Modelare și Simulare
Proiect

Etapa 4

Student: Baciu Claudia-Iuliana

Grupa: 1310A

Profesor îndrumător: Petru Cașcaval

Număr proiect: 4

An universitar: 2021-2022

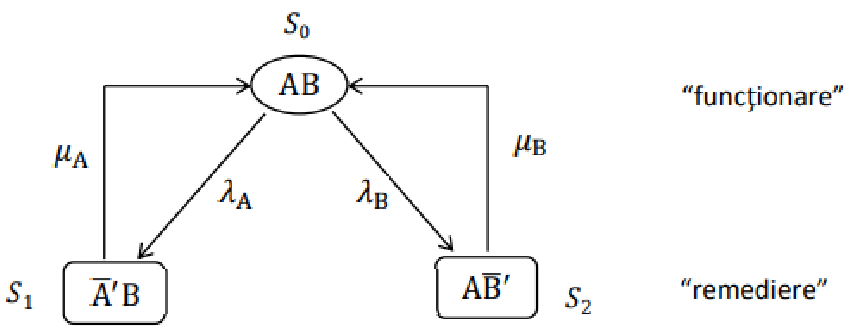
Rezolvarea analitică a problemei de interferenţă studiate pe baza modelelor Markov

1. Prezentarea metodei de studiu

În această etapă se va rezolva problema de interferenţă pentru câteva cazuri mai simple, pe baza unor modele Markov. Scopul acestui studiu analitic este acela de a verifica rezultatele simulării, în special pentru cazul cu modul de rezervă unde testarea programului este deficitară.

Întrucât toate cele patru variabilele aleatoare primare au o repartiţie exponenţial negativă, problema de interferenţă poate fi studiată şi analitic pe baza unor modele Markov.

Metoda analitică bazată pe lanţuri Markov este exemplificată în continuare pentru modelul primar cu S = 1, fără rezervă, la care nu intervine fenomenul de interferenţă. Evoluţia sistemului afectat de întreruperi accidentale este ilustrată de următorul graf de tranziţie între stări. Un simbol negat reflectă o stare de defectare, iar cu apostrof se indică modulul defect în curs de remediere.



Graful stărilor pentru cazul primar cu S = 1, fără rezervă

Matricea intensităţilor de tranziţie care reflectă graful stărilor este următoarea:

$$A = [-(\lambda A\ +\ \lambda B)\ \mu A\ \mu B\ \lambda A\ \ -\mu A\ 0\ \lambda B\ 0\ \ -\mu B\ ]$$

De precizat că o locaţie de pe diagonala principală se completează cu suma valorilor de pe coloană luată cu minus. În acest fel, pentru determinarea probabilităţilor de stare ($p0$, $p1$, $p2$) rezultă următorul sistem de ecuaţii lineare:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \times \mathbf{P} = \mathbf{0} \\ p0 + p1 + p2 = 1 \end{cases}$$

În sistemul de ecuaţii de mai sus sunt 4 ecuaţii şi 3 necunosute. Primele 3 ecuaţii nu sunt însă independente datorită modului în care s-au completat elementele de pe diagonala principală. Prin urmare, se poate renunţa la una din aceste ecuaţii (de exemplu, la prima) şi rezultă un sistem omogen, cu soluţie unică, aşa cum se prezintă în continuare.

$$\begin{cases} \lambda_A p_0 - \mu_A p_1 = 0 \\ \lambda_B p_0 - \mu_B p_2 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{\lambda_A}{\mu_A} p_0 \\ p_2 = \frac{\lambda_B}{\mu_B} p_0 \\ p_0 = 1/\left(1 + \frac{\lambda_A}{\mu_A} + \frac{\lambda_B}{\mu_B}\right) \end{cases}$$

Disponibilitatea se exprimă în funcție de stările de succes.

$$D = p1 * 100 = \frac{1}{1+\frac{\lambda_A}{\mu_A}+\frac{\lambda_B}{\mu_B}} \cdot 100\ (\%) \qquad O = (1 - p1) * 100\ (\%)$$

