Suites numériques

Outils mathématiques

P. DOSSANTOS-UZARRALDE

Définition et représentation graphique

Exemple : On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, . . . On note (u_n) l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :

$$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \dots$$

On a ainsi défini une suite numérique. On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{cccc} u: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Définition : Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
u_n est appelé le terme de rang n de cette suite (ou d'indice n).

Générer une suite numérique par une relation de récurrence

Exemples :

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs. Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$\begin{array}{lllll} u_0 & = & 2 \times 0 & = & 0 \\ u_1 & = & 2 \times 1 & = & 2 \\ u_2 & = & 2 \times 2 & = & 4 \\ u_3 & = & 2 \times 3 & = & 6 \end{array}$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $v_n = 3n^2 - 1$. Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$\begin{array}{lllll} v_0 & = & 3 \times 02 - 1 & = & -1 \\ v_1 & = & 3 \times 12 - 1 & = & 2 \\ v_2 & = & 3 \times 22 - 1 & = & 11 \\ v_3 & = & 3 \times 32 - 1 & = & 26 \end{array}$$

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

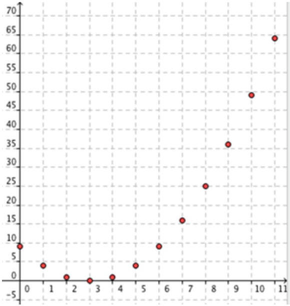
Sommaire.

Sens de variation

Définition : Soit un entier p et une suite numérique (u_n).

- La suite (u_n) est croissante à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est décroissante à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple : On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite (u_n) :



	A	B
1	n	u_n
2	0	9
3	1	4
4	2	1
5	3	0
6	4	1
7	5	4
8	6	9
9	7	16
10	8	25
11	9	36
12	10	49
13	11	64
14		
15		
16		

On peut conjecturer que cette suite est croissante pour $n \geq 3$.

Exercice

Étudier les variations des suites

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 4n + 4$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on donne la suite (vn) définie par : $v_n = 1/n(n+1)$. Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice

1 - On commence par calculer la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - (n^2 - 4n + 4) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4 \\ &= 2n - 3 \end{aligned}$$

On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $2n - 3 \geq 0$ donc pour$n \geq 1,5$.
Ainsi pour $n \geq 2$ (n est entier), on a $u_{(n+1)} - u_n \geq 0$.
On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite (u_n) est croissante.

2) On commence par calculer le rapport v_{n+1}/v_n :
$v_{n+1}/v_n = (1/(n+1)(n+2))/(1/n(n+1)) = n(n+1)/(n+1)(n+2) = n/(n+2)$ Or $0 \leq n \leq n+2$, on a :$v_{n+1}/v_n < 1$ et donc $v_{n+1} < v_n$ (car $v_n > 0$). Soit : $v_{n+1} - v_n < 0$ et on en déduit que (v_n) est décroissante.

Sens de variation

Propriété : Soit une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Soit un entier p.

- Si f est croissante sur l'intervalle $[p, +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $[p, +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p

Sommaire.

Suite convergente

Exemple :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = (2n+1)/n$.
On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	2,5	2,333	2,25	2,2	2,1	2,067	2,02	2,002

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2. On dit que la suite (u_n) converge vers 2 et on note :

$$lim_{n \to +\infty} u_n = 2.$$

Suite divergente

• Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 1$.
Calculons quelques termes de cette suite :

$$\begin{array}{lclcl} u_0 & = & 0^2 + 1 & = & 1, \\ u_1 & = & 1^2 + 1 & = & 2, \\ u_2 & = & 2^2 + 1 & = & 5, \\ u_{10} & = & 10^2 + 1 & = & 101, \\ u_{100} & = & 100^2 + 1 & = & 10001. \end{array}$$

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand. On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note : $lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

• Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = (-1)^n v_n$ et $v_0 = 2$. Calculons les premiers termes de cette suite :

