

Límites, Derivadas e Integrales usando Lenguaje simbólico en R

Ryacas

El siguiente apunte es un resumen de la clase del sábado 14 de abril. Lo que quise fue responder la pregunta: cómo puede implementarse lo conversado en R. Como la materia es fundamentalmente teórica, se necesita un lenguaje de programación que pueda operar matemáticas de manera simbólica.

En R, se me ocurren tres formas de hacer esto. La primera es llamando desde R al lenguaje **yacas**, que es la forma como lo haré. La segunda es llamando a una librería de **Python** hacia R conocida como SymPy. La tercera es llamando a alguna librería de **matlab**.

Para usar **yacas** desde R se necesita el paquete **Ryacas**. Por lo tanto, lo primero es instalar y llamarlo.

```
library(Ryacas)
```

Ryacas necesita a su vez de un paquete llamado **XML** que al parecer está en desuso, por lo que las nuevas versiones de R (desde 3.4.1) arrojan un mensaje de advertencia incómodo cuando lo usamos. Para cancelar de manera momentanea las advertencias, cambiamos la opción del Global Enviroment.

```
options(warn = -1)
```

Desafío 1.

Demuestre que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3} = -9$$

```
x <- Sym("x") #definimos x simbolicamente
```

Luego, sabemos que límite de una suma es la suma de los límites, que el límite de una constante es la constante y que el límite de una multiplicación es la multiplicación de los límites y entonces:

```
Limit(x^2,x,2)
```

```
## expression(4)
```

```
Limit(5,x,2)
```

```
## expression(5)
```

```
Limit(x,x,2)
```

```
## expression(2)
```

```
Limit(-3,x,2)
```

```
## expression(-3)
```

```
Limit(x^2,x,2)+Limit(5,x,2)
```

```
## expression(9)
```

```
Limit(x,x,2)-(Limit(3,x,2))
```

```
## expression(-1)
```

```
(Limit(x^2,x,2)+Limit(5,x,2))/(Limit(x,x,2)-(Limit(3,x,2)))
```

```
## expression(-9)
```

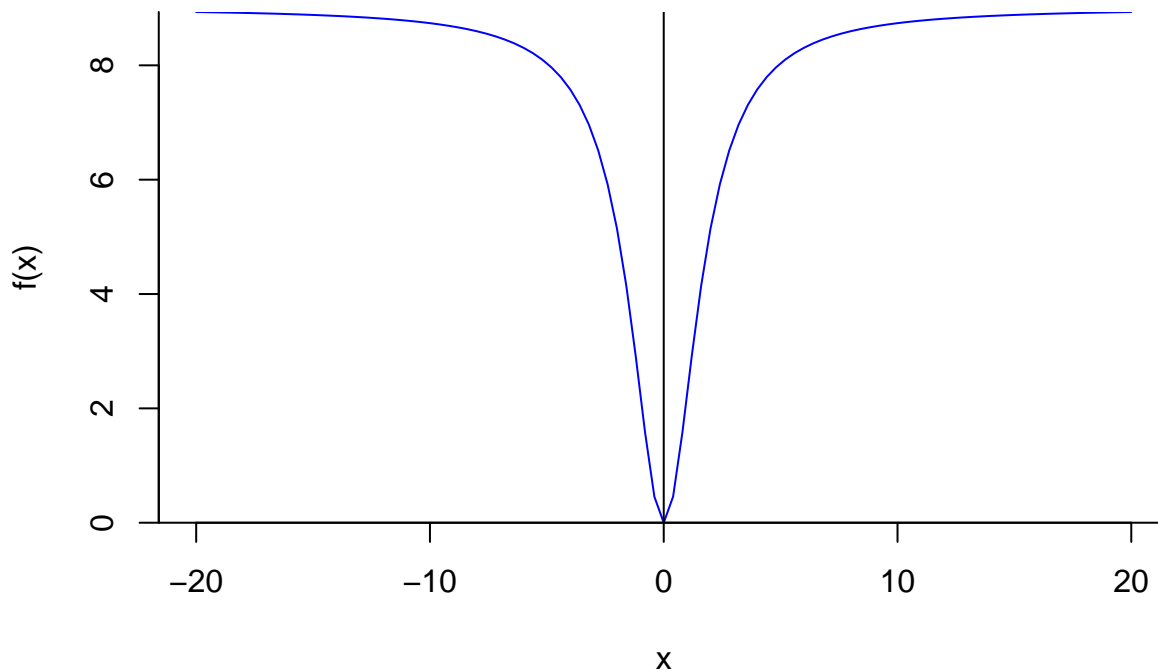
Desafío 2.