2. Cazuri studiate

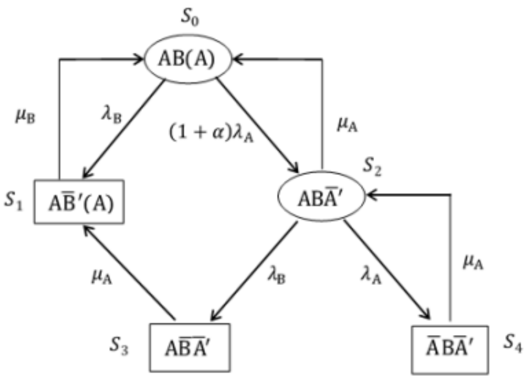
Pentru verificarea rezultatelor simulării de la etapa 3 se vor rezolva analitic următoarele cazuri: a) S = 1, cu rezervă;

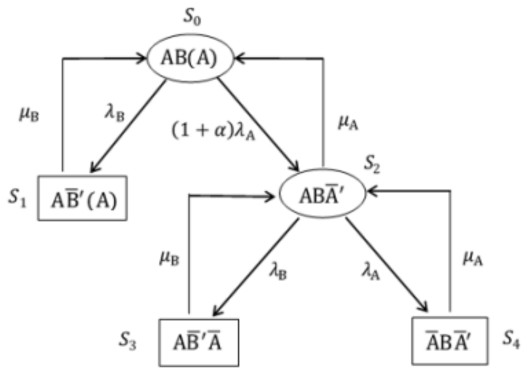
b) S = 2, fără rezervă şi cu rezervă.

Pentru fiecare caz se calculează atât disponibilitatea cât şi gradul de ocupare a muncitorului de deservire. În continuare se prezintă modelele Markov pentru cazul cu S = 1, în funcţie de modulul prevăzut cu rezervă. Se au în vedere cele două variante: (a) fără întreruperea remedierii în curs şi (b) cu posibilitatea de întrerupere a remedeierii în curs dacă situaţia o impune. Cum rezerva este identică cu modulul de bază nu se face distincţie explicită între cele două module. În felul acesta, rezultă un model Markov cu un număr mai mic de stări.

Deoarece toate cele 4 variabile aleatoare primare: **TfA, TfB, TrA** și **TrB** au repartiție exponențial negativă, pentru rezolvarea problemei de interferență ne putem folosi de **modelele Markov**.

➢ **Cazul S = 1, cu rezervă la modulul A, cu întreruperea remedierii în curs**





Model Markov pentru cazul S = 1, cu rezervă la modulul A

Stările de succes în care sistemul este în funcțiune sunt S_1 și S_2 , ca urmare disponibilitatea este dată de relația:

$$\mathbf{D = (p_1 + p_2) \cdot 100\ (\%)}$$

$$\mathbf{O = (1 - p0) \cdot 100\ (\%)}$$

Rezultate obținute

S=1 cu rezervă la modulul A, cu întreruperea remedierii în curs	Cu rezervă activă (α = 1)	Cu rezervă semiactivă (α = 0.5)	Cu rezervă pasivă (α = 0)
D	94.9758	95.0881	95.2065
O	14.3789	12.1136	9.7251

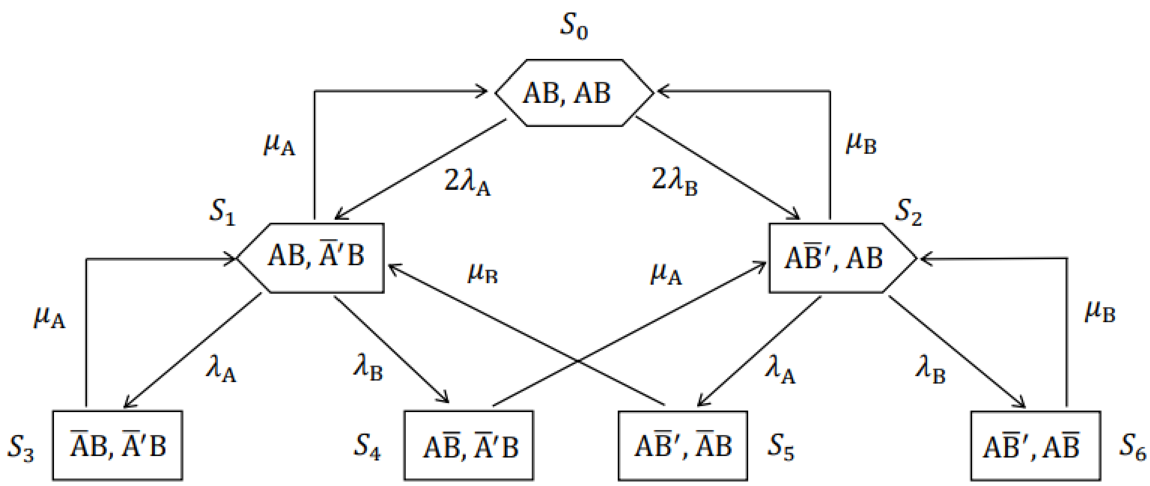
Codul sursă:

```
lamA =  0.2105;
lamB =  0.1626;
miuA =  3.8533;
miuB =  3.4218;

for alfa = 0:0.5:1
    A = [1 1 1 1 1;
    (1+alfa)*lamA -(miuA+lamA+lamB) 0 miuA miuB ;
    lamB 0 -miuB 0 0;
    0 lamA 0 -miuA 0;
    0 lamB 0 0 -miuB];
```

```
    B = [1 0 0 0 0]';
    P = inv(A)*B;
    sum(P)
    alfa
    D = (P(1)+P(2))*100
    O = (1 - P(1))*100
end
```

