<u>Exercice 1</u> : Sens de variation
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{R}$ par $u_n = 5\sqrt{n} - 3$ et $v_n = \frac{-2}{n+1} + 1$

1. Calculer les deux premiers termes de chaque suite.
   $u_0 = 5\sqrt{0} - 3 = -3, \quad u_1 = 5\sqrt{1} - 3 = 2$
   $v_0 = \frac{-2}{0+1} + 1 = -1 \quad v_1 = \frac{-2}{1+1} + 1 = 0$

2. Calculer le quinzième terme de chaque suite.
   $u_{14} = 5\sqrt{14} - 3$
   $v_{14} = \frac{-2}{14+1} + 1 = \frac{-2}{15} + 1 = \frac{13}{15}$

3. Etudier le sens de variation des suites
   $u_{n+1} - u_n = 5\sqrt{n+1} - 3 - (5\sqrt{u_n} - 3) = 5\sqrt{n+1} - 5\sqrt{n} = 5(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
   $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$: la suite (u_n) est donc croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{-2}{n+2} + 1 - (\frac{-2}{n+1} + 1) \\ &= \frac{-2}{n+2} + \frac{2}{n+1} \\ &= 2\,(\frac{-(n+1)+(n+2)}{(n+2)(n+1)}) \\ &= 2\,\frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc croissante.

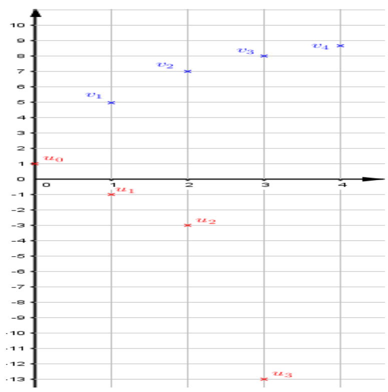
<u>Exercice 2</u> : Sens de variation
On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n} \end{cases}$$

1. Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.

(u_n)	(v_n)
$u_0 = 1$	$v_1 = 5$
$u_1 = -1$	$v_2 = 5 + \frac{2}{1} = 7$
$u_2 = -3$	$v_3 = 7 + \frac{2}{2} = 8$
$u_3 = -13$	$v_4 = 8 + \frac{2}{3} = \frac{26}{3}$

2. Représenter graphiquement ces quatre premiers termes sur un même graphique.



3. A l'aide de la calculatrice, calculer u_{10} et v_{10} et (on pourra donner une valeur approchée à 10^{-2} près).
   $u_10 = -7.47\,10^{144} \quad v_10 = 6.66$

4. Etudier le sens de variation des suites $u_n)$ et (v_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -u_n^2 + u_n - 1 - u_n \\ &= -u_n^2 - 1 \\ &< 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & v_n + \frac{2}{n} - v_n \\ & = & \frac{2}{n} \\ & > & 0 \end{array}$$

La suite (v_n) est donc croissante.

<u>Exercice 3</u> : Sens de variation
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$

1. Calculer les deux premiers termes de cette suite. $u_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad u_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$
2. Etudier le sens de variation de la suite

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \\ & = & \frac{1}{(n+1)^2} \\ & > & 0 \end{array}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

<u>Exercice 4</u> : Raisonnement par récurrence
Démontrer que pour tout entier naturel on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \dots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation

$$\begin{array}{ccc} u_0 = 0 & = & \frac{0(0+1)}{2} \\ u - 1 = 0 + 1 = 1 & = & \frac{1(1+1)}{2} = 1 \\ u_2 = 0 + 1 + 2 = u_1 + 2 = 3 & = & \frac{2(2+1)}{2} \end{array}$$

Hérédité : On le pose vraie au rang p : $0 + 1 + 2 + 3 + ...p \quad \Rightarrow S_p = \frac{p(p+1)}{2}$
On le vérifie pour $p+1$:

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + p + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \frac{p(p+1) + 2p + 2}{2} = \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 = S_p + p + 1$$

La propriété est donc vraie au rang $p+1$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0. En la supposant vraie au rang p, elle est encore vraie au rang suivant. Par conséquent, pour tout $n \in, \mathbb{N}$, on a $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Exercice 5</u> : Raisonnement par récurrence
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 2$.
Initialisation : c'est vérifié Ã l'ordre 0 $0 < u_0 = 1 < 2$. On le vérifie Ã l'ordre 1 : $u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$
A l'ordre 2 : $u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Hérédité : On le pose vraie au rang p : $u_p = \sqrt{2 + u_{p-1}}$ donc $0 < u_p < 2$
On le vérifie au rang $p+1$: $2 < 2 + u_p < 4$ $\sqrt{2} < \sqrt{2 + u_p} < 2$ donc $\sqrt{2} < u_{p+1} < 2$. De plus $0 < \sqrt{2}$ donc $0 < \sqrt{2} < u_{p+1} < 2$
La propriété est vraie au rang $p+1$

<u>Exercice 6</u> : Opérations sur les limites
Déterminer les limites suivantes :

$$a)\ lim_{n \to +\infty}\ n^2 - 5n + 1 \qquad b)\ lim_{n \to +\infty}\ n - 3\sqrt{n} \qquad c)\ lim_{n \to +\infty}\ \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$$
$$d)\ lim_{n \to +\infty}\ \frac{3n^2+n}{n+3} \qquad e)\ lim_{n \to +\infty}\ \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

a $lim_{n \to +\infty}\ n^2 - 5n + 1$
$lim_{n \to +\infty}\ n^2 = +\infty$ et $lim_{n \to +\infty}\ -5n + 1 = -\infty$
F.I. du type " $\infty - \infty$".

Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :
$n^2 - 5n + 1 = n^2(1 - 5n/n^2 + 1/n^2) = n^2(1 - 5/n + 1/n^2)$
Or $lim_{n \to +\infty}\ 5/n = 0$ et $lim_{n \to +\infty}\ 1/n^2 = 0$ donc $lim_{n \to +\infty}\ 1 - 5/n + 1/n^2 = 1$ par limite d'une somme.
Et $lim_{n \to +\infty}\ n^2 = +\infty$ donc $lim_{n \to +\infty}\ n^2(1 - 5/n + 1/n^2) = +\infty$ par limite d'un produit.
Soit : $lim_{n \to +\infty}\ n^2 - 5n + = +\infty$.

b $lim_{n \to +\infty}\ n - 3\sqrt{n}$
$lim_{n \to +\infty}\ n = +\infty$ et $lim_{n \to +\infty}\ 3\sqrt{n} = +\infty$
F.I.du type "$\infty - \infty$".
Levons l'indétermination : $n - 3\sqrt{n} = n(1 - (3\sqrt{n})/n) = n(1 - (3(\sqrt{n})^2)/(n\sqrt{n})) = n(1 - 3/\sqrt{n})$
Or $lim_{n \to +\infty}\ n = +\infty$ et $lim_{n \to +\infty}\ 1 - 3/\sqrt{n} = 1$
donc par limite d'un produit $lim_{n \to +\infty}\ n(1 - 3/\sqrt{n}) = +\infty$
Soit : $lim_{n \to +\infty)}\ n - 3\sqrt{n} = +\infty$

c $lim_{n\to+\infty}\ \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ - $lim_{n \to +\infty}\ 5n^2 + 4 = +\infty$ et $lim_{n \to +\infty}\ 4n^2 + 3n = +\infty$ F.I. "∞/∞ ".
Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :
$\frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{(5+4/n^2}{4+3/n}$
Or $lim_{n \to +\infty}\ 4/n^2 = 0$ donc $lim_{n \to +\infty}\ 5 + 4/n^2 = 5$ par limite d'une somme. - De même : $lim_{n \to +\infty}\ 4 + 3/n = 4$.
Donc, par limite d'un quotient : $lim_{n \to +\infty}\ (5+4/n^2)/(4+3/n) = 5/4$. Et donc : $lim_{n \to +\infty}\ (5n^2+4)/(4n^2+3n) = 5/4$.

d $lim_{n \to +\infty}\ \frac{3n^2+n}{n+3}$
$lim_{n \to +\infty}\ 3n^2 + n = +\infty$ et $lim_{n \to +\infty}\ n + 3 = +\infty$: F.I. du type "∞/∞".
Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :
$(3n^2 + n)/(n + 3) = \frac{n^2}{n} \times (3 + 1/n)/(1 + 3/n) = n \times (3 + 1/n)/(1 + 3/n)$
Or $lim_{n \to +\infty}\ 1/n = 0$ donc $lim_{n \to +\infty}\ 3 + 1/n = 3$ par limite d'une somme.
De même : $lim_{n \to +\infty}\ 1 + 3/n = 1$.
Donc, par limite d'un quotient : $lim_{n \to +\infty}\ (3+1/n)/(1+3/n) = 3$. Et donc $im_{n \to +\infty} n \times (3+1/n)/(1+3/n) = +\infty$ par limite d'un produit.
Soit $lim_{n \to +\infty}\ (3n^2 + n)/(n + 3) = +\infty$.

e $lim_{n \to +\infty}\ \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
$lim_{n \to +\infty}\ v_{n+2} = +\infty$ et $lim_{n \to +\infty}\ \sqrt{n} = +\infty$ Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination par la méthode de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+2}\sqrt{n} &= (\sqrt{n+2}\sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})/(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) && (1)\\
&= ((\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n})^2)/(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) && (2)\\
&= (n + 2 - n)/(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) && (3)\\
&= 2/(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) && (4)
\end{aligned}$$

Or par limite d'une somme $lim_{n \to +\infty}\ \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty$ Et donc : $lim_{n \to +\infty}\ 2/(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) = 0$ par limite d'un quotient.
Soit : $lim_{n \to +\infty}\ \sqrt{n+2}\sqrt{n} = 0$.