Dérivation - Fonctions

Outils mathématiques

P. DOSSANTOS-UZARRALDE

Sommaire.

Dérivées des fonctions usuelles

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.
Pour

$$h \neq 0 : \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

Or :

$$lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = lim_{h \to 0} 2a + h = 2a$$

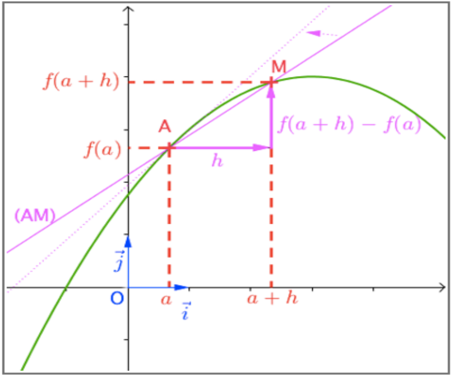
Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à 2a.
On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$. On dit que f est dérivable sur $\mathcal{I}$ si elle est dérivable en tout réel x de $\mathcal{I}$. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Fonction dérivable

Soit une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{I}$.
Soit un réel a appartenant à $\mathcal{I}$.
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$. La pente de la droite (AM) est égale à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Lorsque le point M se rapproche du point A, la pente de la droite (AM) est égale à la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Définition :
On dit que la fonction fest dérivable en a s'il existe un nombre réel $\mathcal{I}$, tel que :

$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

L est appelé le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Formules de dérivation des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a\ ,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax\ ,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

formules d’opération sur les fonctions dérivées

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercises

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

1. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$
2. $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$
3. $h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

Exemples correction

1. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$
   On pose $u(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x - 1$ et $u'(x) = 6x + 4$ $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
   $f'(x) = \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}}$
   $f'(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$

2. $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$
   On pose $g(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3$ $u'(x) = 4x + 3$
   $g'(x) = 4u'(x)(u(x))^3 = 4(4x+3)(2x^2 + 3x - 3)^3$

3. $h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$
   On pose $h(x) = 2e^{(u(x))}$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$
   $h'(x) = 2u'(x)e^{u(x)} = \frac{-2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème :
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$.

1. Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur $\mathcal{I}$.
2. Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur $\mathcal{I}$.

Théorème :
Soit une fonction fdéfinie et dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$.
Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de $\mathcal{I}$ alors f admet un extremum en $x = c$.

Sommaire.

Domaine de définition

Définition

Pour une fonction $f(x)$ donnée, on appelle ensemble de définition l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer cette expression.

Méthode

3 types d'expressions posent problème :

- L'expression de f est de la forme $f(x) = \frac{N}{D}$. f est définie lorsque $D \neq 0$ (on ne peut pas diviser par zéro)
- L'expression de f est de la forme $f(x) = \sqrt{}$
  f est définie lorsque $R \geqslant 0$ (la racine carrée n'existe que pour des nombres positifs ou nuls)
- L'expression de f est de la forme $f(x) = \frac{N}{\sqrt{R}}$
  f est définie lorsque $R > 0$ (c'est une combinaison des 2 cas précédents...)

Dans les autres cas étudiés en seconde et en première, les fonctions sont en général définies sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'on peut calculer l'image de n'importe quel nombre réel.

Exemples

- D_f de la fonction $x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$

f est définie pour toutes les valeurs de x différentes de 3.
On écrit $D_f = \mathbb{R} \backslash \{3\}$ ou encore $D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

- D_f de la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$

f est définie si et seulement si l'expression située sous le radical est positive ou nulle. ici, si et seulement si $x - 1 \geqslant 0$ donc $x \geqslant 1$.
L'ensemble de définition est donc $D_f = [1; +\infty[$
L'intervalle est fermé en 1 car x peut prendre la valeur 1.

- D_f de la fonction $f : x \mapsto \frac{x+3}{\sqrt{3x-2}}$ (Radical au dénominateur).

f est définie si et seulement si l'expression située sous le radical est strictement positive.
Ici, si et seulement si $3x - 2 > 0$. Donc si et seulement si $3x > 2$.
L'ensemble de définition est donc $D_f = \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$
L'intervalle est ouvert en 2/3 car x ne peut pas prendre la valeur 2/3.

Variation des fonctions

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$

1. Dire que f est croissante sur $\mathcal{I}$ signifie que pour tous réels a et b de $\mathcal{I}$: si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$
2. Dire que f est décroissante sur $\mathcal{I}$ signifie que pour tous réels a et b de $\mathcal{I}$: si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$
3. Dire que f est constante sur $\mathcal{I}$ signifie que pour tous réels a et b de $\mathcal{I}$: $f(a] = f(b)$
4. Dire que f est monotone sur $\mathcal{I}$ signifie que f est soit croissante sur $\mathcal{I}$, soit décroissante sur $\mathcal{I}$, soit décroissante sur $\mathcal{I}$

Définitions :

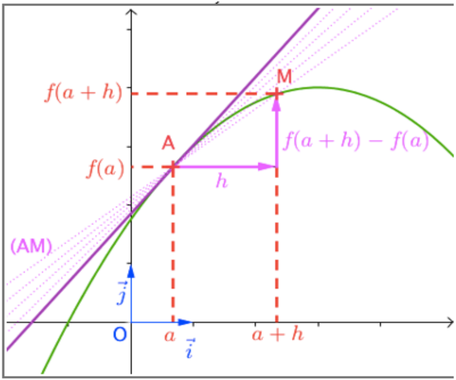
Soit fune fonction de l'intervalle $\mathcal{I}$ a et b deux nombres réels de $\mathcal{I}$

1. Dire que f admet un maximum M en a de $\mathcal{I}$ signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle $\mathcal{I}$, $f(x) \leq M = f(a)$
2. Dire que f admet un minimum m en b de $\mathcal{I}$ signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle $\mathcal{I}$, $f(x) \geq m = f(b)$

Tangente

Soit une fonction fdéfinie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à $\mathcal{I}$. $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a. A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f

Définition :
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$



une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

.

