Outils mathématiques

Les Equations Différentielles

P. DOSSANTOS-UZARRALDE

ESLSCA

La modélisation par équations différentielles est une méthode mathématique puissante utilisée pour décrire des systèmes dynamiques dans lesquels les taux de variation sont fondamentaux, tels que la croissance d'une population ou la planète en orbite.

Une équation différentielle particulièrement simple est l'équation $y' = a(x)\, y$, où a est une constante réelle.
Elle modélise des situations très diverses, où la vitesse de variation d'une quantité est proportionnellle à cette quantité même :

- La taille d'une population ayant un taux d'accroissement constant.
- L'évolution d'un avoir placé à intérêts composés à taux fixe.
- L'évolution de la masse d'une substance radio-active (dans ce cas, la constante est négative ; elle dépend de la substance et de l'unité de temps choisie).
- etc...

Exemples issus de la physique

Les lois élémentaires de la physique fournissent des quantités de très beaux exemples d'équations différentielles, la plupart du temps du second ordre.
Les plus classiques :

- Décharge d'un condensateur : Si un circuit constitué d'une résistance $\mathcal{R}$, d'un condensateur de capacité $\mathcal{C}$ et d'une bobine d'inductance $\mathcal{L}$ est monté en série aux bornes d'un générateur fournissant une tension variable $f(t)$, la charge $\mathcal{Q}(t)$ du condensateur vérifie l'équation :

$$\mathcal{L}\mathcal{Q}'' + \mathcal{R}\mathcal{Q}' \frac{1}{\mathcal{C}}\mathcal{Q} = f(t)$$

  (ici, les dérivées $\mathcal{Q}''$ et $\mathcal{Q}'$ sont relatives à la variable t) .

- Si une masse m est suspendue à un ressort ayant un coefficient de rappel F et un amortissement constant k, sa position vérifie l'équation :

$$mh'' + kh' + Fh = 0$$

- Un pendule, constitué d'une petite bille, se meut dans un plan vertical au bout d'une fine tige rigide de longueur l dont l'autre extrémité est fixe. Notons $\mathcal{A}(t)$ l'angle de la tige repéré depuis la position d'équilibre. $\mathcal{A}(t)$ vérifie l'équation :

$$\mathcal{A}'' = -(\frac{g}{l}) \sin \mathcal{A}$$ g désigne l'accélération de la pesanteur

Définition

- Une équation différentielle est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées
- Une équation (différentielle ordinaire : EDO) est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable.
- Le terme ordinaire est utilisé par opposition au terme équation différentielle partielle (équation aux dérivées partielles : EDP) où les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables.
- L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Sommaire.

Définition

- On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur un intervalle $\mathcal{I}$, une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

où l'inconnue y est une fonction de x dérivable que l'on cherche à déterminer et où a et b sont deux fonctions continue sur un intervalle $\mathcal{I}$

Exemples :

- $(E1) : y' + \frac{1}{x}y = x$ équation différentielle du premier ordre.
- $(E2) : y' = f(x)$ équation différentielle du premier ordre incomplète en y.
- $(E3) : y' - 2y = 0$ équation différentielle du premier ordre à coefficient constant sans second membre ou incomplète en x.
- $(E4) : y' + xy = 0$ équation différentielle du premier ordre sans second membre ou homogène.

$y' = f(x)$

Définition : Les solutions de l'équation différentielle $y' = f(x)$ incomplète en y sur $\mathcal{I}$ sont toutes les fonctions $y : x \mapsto F(x)$ où F est une primitive de la fonction f sur $\mathcal{I}$.

Méthode : La résolution de ces équations revient à la recherche d'une primitive de f sur $\mathcal{I}$.

Exemple : Les solutions de l'équation $y' = \frac{1}{x+1}$ sur $\sqsupset -1; \infty \sqsubset$ sont les fonctions $F : x \mapsto ln(x+1) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Propriété : Dire que F est une primitive de f, revient à dire que F est une solution de l'équation différentielle $y' == f$.