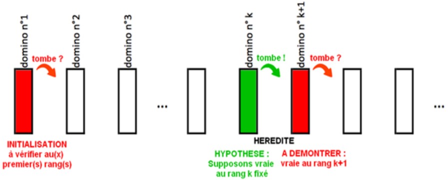
$$\begin{array}{lclcl} v_1 & = & (-1)^0 v_0 & = & 2 \\ v_2 & = & (-1)^1 v_1 & = & -2 \\ v_3 & = & (-1)^2 v_2 & = & 2 \\ v_4 & = & (-1)^3 v_3 & = & -2 \\ v_5 & = & (-1)^4 v_4 & = & 2 \end{array}$$

Lorsque n devient grand, les termes de la suite ne semblent pas se rapprocher vers une valeur unique. On dit que la suite (v_n) diverge.

Sommaire.

Principe

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle : lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.



Si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent. Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino (k) tombe alors le domino suivant (k+1) tombe également.

Définition : Une propriété est dite héréditaire à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier k+1.

Principe du raisonnement par récurrence :
Si la propriété P est : - vraie au rang n_0 (Initialisation), - héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité), alors la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation $n_0 = 1$). L'hérédité est vérifiée.On en déduit que tous les dominos tombent.

Récurrence : exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : $(0+1)^2 = 1 = u_0$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

- Hypothèse de récurrence : Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k = (k+1)^2$.
- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$, soit : $u_{k+1} = (k+1+1)^2$, soit encore :$u_{k+1} = (k+2)^2$

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3, \text{par définition} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3, \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

Conclusion :
La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n = (n+1)^2$.

Récurrence et monotonie

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}\,u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante monotone.

On va démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \geq u_n$

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{3}\,u_0 + 2 = 1/3 \times 2 + 2 = 8/3 > 2$ donc $u_1 \geq u_0$

Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :
  Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_{k+1} \geq u_k$.
- Démontrons que la propriété est vraie au rang k+1 : $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.
  On a $u_{k+1} \geq u_k$ donc : $\frac{1}{3}\,u_{k+1} \geq \frac{1}{3}\,u_k$ et donc $\frac{1}{3}\,u_{k+1} + 2 \geq \frac{1}{3}\,u_k + 2$
  soit $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

Conclusion :
La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_{n+1} \geq u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

Limite infinie d'une suite

Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a,\ +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définitions : - On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a, +\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$lim_{n\to+\infty}\ u_n = +\infty$$

. - On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty,\ b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$lim_{n\to+\infty}\ u_n = -\infty$$

- Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.
En appliquant cet algorithme avec A = 100, on obtient en sortie n = 3.
A partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

Limite finie d'une suite

Exemple :
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + 1/n^2$ a pour limite 1. Les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$lim_{n \to +\infty} u_n = L.$$

Une telle suite est dite convergente.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarque : Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie. Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

Limites des suites usuelles

Propriétés :

$$
\begin{array}{lllllllll}
lim_{n \to +\infty} n & = & +\infty & lim_{n \to +\infty} nr & = & +\infty & lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} & = & +\infty \\
lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} & = & 0 & lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} & = & 0 & lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & = & 0
\end{array}
$$

Limites et comparaison

Théorème 1 :
Soit (u_n) et (vn) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Théorème 2 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement : Théorème des gendarmes :
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et,$lim_{n\to+\infty} u_n = lim_{n\to+\infty} w_n = L$ alors $lim_{n\to+\infty} v_n = L$

Sommaire.

Définitions

Définitions :

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :
• Les suites de terme général $cosn$ ou $(-1)^n$ sont bornées car minorées par -1 et majorées par 1.
• La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Exercice
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

Initialisation : $u_0 = 2 < 3$
La propriété est donc vraie pour n = 0.

Hérédité :
• Hypothèse de récurrence :
Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k < 3$.
• Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $u_{k+1} < 3$.
On a : $u_k < 3$ donc $\frac{1}{3}u_k < \frac{1}{3}3$ et donc $\frac{1}{3}u_k + 2 < \frac{1}{3}3 + 2 = 3$. Soit : $u_{k+1} < 3$

Conclusion : La propriété est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n < 3$.

Théorème de la limite monotone

Définitions :

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$