Cas particulier

- **fonction valeur absolue**

1. Valeur absolue d'un nombre (rappels)

Exemples :

- La valeur absolue de –5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition :

La valeur absolue d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre $-A$ si Ae st négatif.

La valeur absolue de A se note $|A|$.

Exemple :

$$|x-5| = \left\{ \begin{array}{lll} x-5 & si & x \geq 5 \\ 5-x & si & x \leq 5 \end{array} \right.$$

2. fonction valeur absolue

Définition :

La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

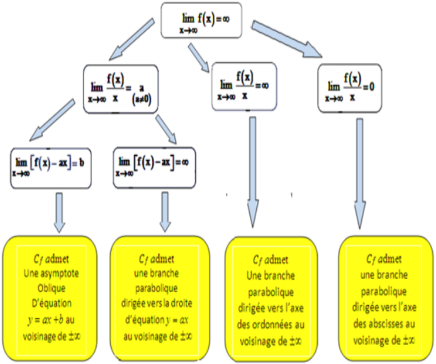
Sommaire.

Limite d'une fonction à l'infini

Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

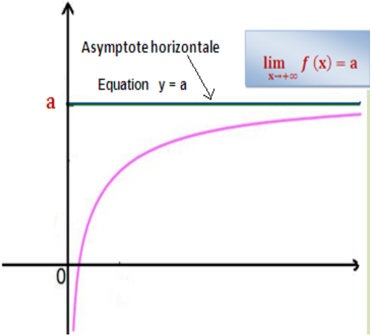
On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty, b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :$lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



Limite d'une fonction à l'infini

Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite a en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant a contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $lim_{x\to+\infty} f(x) = a$.

Définition :
La droite d'équation $y = a$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $lim_{x\to+\infty} f(x) = a$
La droite d'équation $y = a$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $lim_{x\to-\infty} f(x) = a$.

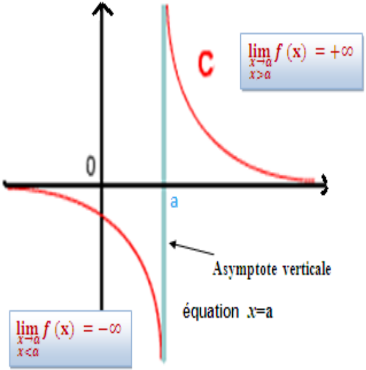


- Etudier les asymptotes de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = lim_{x\to-\infty} (x^2)/(x^2-4) = lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
$$lim_{x\to+\infty} f(x) = lim_{x\to+\infty} (x^2)/(x^2-4) = lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Limite d'une fonction en un réel a

Définition :
La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f, si $lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $lim_{x \to +a} f(x) = -\infty$



- Etudier les asymptotes de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

$lim_{x \to 1-} f(x) = lim_{x \to 1-} (1)/(x-1) = lim_{x \to 1-} \frac{1}{0^-} = -\infty$

$lim_{x \to 1+} f(x) = lim_{x \to 1+} (1)/(x-1) = lim_{x \to 1+} \frac{1}{0+} = +\infty$

Point d'inflexion, convexité et dérivées

Point d'inflexion :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère et $a \in \mathcal{I}$.
Le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si la courbe traverse sa tangente en A.
C'est le point où s'opère le changement de concavité de la courbe $\mathcal{C}_f$

Convexité :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$, représentée par sa courbe $\mathcal{C}_f$:
La fonction f est convexe sur $\mathcal{I}$ si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

Convexité et dérivée seconde :

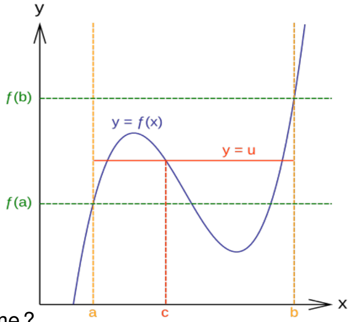
Soit f une fonction dérivable sur $\mathcal{I}$, f est deux fois dérivable sur $\mathcal{I}$ La dérivée de f', notée f", est appelée dérivée seconde de f.

Propriété
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $f\mathcal{I}$.

- Si pour tout réel x de $\mathcal{I}$, $f''(x) > 0$, alors f est convexe sur $\mathcal{I}$;
- Si pour tout réel x de $\mathcal{I}$, $f''(x) < 0$, alors f est concave sur $\mathcal{I}$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Pour toute application continue $a, b] \to \mathbb{R}$ et tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.



Comment savoir quand il faut utiliser ce théorème ?
La question qui fait appel au TVI est presque toujours formulée de la même façon : *montrer que l'équation* $f(x) = k$ *admet une unique solution sur* $[a,\ b]$. Dans la plupart des cas il s'agit de l'équation $f(x) = 0$. Par exemple : *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution* α *sur* $[0,\ +\infty[$.

A quoi cela va-t-il servir ?
Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $f(x)$ prend la valeur 0 : cela correspond à un changement de signe de $f(x)$. Alors l'analyse du tableau des variations de f, couplée à la recherche des zéros, nous donne le signe de $f(x)$.