➢ Cazul S = 2, fără rezervă



Model Markov pentru cazul S = 2, fără rezervă

Matricea intensităților de tranziție:

$$A = [-2\cdot(\lambda_A+\lambda_B)\ 2\cdot\lambda_A\ 2\cdot\lambda_B\ 0\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \mu_A\ \ -(\mu_A+\lambda_A+\lambda_B)\ 0\ \lambda_A\ \lambda_B\ \ 0\ \ 0\ \ \mu_B\ 0\ \ -(\mu_B +\lambda_A+\lambda_B)\ 0\ 0\ \ \lambda_A\ \ \lambda_B\ \ 0\ \mu_A\ 0\ -\mu_A\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ 0\ \mu_A\ 0\ -\mu_A\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \mu_B\ 0\ 0\ 0\ -\mu_B\ \ 0\ \ \ 0\ 0\ \mu_B\ 0\ 0\ \ 0\ \ -\mu_B\ \ ]$$

În starea $S0$ ambele sisteme sunt în funcţiune, în timp ce în stările $S1$ şi $S2$ un sistem este în funcţiune iar celălalt este oprit. Ca urmare, disponibilitatea sistemelor se exprimă cu relaţia:

$$D = \left(p_1 + \frac{p_2}{2} + \frac{p_3}{2}\right) \cdot 100\ (\%)$$

Rezultate obținute

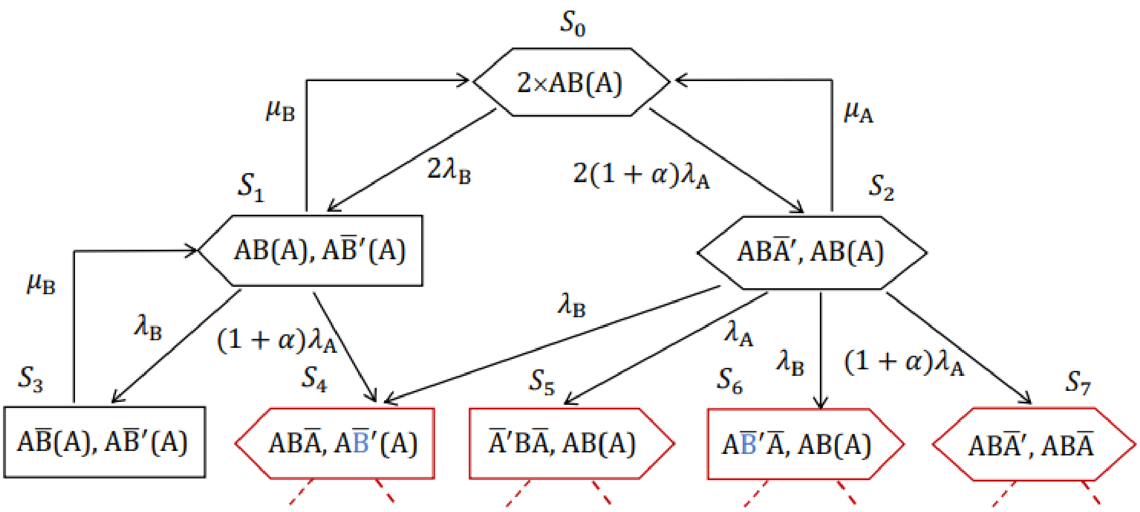
S=2, fără rezervă	D	O
	89.9570	18.3777

Codul sursă:

```
lamA =  0.2105;
lamB =  0.1626;
miuA =  3.8533;
miuB =  3.4218;

A = [1 1 1 1 1 1 1;
2*lamA -(lamB+lamA+miuA) 0 miuA 0 miuB 0;
2*lamB 0 -(lamA+lamB+miuB) 0 miuA 0 miuB;
0 lamA 0 -miuA 0 0 0;
0 lamB 0 0 -miuA 0 0;
0 0 lamA 0 0 -miuB 0;
0 0 lamB 0 0 0 -miuB];
B = [1 0 0 0 0 0 0 ]';
P = inv(A)*B;
sum(P)
D = (P(1)+1/2*(P(2)+P(3)))*100
O = (1 - P(1))*100
```