Grafique y calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{9x^2}{x^2 + 3}$

Parte I. Graficar

Para graficar, voy a ocupar el paquete `base::graphics` que viene instalado por default y no es necesario llamar. El código sería:

```
curve(9*x^2/(x^2+3), from = -20, to = 20, col = "blue",
      ylab = "f(x)", bty = "L", yaxs = "i")
abline(v = 0) #grafica la funcion
```



Parte 2. Calcule las asíntotas

Lo que demostró este ejercicio es que se necesita la regla de L'Hopital para poder determinar el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El código que se necesita para computar el límite en R, usando yacas es:

```
Limit((9*x^2)/(x^2+3), x, Infinity) #calculamos el limite
```

```
## expression(9)
```

Se puede calcular usando L'Hopital:

```
deriv1 <- deriv((9*x^2),x); deriv1 #derivadas

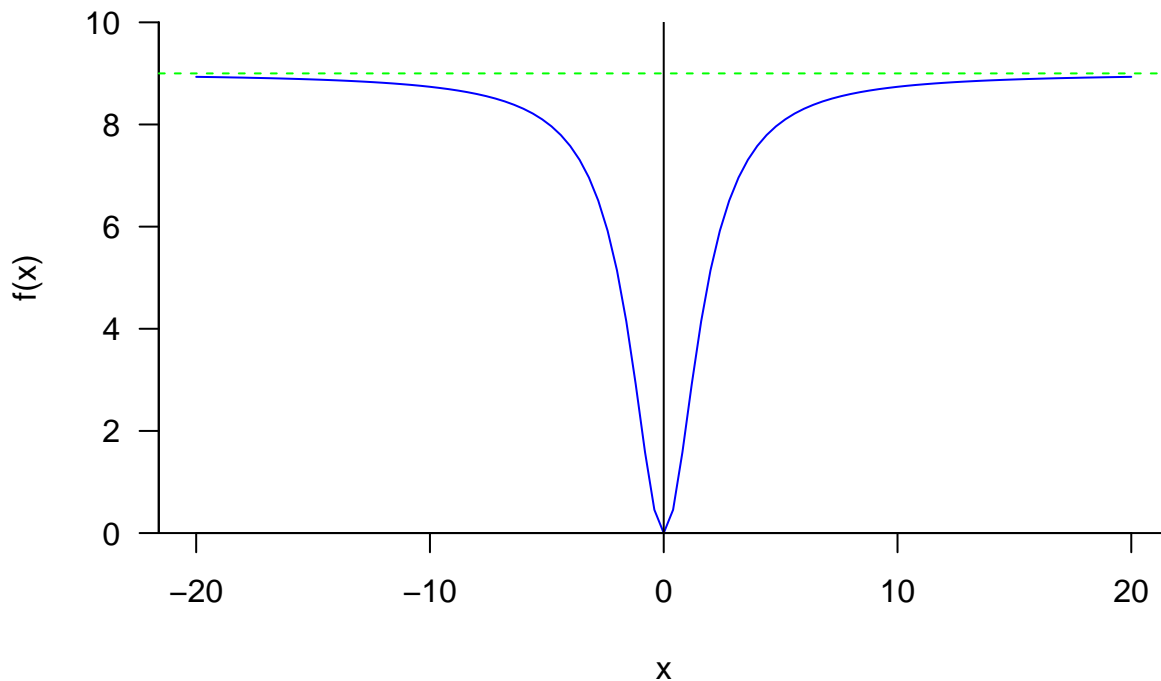
## expression(18 * x)
deriv2 <- deriv((x^2+3), x); deriv2

## expression(2 * x)
deriv <- Simplify(deriv1/deriv2); deriv #simplificamos

## expression(9)
asintota <- yacas(Limit((9*x^2)/(x^2+3), x, Infinity), retclass = "character")
#rescatamos el valor
asintota <- as.numeric(asintota[[1]])
```

