Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Monografia I
MA148 – Fundamentos da Matemática
Turma Z

Professor Fernando Torres

Mateus João Denadai Gagliardi RA: 076920

Tema da Monografia: Os números de Fibonacci

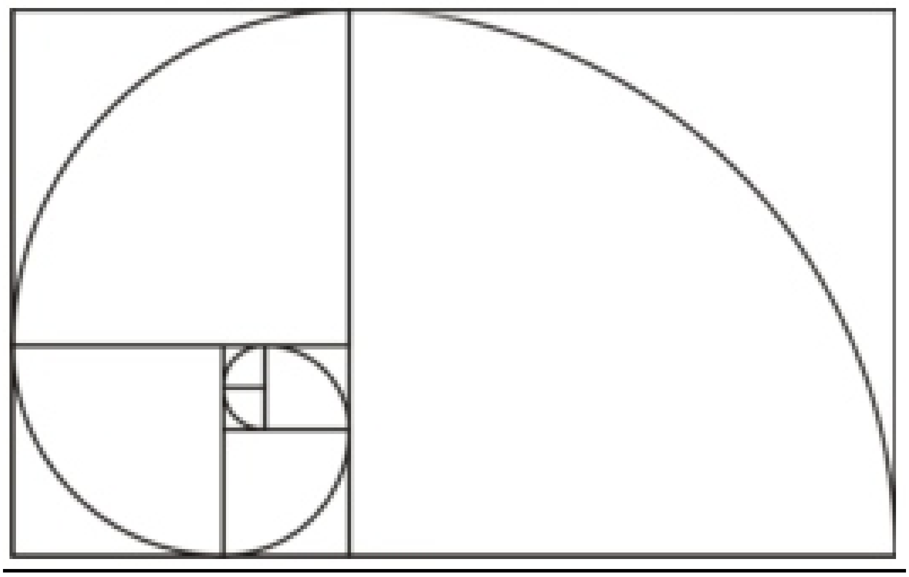
Data limite de entrega da monografia: 30/04/2013

Índice de Conteúdo:

1) Breve resumo da vida de Fibonacci.
2) O que são os números de Fibonacci.
3) Quais suas principais propriedades e aplicações.
4) Curiosidades sobre os números de Fibonacci.

Motivação:

Trazer a tona a importância de Fibonacci para o desenvolvimento da matemática como um todo, abordando inicialmente sua história e principais estudos, bem como uma das suas principais "descobertas", os números que acabaram levando seu próprio nome. Daí, veremos no que se aplicam cada um destes números, bem como suas representações e aplicações, seja na matemática acadêmica, ou na aplicativa.



Conteúdo:

1) *Breve resumo da vida de Fibonacci.*

Leonardo Fibonacci (c. 1170 - após 1240)

O italiano Leonardo Fibonacci foi o primeiro grande matemático na Europa durante a Idade Média. Ele era também conhecido como Leonardo de Pisa. Foi treinado para ser um homem de negócios e começou viajando de Pisa, sua cidade natal, para outros lugares. Durante essas viagens estudou outros sistemas numéricos e aprendeu o sistema numérico hindu-arábico, que acreditava ser superior ao sistema numérico romano. Ele também estudou álgebra e geometria lendo as obras de Diofante. Por volta de 1200, dedicou seus esforços ao desenvolvimento, à escrita e à aplicação da matemática.

Entre os livros de Fibonacci incluem-se *Liber abbaci* (1202), *Practica geometriae* (1220) e *Liber quadratorum* (1225). Por meio de sua dedicação e de seu trabalho duro ele apresentou aos europeus o sistema numérico hindu-arábico e foi pioneiro na restauração da matemática na Idade Média. *Liber abbaci* chamou a atenção do mundo ocidental para as impressionantes descobertas matemáticas dos árabes. Particularmente, o livro apresenta os algarismos arábicos que utilizamos hoje em dia. Embora as considerações práticas fossem sua maior preocupação, ele também estava interessado na geometria e na álgebra teóricas. Ele descobriu a seqüência de Fibonacci dos números inteiros na qual cada número é igual à soma dos dois precedentes (1, 1, 2, 3, 5, 8...) apresentando-a em termos de uma população de coelhos. Essa seqüência tem muitas propriedades curiosas e dignas de nota. Embora as aplicações da matemática prática envidassem seus grandes esforços, Fibonacci também contribuiu para o desenvolvimento teórico dos resultados na geometria euclidiana e novos desenvolvimentos no campo da teoria dos números.