➢ S = 2, cu rezervă la modulul A, cu întreruperea remedierii în curs



Porţiune din graful stărilor pentru cazul S = 2, cu rezervă la modulul A, cu întrerupere.

Disponibilitatea sistemelor se determină cu relaţie de forma:

$$D = \left(p_0 + p_2 + p_7 + \frac{1}{2}(p_1 + p_4 + p_5 + p_6 + \cdots)\right) \cdot 100\ (\%)$$

Rezultate obținute

S=2 cu rezervă la modulul A, cu întreruperea remedierii în curs	Cu rezervă activă (α = 1)	Cu rezervă semiactivă (α = 0.5)	Cu rezervă pasivă (α = 0)
D	99.2171	97.9513	96.2068
O	28.4519	24.0785	19.3945

Codul sursă:

```
lamA =  0.2105;
lamB =  0.1626;
miuA =  3.8533;
miuB =  3.4218;

for alfa = 0:0.5:1
    A = [ -2*(1+alfa)*lamA-2*lamB miuA miuB 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    2*(1+alfa)*lamA -(1+alfa)*lamA-miuA-2*lamB 0 miuA miuA miuB miuB 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0;
    2*lamB 0 -(1+alfa)*lamA-lamB-miuB 0 0 0 0 miuB 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 (1+alfa)*lamA 0 -miuA-2*lamA-2*lamB 0 0 0 0 miuA miuB 0 0 0 0 0 0 0
0;
    0 lamA 0 0 -miuA-(1+alfa)*lamA-lamB 0 0 0 0 0 0 miuB 0 0 0 0 0;
    0 lamB 0 0 0 -miuB-lamB-(1+alfa)*lamA 0 0 0 0 0 0 miuB 0 0 0 0;
    0 lamB (1+alfa)*lamA 0 0 0 -miuB-lamA-lamB 0 0 0 miuA miuB 0 0 0 0 0 0;
    0 0 lamB 0 0 0 0 -miuB 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 2*lamA (1+alfa)*lamA 0 0 0 -miuA-lamA-lamB 0 0 0 0 0 miuA 0 miuB
0;
    0 0 0 2*lamB 0 (1+alfa)*lamA 0 0 0 -miuB-lamA-lamB 0 0 0 0 0 miuA 0
miuB;
    0 0 0 0 lamB 0 0 0 0 0 -miuA 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 lamB 0 0 0 0 0 -miuB 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 lamA 0 0 0 0 0 -miuB 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 lamB 0 0 0 0 0 0 -miuB 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 lamA 0 0 0 0 0 -miuA 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 lamB 0 0 0 0 0 0 -miuA 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 lamA 0 0 0 0 0 0 -miuB 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 lamB 0 0 0 0 0 0 0 -miuB];

    %renuntam la ecuatia 2
    A(2, :) = 1;

    B = [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';

    P = inv(A) * B;
    s = sum(P);
    D =(P(1)+P(2)+P(7)+1/2*(P(2)+ P(5)+ P(6)+ P(7)+ P(9)+ P(10)))*100;
    O = (1 - P(1)) * 100;
```

```
    alfa
    s
    D
    O
end
```

Concluzii:

Folosirea sistemelor Markov pentru a determina gradul de corectitudine al programului de simulare pentru diferite rulări ale acestuia ne-a demonstrat direcția corectă în implementarea programelor, cât si eficiența acestui aparat matematic în studiul sistemelor cu evenimente discrete. O analiză analitică a disponibilității și a gradului de ocupare făcându-se mult mai simplu și necostisitor din punct de vedere computațional față de rularea algoritmului de simulare, însă dezavantajul aici este creșterea imensă a numărului de stări necesare analizei, și astfel dimensiunea matricei A, odată cu creșterea numărului de sisteme.

Prin creșterea numărului de ecuații necesare analizei analitice, aduce cu sine un cost mai mare de implementare și o putere de calcul necesară sporită.