Werkcollege Datastructuren, Februari 7, 2007 (Uitwerkingen van niet behandelde opgaven)

Clemens Grabmayer (mailto:`clemens@phil.uu.nl`), 14 februari 2007.

R-4.24. *Als* $d(n) \in O(f(n))$ *en* $f(n) \in O(g(n))$, *dan geldt ook* $d(n) \in O(g(n))$.

Om dat te bewijzen, laten we $d, f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ willekeurige functies zo dat

$$d(n) \in O(f(n)) \quad \text{en} \quad f(n) \in O(g(n)) \ . \tag{1}$$

We zullen $d(n) \in O(g(n))$ laten zien.

Wegens (1) bestaan er $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ en $n_0^{(1)}, n_0^{(2)}$ zo dat

$$\text{voor alle } n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq n_0^{(1)} : \quad d(n) \leq c_1 \cdot f(n)\ .$$
$$\text{voor alle } n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq n_0^{(2)} : \quad f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\ .$$

Hieruit volgt dat voor $n_0 := \max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}\}$ en $c := c_1 \cdot c_2 \in \mathbb{R}^+$ geldt:

$$\text{voor alle } n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq n_0 : \quad d(n) \leq c_1 \cdot f(n) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot g(n) = c \cdot g(n)\ .$$

Dit toont nu aan: $d(n) \in O(g(n))$.

R-4.26. *Bewijs dat* $f(n) \in O(g(n))$ *dan en slechts dan als* $g(n) \in \Omega(f(n))$.

We herinneren ons aan de definitie van de groiesnelheidsklassen $O(\tilde{f}(n))$ en $\Omega(\tilde{f}(n))$ voor een functie $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$:

$$O(\tilde{f}(n)) := \left\{ \tilde{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ \,\middle|\, (\exists c \in \mathbb{R}^+)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0)\,\big[\, \tilde{g}(n) \leq c \cdot \tilde{f}(n) \,\big] \right\} ,$$
$$\Omega(\tilde{f}(n)) := \left\{ \tilde{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ \,\middle|\, (\exists c \in \mathbb{R}^+)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0)\,\big[\, \tilde{g}(n) \geq c \cdot \tilde{f}(n) \,\big] \right\} ,$$

Om de bewering in de opgave te bewijzen, laten we $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ willekeurige functies. En we redeneren als volgt:

$$\begin{aligned}
& f(n) \in O(g(n)) \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists c_1 \in \mathbb{R}^+)\,(\exists n_0^{(1)} \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0^{(1)})\,\big[\, f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \,\big] \\
& \quad \underset{(\star)}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists c_2 \in \mathbb{R}^+)\,(\exists n_0^{(2)} \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0^{(2)})\,\big[\, g(n) \geq c_2 \cdot f(n) \,\big] \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad g(n) \in \Omega(f(n))\ .
\end{aligned}$$

Hierbij hoeft alleen nog maar de door een ster gekenmerkte bi-implicatie te worden beredeneerd: de implicatie “$\Leftarrow$” volgt onmiddellijk als we $c_1 := \frac{1}{c_2} \in \mathbb{R}^+$ en $n_0^{(1)} := n_0^{(2)} \in \mathbb{N}$ laten; en de andere implicatie, “$\Rightarrow$” volgt als we $c_2 := \frac{1}{c_1} \in \mathbb{R}^+$ en $n_0^{(2)} := n_0^{(1)} \in \mathbb{N}$ laten.

Het volgt dat $f(n) \in O(g(n))$ dan en slechts dan het geval is als $g(n) \in \Omega(f(n))$.