Com seu pai, Guglielmo dei Bonacci (Fibonacci seria a forma reduzida de *filius Bonacci*, "filho de Bonacci"), abastado mercador pisano e representante dos comerciantes da República de Pisa (*publicus scriba pro pisanis mercatoribus*) em Bugia, na região de Cabília, Argélia, Leonardo passou alguns anos naquela cidade. Na época, Pisa mantinha uma importante atividade comercial nos portos do Mediterrâneo, e Guglielmo atuava como uma espécie de fiscal alfandegário em Bugia, importante porto exportador de velas de cera, situado a leste de Argel, nosultanato da dinastia almóada. Ali, ainda muito jovem, Fibonacci teve contato com o mundo do comércio e aprendeu técnicas matemáticas desconhecidas no Ocidente, difundidas pelos estudiosos muçulmanos nas várias regiões do mundo islâmico. Alguns desses procedimentos haviam sido criados por matemáticos da Índia, uma cultura muito distante da mediterrânea.

Ao reconhecer que a aritmética, com algarismos arábicos, era mais simples e eficiente do que com os algarismos romanos, Fibonacci viajou por todo o mundo mediterrâneo, chegando até Constantinopla, para estudar com os matemáticos árabes mais importantes de então, alternando os estudos com a atividade comercial. Muito do seu aprendizado deve ser creditado às obras de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, de Abu Kamil e de outros mestres árabes. Mas Fibonacci não foi um mero difusor dessas obras.

De volta à Itália, em torno de 1200, sua fama chega à corte do imperador Frederico II, sobretudo depois de ter resolvido alguns problemas do matemático da corte. Por essa razão, foi-lhe atribuído um rendimento vitalício, o que lhe permitiu deidicar-se completamente aos estudos.

Em 1202, aos 32 anos, publicou o *Liber Abaci* (*Livro do Ábaco* ou *Livro de Cálculo*), introduzindo os numerais hindu-arábicos na Europa.

Depois de 1228, não se tem mais notícias do matemático, exceto por um decreto de 1240 da República de Pisa, que atribuía um estipêndio ao *"Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo"* ("sério e sábio mestre Leonardo Bigollo"), [6] em reconhecimento dos serviços prestados à cidade, particularmente em matéria contábil e na instrução dos cidadãos .

Fibonacci morreu alguns anos mais tarde, provavelmente em Pisa. No século XIX, uma estátua foi erguida em Pisa, em sua homenagem. Hoje está localizada na galeria ocidental do Camposanto, cemitério histórico da Piazza dei Miracoli.

Seus estudos foram tão importantes que até hoje existe uma publicação periódica, *Fibonacci Quarterly*, inteiramente dedicada à sequência aritmética elaborada por ele. Há também um asteróide que também tem o seu nome, o 6765 Fibonacci.

2) O que são os números de Fibonacci.

A sucessão de Fibonacci ou sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais, na qual os primeiros dois termos são 0 e 1, e cada termo subsequente corresponde à soma dos dois precedentes.

A sequência tem o nome do matemático pisano do século XIII Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, e os termos da sequência são chamados números de Fibonacci. Os números de Fibonacci são, portanto, os números que compõem a seguintesequência de números inteiros :

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Em termos matemáticos, a sequência é definida recursivamente pela fórmula abaixo, sendo os dois primeiros termos F_0= 0 e F_1= 1.

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Em seu livro de 1202, intitulado *Liber Abaci*, Fibonacci introduziu a sequência na matemática da Europa Ocidental,[2] embora ela já tivesse sido descrita anteriormente por matemáticos indianos.[3] [4] [5] Pela convenção moderna, a sequência inicial com F_0 = 0. No *Liber Abaci*, ela começava com F_1 = 1, omitindo-se o zero inicial, e alguns ainda hoje escrevem a sequência dessa forma.

Exemplificando melhor e mais visualmente:

Em função do dito acima podemos montar a seguinte tabela com os primeiros 22 números da sequência de Fibonacci:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
F(n)	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946

Na primeira linha temos o índice do número de Fibonacci na sequência e na segunda linha temos o número propriamente dito, por exemplo, para n = 7 que corresponde ao oitavo número, temos que F(7) = 13 , ou seja, o oitavo número da série é o número 13.
Veja que de fato, a partir do terceiro número, cada um deles é o resultado da soma dos números anteriores, por exemplo, 10946 = 4181 + 6765.

