# Utilização dos testes de Comparações múltiplas: Teste de Scott-Knott

Cleanderson R. Fidelis

Universidade Federal do Acre

# Teste de Scott-Knott

- O teste de Scott-Knott visa comparar dois grupos de médias de tratamentos, iniciando-se por aqueles cuja soma de quadrados é máxima entre os possíveis $(g-1)$ grupos formados, em que $g$ é o número de tratamentos.
- Resulta, dessa aplicação, que as médias dos tratamentos podem ser reunidas em grupos aproximadamente homogêneos.
- Para procedermos com o teste, vamos resumi-lo nos passos a seguir.

## Partição entre dois grupos

I) Determinar a partição entre dois grupos que maximize a soma de quadrados entre grupos. Essa soma de quadrados será definida por $B_0$ e será estimada da seguinte forma:

$$B_0 = \frac{T_1^2}{k_1} + \frac{T_2^2}{k_2} - \frac{(T_1 + T_2)^2}{k_1 + k_2}$$

onde $T_1$ e $T_2$ são os totais dos dois grupos com $k_1$ e $k_2$ tratamentos em cada um:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \overline{Y}_{(i)} \quad \text{e} \quad T_2 = \sum_{i=k_1+1}^{g} \overline{Y}_{(i)}$$

Aqui, $\overline{Y}_{(i)}$ representa a média do tratamento na posição ordenada $i$.
Os dois grupos deverão ser identificados por meio da inspeção das somas de quadrados das $g-1$ partições possíveis, sendo $g$ o número de tratamentos considerados no grupo de médias.

## Estatística $\lambda$

II) Determinar o valor da estatística $\lambda$ da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \cdot \frac{B_0}{\hat{\sigma}_0^2}$$

em que $\hat{\sigma}_0^2$ é o estimador de máxima verossimilhança de $\sigma_Y^2$.

Seja $s_Y^2 = \frac{\text{QME}}{r}$ o estimador não viesado de $\sigma_Y^2$ e $v$ os graus de liberdade associados a este estimador.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{g + v} \left[ \sum_{i=1}^{g} (\overline{Y}_{(i)} - \overline{Y})^2 + v s_Y^2 \right]$$

# Critério de Rejeição e Subgrupos

III) Se $\lambda \geq \chi^2_{(\alpha;g/(\pi-2))}$, rejeita-se a hipótese de que os dois grupos são idênticos em favor da hipótese alternativa de que os dois grupos diferem.

IV) No caso de rejeitar essa hipótese, os dois subgrupos formados serão, independentemente, submetidos aos passos (i) a (iii), fazendo, respectivamente, $g = k_1$ e $g = k_2$.
O processo em cada subgrupo se encerra ao aceitar $H_0$ no passo (iii) ou se cada subgrupo contiver apenas uma média.

# Aplicação do Teste

Como vimos, para a aplicação do teste, deve-se fazer $(p-1)$ partições ou grupos com as $p$ médias ordenadas. Por exemplo, para $p = 4$ tratamentos $(A, B, C, D)$ com médias ordenadas, deve-se fazer 3 partições, a saber:

A vs. B, C, D

I)         II)

2º     A, B vs. C, D

A, B, C vs. D

em que "vs." significa versus.
Se, por exemplo, $A, B$ vs. $C, D$ foi a melhor partição, ou seja, apresentou a maior soma de quadrados, deve-se dar continuidade ao teste, fazendo-se:

A vs. B e C vs. D

(I)         (II)

**A grande vantagem deste teste é a ausência de ambiguidade presente nos procedimentos de comparações múltiplas.**

# Experimento com Plantas de Milho

O experimento foi realizado para avaliar o efeito de diferentes combinações de tratamentos sobre o crescimento de plantas de milho em um campo experimental. Os tratamentos envolvem diferentes estratégias de manejo, incluindo fertilização e irrigação, com o objetivo de maximizar a produtividade.

**Descrição dos tratamentos:**

- **Tratamento A:** Sem fertilizante, apenas irrigação mínima.
- **Tratamento B:** Uso de fertilizante orgânico (composto orgânico) e irrigação moderada.
- **Tratamento C:** Fertilizante químico em alta dosagem e irrigação ideal.
- **Tratamento D:** Fertilizante combinado (50% orgânico e 50% químico) com irrigação controlada.

Os dados para o experimento são:

| **Tratamentos** | **1ª** | **2ª** | **3ª** | **4ª** | **5ª** |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1,58 | 1,58 | 1,22 | 1,22 | 0,71 |
| B | 1,22 | 0,71 | 0,71 | 1,22 | 1,22 |
| C | 3,53 | 3,24 | 3,81 | 4,18 | 3,39 |
| D | 2,74 | 3,08 | 3,94 | 2,91 | 3,24 |

A Tabela da ANOVA é apresentada abaixo:

| **Causas de Variação** | **G.L.** | **S.Q.** | **Q.M.** | **F** |
|---|---|---|---|---|
| Tratamentos | 03 | 26,3495 | 8,7832 | 62,87 |
| Resíduo | 16 | 2,2349 | 0,1397 | - |
| Total | 19 | 28,5844 | - | - |

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

vs

$H_1: \mu_i \neq \mu_{i'}$

## Teste Scott-Knott

As médias dos 4 tratamentos são:

$$\bar{Y}_{(1)} = 1{,}262 \qquad \bar{Y}_{(3)} = 3{,}630$$

$$\bar{Y} = 2{,}2725$$

$$\bar{Y}_{(2)} = 1{,}016 \qquad \bar{Y}_{(4)} = 3{,}182$$

Já as partições serão:

1º B vs. A, C, D

2º B, A vs. C, D

3º B, A, D vs. C.