El límite de las asintotas es 9. Podemos graficarlo:

```
curve(9*x^2/(x^2+3), from = -20, to = 20, ylab = "f(x)", col = "blue",
      bty = "n", las = 1, yaxp = "i", ylim = c(0,10))
abline(v = 0)
abline(h = asintota, col="green", lty=2) #limite de las asintotas
```



Desafío 3.

Grafique y calcule la derivada de la función $f(x) = \frac{9x^2}{x^2 + 3}$.

Para calcular la derivada se necesita saber que la derivada de un cuociente se puede desarrollar como:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

Parte 1. Cálculo

```
derivada <- deriv(9*x^2/(x^2+3),x); derivada

## expression(((x^2 + 3) * (18 * x) - 9 * (x^2 * (2 * x)))/(x^2 +
##      3)^2)

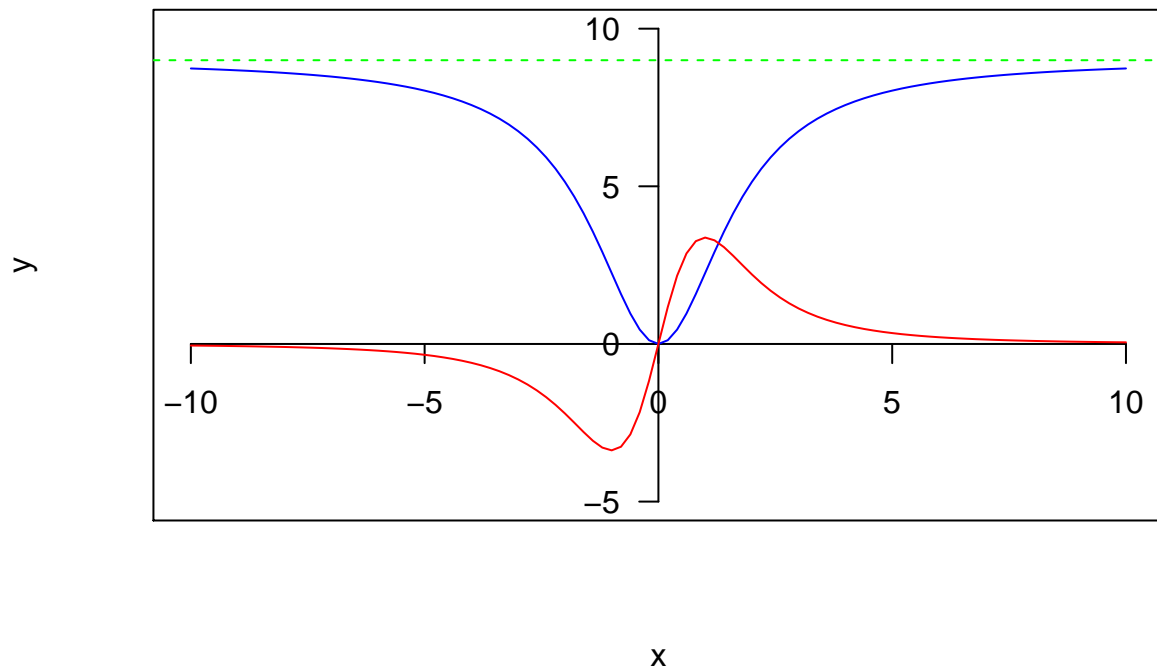
simple <-Simplify(derivada); simple

## expression(54 * x/(x^4 + 6 * x^2 + 9))
```

La derivada es $\frac{(x^2 + 3) * (18 * x) - 9 * (x^2 * (2 * x))}{(x^2 + 3)^2} = \frac{54 * x}{x^4 + 6 * x^2 + 9}$

Parte 2. Gráfico

```
plot( x = -10:10, y = -10:10, ylim = c(-5,10),
      type = "n", ylab = "y", xlab = "x",
      axes = FALSE)
box()
axis(1, pos=0, las = 1)
axis(2, pos=0, las = 1)
curve((9*x^2/(x^2+3)),
      col = "blue",
      add = TRUE)
abline(h = asintota, col="green", lty=2)
curve((54 * x/(x^4 + 6 * x^2 + 9)),
      col = "red",
      add = TRUE)
```



Desafío 4.