3) Quais suas principais propriedades e aplicações.

Vejamos agora algumas propriedades dessa sequência:

- **Cada n-ésimo Número de Fibonacci é Múltiplo de F(n), para n ≥ 1:**

Vamos tomar como exemplo **n = 3**. Como vemos na tabela, **F(3) = 2**. Veja que para cada **n** múltiplo **3**, temos que**F(n)** é múltiplo de **F(3)**, ou seja, múltiplo de **2**:

n	0	1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	**9**	10	11	**12**	13	14	**15**	16	17	**18**	19	20	**21**
F(n)	0	1	1	**2**	3	5	**8**	13	21	**34**	55	89	**144**	233	377	**610**	987	1597	**2584**	4181	6765	**10946**

Caso você não tenha compreendido, vamos a este outro exemplo com n = 7. Na tabela temos que F(7) = 13. Observe que para cada n múltiplo 7, temos que F(n) é múltiplo de F(7), isto é, múltiplo de 13:

n	0	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20	**21**
F(n)	0	1	1	2	3	5	8	**13**	21	34	55	89	144	233	**377**	610	987	1597	2584	4181	6765	**10946**

Tanto **377**, quanto **10946** são múltiplos de **13**.
Como último exemplo veja na tabela o caso de **n = 5**:

n	0	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	**20**	21
F(n)	0	1	1	2	3	**5**	8	13	21	34	**55**	89	144	233	377	**610**	987	1597	2584	4181	**6765**	10946

Note que **F(5)**, **F(10)**, **F(15)** e **F(20)** são todos múltiplos de **5**.

- **Soma dos Termos da Sequência de Fibonacci:**

Veja em qualquer uma das tabelas acima que o termo **F(10) = 55**.
Qual será a soma de **F(0)** a **F(10)**?
Vejamos:

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143$$

Observe que este total é uma unidade menor que **F(12)**, que é igual a **144**. Isto não é uma coincidência, de fato, a soma dos termos de **F(0)** a **F(n)** é igual a **F(n + 2) - 1**:

$$S_n = F(n + 2) - 1$$

- Qual é a soma dos termos dos primeiros números de **Fibonacci** até o número **10946**?
Na tabelas acima vemos que **10946** corresponde a **F(21)**, portanto, para obtermos a soma precisamos saber o valor de **F(23)**.
No caso de **F(22)** temos:

$$F(22) = F(20) + F(21) \Rightarrow F(22) = 6765 + 10946 \Rightarrow F(22) = 17711$$

Logo **F(23)** é igual a:

$$F(23) = F(21) + F(22) \Rightarrow F(23) = 10946 + 17711 \Rightarrow F(23) = 28657$$

Agora já temos como calcular a soma até o número **10946**:

Sendo **F(30) = 832040**, qual é a soma dos termos de **F(0)** até **F(30)**?
Agora a coisa complicou um pouco, visto que desconhecemos o valor de **F(29)**, ainda não sabemos como calcular o valor de **F(31)**, nem de **F(32)** com as informações que tivemos até aqui.
Qual será a solução então?
Simples, vamos continuar vendo as propriedades.

- **<u>O Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci</u>**

O número de ouro ou proporção áurea é uma razão representada pelo número Φ (Phi). $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou aproximadamente 1,61803398874989. Phi é um número irracional.

A divisão de F(n) por F(n - 1), para n > 1, tende a Φ à medida que n aumenta, por exemplo:

Se dividirmos F(2) por F(1) vamos obter 2, que nem chega a lembrar o numero Φ:

$$F(2) \div F(1) = 2 \div 1 = 2$$

Se considerarmos um n um pouco maior, como por exemplo 15, vamos obter aproximadamente 1,618037135 que é um valor que já nos mostra para qual valor estamos caminhando:

$$F(15) \div F(14) = 610 \div 377 \approx 1{,}618037135$$

Se à medida que n aumenta, a razão de F(n) por F(n - 1) tende a Φ, então podemos utilizar esta propriedade para rapidamente calcularmos o valor de F(n + 2), quando precisamos calcular a soma dos termos de uma série de números de Fibonacci de F(0) até F(n) e só conhecemos este valor F(n).