$y' = a(x)\,y$

Soit $a(x)$ une fonction continue sur un intervalle. Les solutions de l'équation différentielle homogène : $y' = a(x)y$, sont toutes les fonctions $y : x \mapsto ke^{A(x)}$, avec $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur $\mathcal{I}$ et $k \in \mathbb{R}$

Cas particulier : $a(x) = a$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{ax}$, où k est une constante réelle quelconque.

$f(x) = ke^{ax}$ alors $f'(x) = a \times ke^{ax} = af(x)$ f est donc solution de l'équation différentielle $y' = a\,y$,.

$y' = a\,y + b$

Propriété : La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b \quad (a \neq 0)$.
Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto u(x) + v(x)$$

où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$
et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Corollaire : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Remarque : L'équation $y' = a\,y+b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

$y' + a(x)\,y = b(x)$

Problème de Cauchy :
Soit $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions continue sur un intervalle $\mathcal{I}$. Soit x_0 et y_0 deux réels. Le système

$$\begin{cases} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y_0 & = & y(x_0) \quad \text{condition initiale} \end{cases}$$

admet une unique fonction solution y sur $\mathcal{I}$

Théorème : Linéarité
Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle $\mathcal{I}$. Soit $A(x)$ une primitive de la fonction $a(x)$.
Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ sont les fonctions y tels que :

$$y = y_{part} + k\,e^{-A(x)}$$

- où y_{part} est une solution particulière de l'équation (E) et $k$un réel.
- $k\,e^{-A(x)}$ est la solution générale de l'équation homogène.

$y' + a(x)\, y = b(x)$

Problème de Cauchy : Méthode

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y : x \mapsto ke^{-A(x)}$, avec $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur $\mathcal{I}$ et $k \in \mathbb{R}$, k étant une constante.

La méthode de résolution consiste à faire "varier" la constante k.
On pose alors : $y(x) = k(x)e^{-A(x)}$. L'équation $y + a(x)y = b(x)$ devient alors :

$$\begin{aligned}
k'(x)e^{-A(x)} - k(x)A'(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} &= b(x) \quad (A' = a) \leftrightarrow \\
k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} &= b(x) \leftrightarrow \\
k'(x)e^{-A(x)} = b(x) &\leftrightarrow k'(x) = b(x)e^{A(x)}
\end{aligned}$$

k est donc une primitive de la fonction be^A. Cette primitive existe bien car la fonction be^A est une fonction continue sur $\mathcal{I}$ comme produit et composée de fonctions continue sur $\mathcal{I}$.
La condition initiale :$y_0 = y(x_0) \leftrightarrow y_0 = k(x_0)e^{-A(x_0)} \leftrightarrow k(x_0) = y_0 e^{A(x_0)}$. Le système admet donc une unique solution $y = ke^{-A}$ telle que k est la primitive de be^A qui vérifie $k(x_0) = y_0 e^{A(x_0)}$

Sommaire.

Définition

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) sur un intervalle $\mathcal{I}$, une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$$

où l'inconnue y est une fonction de x dérivable deux fois que l'on cherche à déterminer et où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$ et d une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I}$

Exemples :

- $(E1) : y'' + y' - 2y = 10sinx$
- $(E2) : 2y'' + y' + 2y = 0$ équation homogène du second ordre.
- $(E3) : y'' + y = 3x^2$ équation du second ordre incomplète en y'

Soit (E) une équation différentielle linéaire du second ordre homogène de la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = 0$$

On appelle polynôme caractéristique de l'équation (E), le polynôme P défini par :

$$P(X) = ax^2 + bx + c$$

Soit Δ le discriminant du polynôme PLes solutions de l(E) dépend des racines de P.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet une racine double r_0, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = (\lambda + \mu x)\, e^{r_0\, x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = r_0 + i\omega$ et $r_2 = r_0 - i\omega$, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = \lambda e^{r_0 x}[sin(\omega x + \phi)], \quad (\lambda, \phi) \in \mathbb{R}^2$$

ou $$y(x) = e^{r_0 x}[\lambda cos(\omega x) + \mu sin(\omega x)], (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$