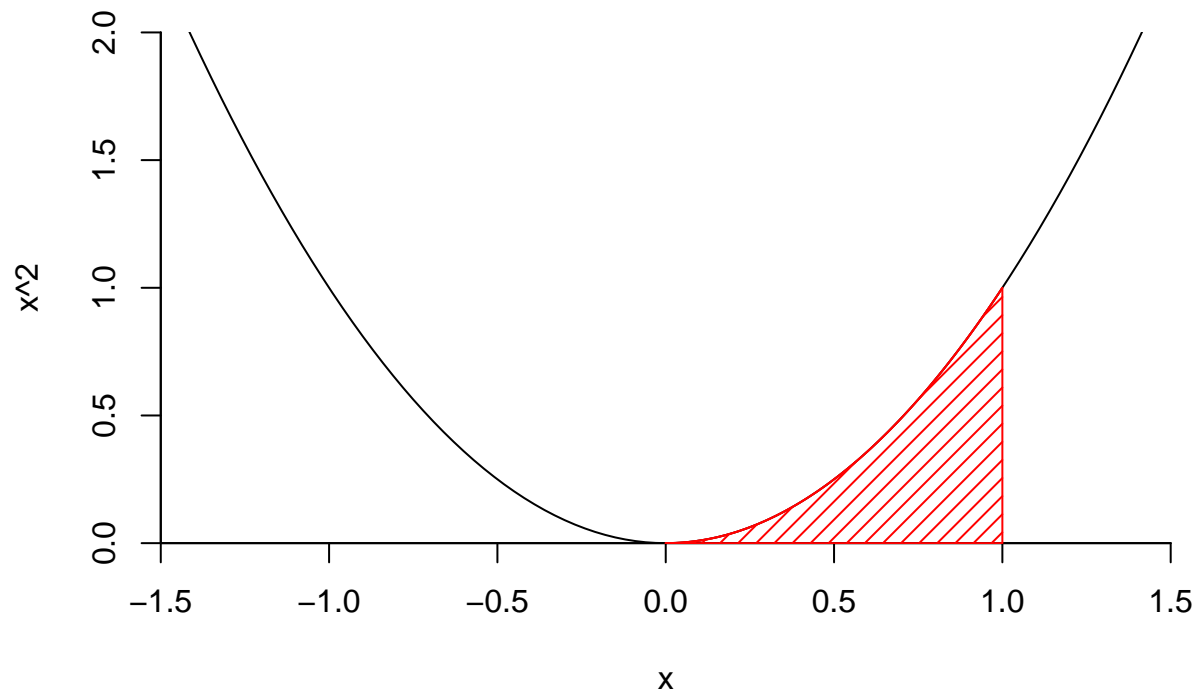
Calcule $\int_0^1 x^2 dx$

```
Integrate(x^2,x,0,1)
```

```
## expression(1/3)
```

Esta integral puede ser calculada también directamente en R con la función `integrate`. El gráfico que representa el área calculada es:

```
curve(x^2,
      ylim = c(0,2), yaxs = "i",
      xlim = c(-1.5,1.5), xaxs = "i",
      bty = "L")
fun <- curve(x^2, from = 0, to = 1, add = T, col = "red")
polygon(x = c(fun$x, 1),
       y = c(fun$y, 0),
       density = 15,
       col = "red")
```



Comentarios

- `yacmode()` es una forma de ocupar yacas directamente en la consola.
- Una buena explicación de cómo ocupar la función `polygon` aquí
- Para volver el nivel de advertencias al default

```
options(warn = 0)
```

Cristóbal Lecaros C.