Por exemplo, para calcularmos a soma dos termos da sequência de Fibonacci até 55, se não soubermos que o número anterior é o 34, podemos multiplicar 55 por Phi duas vezes (ou multiplicar por Phi^2), que dará

aproximadamente 143,99, ou seja, o segundo número após 55 será o número 144, note que arredondamos o valor 143,99, neste caso para maior. A soma será então 143.
Agora já temos como calcular F(32) que ficou pendente no problema acima.

- **Como Obter o n-ésimo Termo da Sequência de Fibonacci?**

A fórmula de Binet pode ser utilizada para o cálculo do n-ésimo número da sequência de Fibonacci:

$$F(n) = \frac{\Phi^n - (1 - \Phi)^n}{\sqrt{5}}$$

Vamos calcular F(21) que, como vimos nas tabelas acima, é igual a 10946:

Para continuar os cálculos vamos utilizar um valor aproximado de Φ. Utilizaremos Φ = 1,618034:

Como a sequência de Fibonacci é formada por números naturais, o número natural mais próximo de 10946,0016é 10946, portanto F(21) = 10946.
Como trabalhamos com potências elevadas, normalmente utilizamos calculadoras científicas na realização destes cálculos, neste caso podemos utilizar toda precisão da mesma ao utilizarmos o valor de Φ. Lembre-se que:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Com o auxílio de uma calculadora, o número F(32) que precisamos calcular no problema anterior, também pode ser obtido através da fórmula de Binet:

Visto que $(1 - \Phi)^n$ tende a zero à medida que n aumenta, podemos simplificar a fórmula de Binet eliminando este termo:

$$F(n) = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$$

Os números de Fibonacci são importantes para a análise em tempo real do algoritmo euclidiano, para determinar o máximo divisor comum de dois números inteiros.

Matiyasevich mostrou que os números de Fibonacci podem ser definidos por uma Equação diofantina, o que o levou à solução original do Décimo Problema de Hilbert.

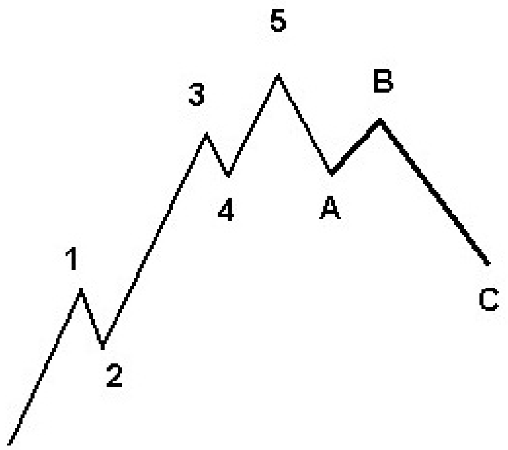
Os números de Fibonacci aparecem na fórmula das diagonais de um triângulo de Pascal (veja coeficiente binomial).

Um uso interessante da sequência de Fibonacci é na conversão de milhas para quilômetros. Por exemplo, para saber aproximadamente a quantos quilômetros 5 milhas correspondem, pega-se o número de Fibonacci correspondendo ao número de milhas (5) e olha-se para o número seguinte (8). 5 milhas são aproximadamente 8 quilômetros. Esse método funciona porque, por coincidência, o fator de conversão entre milhas e quilômetros (1.609) é próximo de φ (1.618) (obviamente ele só é útil para aproximações bem grosseiras: além do factor de conversão ser diferente de φ, a série *converge* para φ).

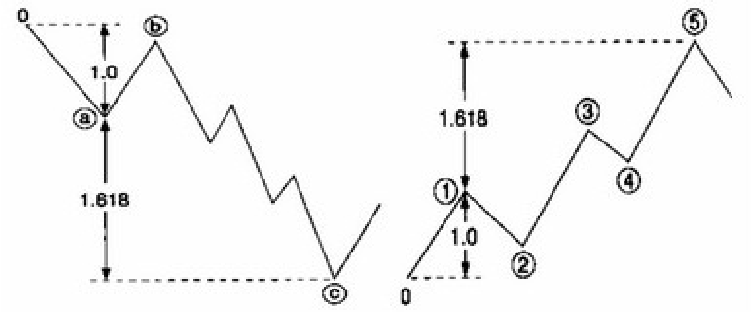
Em música os números de Fibonacci são utilizados para a afinação, tal como nas artes visuais, determinar proporções entre elementos formais. Um exemplo é a *Música para Cordas, Percussão e Celesta* de Béla Bartók.