As médias ordenadas de cada tratamento são:

$\bar{Y} = 1{,}016$; $\bar{Y} = 1{,}262$; $\bar{Y} = 3{,}182$ e $\bar{Y}_{(3)} = 3{,}630$

$\bar{Y}_{(2)} = 1,016, \quad \bar{Y}_{(1)} = 1,262, \quad \bar{Y}_{(4)} = 3,182 \text{ e } \bar{Y}_{(3)} = 3,630$

# Teste Scott-Knott

Baseado nas partições, temos:

Calculando C:

$$C = \frac{(1,262 + 1,016 + 3,630 + 3,182)^2}{4} = 20,6570$$

Calculando as somas de quadrados

$$SQ_1 = B_0 = \frac{(1,016)^2}{1} + \frac{(1,262 + 3,630 + 3,182)^2}{3} - C = 2,1050$$

$$SQ_2 = B_0 = \frac{(1,016 + 1,262)^2}{2} + \frac{(3,630 + 3,182)^2}{2} - C = 5,1392$$

$$SQ_3 = B_0 = \frac{(1,016 + 1,262 + 3,182)^2}{3} + \frac{(3,630)^2}{1} - C = 2,4571$$

Assim, nosso $B_0 = 5,1392$.

Assim,

$$\lambda = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{B_0}{\hat{\sigma}_0^2}.$$

Temos que

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{g+v}\left[\sum_{i=1}^{g}(\bar{Y}_{(i)}-\bar{Y})^2 + v s_{\bar{Y}}^2\right] =$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{4+16}\left[(-1,0105)^2+(-1,2565)^2+(1,3575)^2+(0,9095)^2+16\cdot\frac{0,1397}{5}\right]$$

$$\sigma_0^2 = \frac{5,718}{20} = 0,2859$$

Então,

$$d = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{B_0}{\hat{\sigma}_0^2} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{5,1392}{0,2859} = \underline{24,742}$$

Vamos comparar ao nível de $\underline{5\%}$ de significância, tal que $V_0 = \frac{4}{\pi-2} = \underline{3,50}$

$$\chi^2_{\left(0,05;\,\frac{4}{\pi-2}\right)} = \chi^2_{(0,05;\,3,50)} = \underline{8,66} \text{ ou } \chi^2_{(0,05;\,4)} = \underline{9,48}$$

Assim, como $d > \chi^2_{(0,05;\,3,5)}$, rejeita-se $H_0$, isto é, temos a formação de dois grupos. Vamos contiuar para compurar as partições: A vs. B e C vs D.

Comparando A vs. B

$\bar{T} = (1,262 + 1,016) = 1,134$

$$C = \frac{(1,262+1,016)^2}{2} = 2,5946$$

A vs. B

$$SQ_1 = B_0 = \frac{(1,262)^2}{1} + \frac{(1,016)^2}{1} - C = 0,0303$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{g+v}\left[\sum_{i=1}^{g}(\bar{y}_{(i)} - \bar{y})^2 + v\, s_y^2\right]$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{2+16}\left[(1,262-1,139)^2+(1,016-1,139)^2+\frac{16 \cdot 0,1397}{5}\right] = 0,0265$$

Assim,

$$d_1 = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\,\frac{B_0}{\hat{\sigma}_0^2} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{0,0303}{0,0265} = 1,5733$$

$$v_0 = \frac{2}{2-\pi} = 1,75 \Rightarrow \chi^2_{(0,05;\,1,75)} = 5,49 \text{ ou } \chi^2_{(0,05;\,2)} = 5,99$$

rejeitamos $H_0$.

Logo, como $d < \chi^2_{(0,05;\,1,75)}$ não rej

Comparando C vs. D

$$C = \frac{(3,630 + 3,182)^2}{2} = 23,2017; \quad \bar{Y} = \frac{(3,630 + 3,182)}{2} = 3,406$$

$\boxed{C \text{ vs. } D}$

$$SQ_1 = B_0 = \frac{(3,630)^2}{1} + \frac{(3,182)^2}{1} - C = 0,1003$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{2+16}\left[0,0502 + 0,0502 + \frac{16 \cdot 0,1397}{5}\right] = 0,0304$$

Assim,

$$d_2 = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \cdot \frac{B_0}{\hat{\sigma}_0^2} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{0,1003}{0,0304} = 4,3350$$

$$V_0 = \frac{2}{\pi - 2} = 1,75 \quad \text{e} \quad \chi^2_{(0,05;\,1,75)} = 5,49 \text{ ou } \chi^2_{(0,05;\,2)} = 5,99.$$

Como $d_2 < \chi^2_{(0,05;\,1,75)}$ não rejeitamos $H_0$.

Logo,

| Tratamentos | Médias | Grupos |
|---|---|---|
| C | 3,630 | a |
| D | 3,182 | a |
| A | 1,262 | b |
| B | 1,016 | b |

Muito obrigado pela atenção!