeur simulée de Y

Y_a : la valeur actuelle de Y

Le RMSE mesure la déviation de la variable simulée par rapport à son sentier historique. Pour que cette déviation soit la plus faible possible il faut que le RMSE soit le plus petit possible (compte tenu de l'ordre de grandeur de la variable).

Nous pouvons aussi l'obtenir en pourcentage : c'est le RMSE percent error :

$$\text{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{Y_t^s - Y_t^a}{Y_t^a} \right)^2}$$

Il existe un autre critère permettant de juger si le modèle simule bien les points de retournements des données historiques et les changements rapides dans les données. Ce critère s'appelle le coefficient d'inégalité de Theil :

$$U = \frac{\text{RMSE}}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^s{}^2} + \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^a{}^2}}$$

$$U \in [0,1]$$

Si $U = 0$ alors $y_s = y_a \Rightarrow$ il y a ajustement parfait entre les deux séries.

On peut décomposer U en trois éléments :

Um: qui représente la part du **biais**. Cet élément indique s'il existe un biais systématique entre les valeurs simulées et les valeurs actuelles. Une valeur proche de .1 indique un biais systématique et il faut revoir le modèle.

Us: qui représente la part de la **variance**. Il indique la capacité du modèle à reproduire la variance des endogènes. Une valeur élevée indique que l'une des deux séries fluctue plus que l'autre.

Uc: qui représente la part de la **covariance**. Il indique les erreurs restantes c'est à dire les erreurs non systématiques, les erreurs sans conséquence.

Pour un ajustement parfait nous devons avoir :

$$U_m = U_s = 0 \text{ et } U_c = 1$$

AVEC :

$$U^M = \frac{(\bar{Y}_S - \bar{Y}_A)^2}{MSE}$$

$$U^S = \frac{(\sigma_S - \sigma_A)^2}{MSE}$$

$$U^C = \frac{2(1 - \rho)\sigma_S\sigma_A}{MSE}$$