Le Corbusier usou a sequência de Fibonacci na construção do seu modulor, um sistema de proporções baseadas no corpo humano e aplicadas ao projeto de arquitetura.

Em The Wave Principal, Elliot defende a ideia que as flutuações do mercado seguem um padrão de crescimento e decrescimento que pode ser analisado segundo os números de Fibonacci, uma vez determinada a escala de observação. Defende que as relações entre picos e vales do gráfico da flutuação de bolsa tendem a seguir razões numéricas aproximadas das razões de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci.



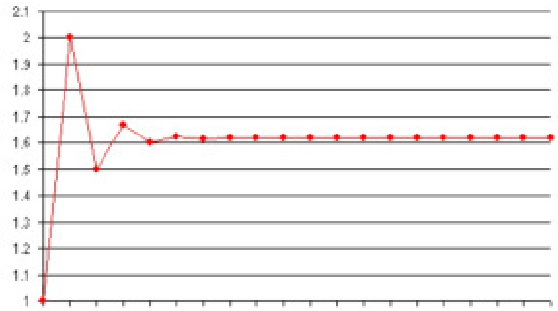
Teorias mais recentes, defendem que é possível encontrar relações “de ouro” entre os pontos de pico e os de vale, como no gráfico abaixo:



Se tomarmos o valor entre o início do ciclo e o primeiro pico, e o compararmos com o valor entre este pico e o pico máximo, encontraremos também o número de ouro. O ciclo, naturalmente, pode estar invertido, e os momentos de pico podem se tornar momentos de vale, e vice-versa.

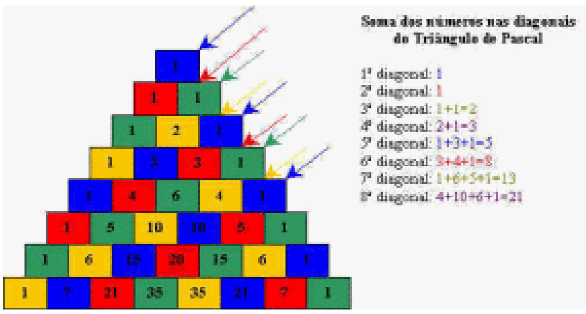
4) ***Curiosidades sobre os números de Fibonacci.***

1. Na sequência de Fibonnaci dividamos cada termo pelo seu antecessor:



À medida que avançamos na sequencia de Fibonacci, a razão entre dois termos consecutivos oscila em torno da Razão Áurea.

2. No Triângulo de Pascal.



A soma dos números nas diagonais é sempre um Número de Fibonacci.

3. Retângulos ao quadrado

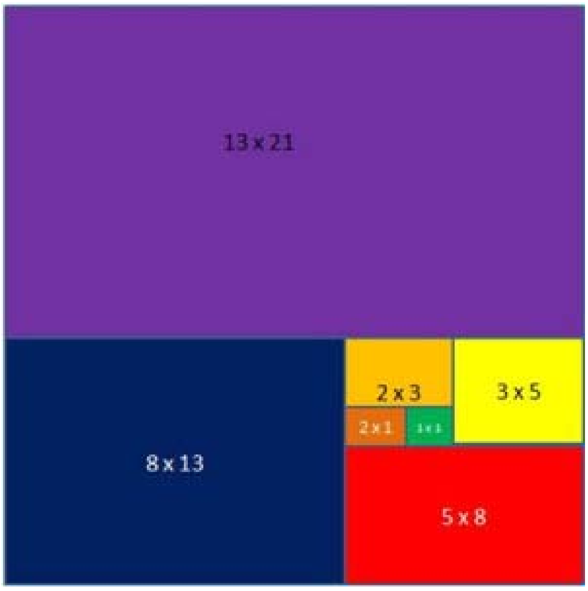
Se você soma um número ímpar de produtos de números de Fibonacci sucessivos , então a soma é igual ao quadrado do úlitmo número de Fibonacci que você usou nos produtos.

Um exemplo: 1, 1,2,**3**

1 x 1 + 1 x 2 + 2 x 3 = 1 + 2 + 6 = 9

Como o último número dessa sequencia é 3, temos que 3^2 = 9.

Qualquer número ímpar de retângulos com lados iguais a números de Fibonacci se encaixa precisamente em um quadrado.



4. Com o número 11

A sequência de Fibonacci tem uma propriedade relacionada com o número 11 muito interessante: a soma de dez números consecutivos quaisquer de Fibonacci é divisível por 11.

Um exemplo: 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610. Sua soma vale 1584 que é divisível por 11 (1584 : 11 = 144)

Nessa propriedade pode ser ainda verificado que essa soma de dez números consecutivos é sempre igual a 11 vezes o sétimo número da sequência escolhida.

No exemplo anterior: a soma encontrada (1584) é igual a 11 x 144.

5. Número de dígitos

O matemático e escritor A. Pickover chama os números associados ao 666 de apocalípticos. Ele descobriu que o 3184º número de Fibonacci tem 666 dígitos.

6. 89 e o 1/89

A Seqüência de Fibonacci contém um número absolutamente notável – o décimo primeiro número, 89. O valor de 1/89 na representação decimal é igual a 0,01123595 … Suponha que você organize os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … como frações decimais da seguinte maneira:

0,01
0,001
0,0002
0,00003
0,000005
0,0000008
0,00000013
0,000000021
....

Em outras palavras, o dígito das unidades do primeiro número de Fibonacci esta na segunda casa decimal, e do segundo está na terceira casa decimal, e assim por diante (o dígito das unidades do n-ésimo número de Fibonacci esta na (n+1)-ésima casa decimal). Agora se somarmos todos os números, iremos obter 0,01123595 … que é igual a 1/89.

Essa curiosidade foi descoberto por Cody Birsner, um estudante na universidade de Oklahoma, em 1994.

7. Fibonacci Pitagórico

Os números de Fibonacci também estão relacionados às triplas pitagóricas. Estas últimas, como podemos recordar, são triplas de números que podem servir como comprimentos dos lados de um triângulo retângulo (como os números 3, 4 e 5). Tome quaisquer quatro números consecutivos de Fibonacci, como 1, 2, 3, 5. O produto dos números de fora, 1×5=5, duas vezes o produto dos números de dentro, 2 x 2 x 3 = 12, e a soma dos quadrados dos termos de dentro, 22 + 32 = 13, formam as 3 pernas da tripla pitagórica 5, 12, 13 (52 + 122 = 132). Mas isso não é tudo. Note que o terceiro número, 13 é, ele próprio, um número de Fibonacci.

Esta propriedade foi descoberta pelo matemático Charles Raine.

8. Periodicidade da seqüência de Fibonacci

Os números de Fibonacci se tornam grandes rapidamente, porque sempre se somam dois números sucessivos para formar o seguinte. Enquanto o 5º número de Fibonacci é 5, o 125º é 59.425.114.757.512.643.212.875.125, e é interessante notar que o dígito da unidade aparece com uma periodicidade de 60 (isto é, a cada 60 números o digito se repete). Por exemplo, o segundo número é 1, e o sexagésimo segundo é 4.052.739.537.881 (também terminado em 1), e o 122º número, 14.028.366.653.498.915.298.923.761, também termina em 1; o mesmo vale para o 182º, e assim por diante. De mesmo modo, o 14º número é 377, e o 74º é 1.304.969.544.928.657, também termina com 7, e assim por diante.

Esta propriedade foi descoberta em 1774 pelo matemático francês nascido da Itália Joseph Louis Lagrange (1736-1813), que é responsável por muitos trabalhos em Teoria dos Números e em Mecânica, e que também estudou a estabilidade do sistema solar.

8. Soma relâmpago

A soma de todos os números de Fibonacci, do primeiro ao n- ésimo, é simplesmente igual ao

(n+2)-ésimo número menos 1. Por exemplo, a soma dos dez primeiros números,

1 + 1 + 2 + 3 + + 5 + 8 + 13 + 55 + 143

é igual ao décimo segundo número (144) menos 1.

Fonte bibliográfica:

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: UNICAMP, 2004.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blucher, 1986.

LIVIO, Mario. *Razão Áurea. A história de Fi*. Rio de Janeiro: Record, 2011.