Intégration

Outils mathématiques

P. DOSSANTOS-UZARRALDE

Sommaire.

Primitive d'une fonction continue

1-Primitive d'une fonction

Exemple :
On considère les fonctions suivantes :

$$g: \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+3 \end{array} \quad et \quad f: \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+3x-1 \end{array}$$

On constate que $g(x) = 2x + 3 = f'(x)$.
On dit dans ce cas que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Définition :
f est une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I}$.
On appelle primitive de f sur $\mathcal{I}$, une fonction F dérivable sur $\mathcal{I}$ telle que $f = F'$.
Remarque :
Dans ces conditions, on a l'équivalence F a pour dérivée f et f a pour primitive F .
Exemple :
$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a,\ \ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$ pour $n < -1$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

Opérations et fonctions composées

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

Propriétés

- Linéarité : f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $\mathcal{I}$

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $\mathcal{I}$ alors

  - $F + G$ est une primitive de $f + g$,
  - kF est une primitive de kf avec k réel.

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

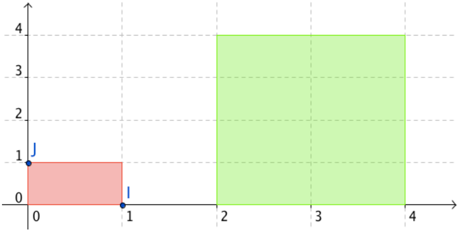
- f est une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur $\mathcal{I}$ alors pour tout réel C, la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur $\mathcal{I}$.

- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Sommaire.

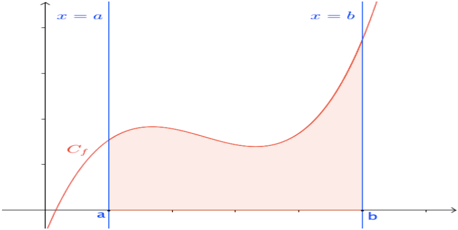
Intégrale et aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a. L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm2 par exemple).



Intégrale

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a; b]$ se note : $\int_a^b f(x)\,dx$ et on lit "intégrale de a à b de $f(x)\,dx$"

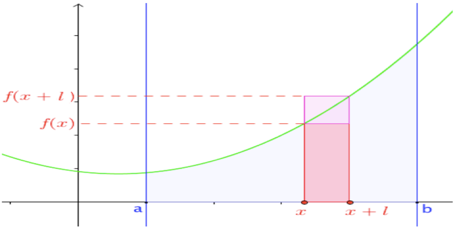
Intégrale

Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Définition : Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a, b]$. On partage l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$
Sur un sous-intervalle $[x, x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire $l \times f(x+l)$

Sur l'intervalle $[a, b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

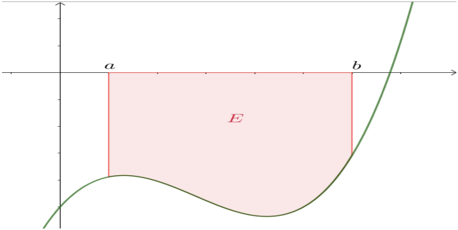


Fonctions de signe quelconque

Définition :
Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ défini par :

- si f est positive sur $[a, b]$: $I =$ aire(E),
- si f est négative sur $[a, b]$: $I =$ aire(E),

où E est la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



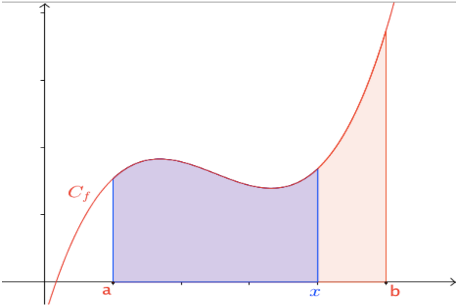
Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des réels de I.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. Relation de Chasles :
$\int_a^c f(x)\,dx =$
$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Integrales et Primitives

1- Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.



Integrales et Primitives

2 - Calcul d'intégrales

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\, b]$. Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration :
La fonction G définie sur $[a,\, b]$ par $G(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a,\, b]$ (Théorème).

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a,\, b]$, on a : $G(x) = F(x) + k, k \in \mathbb{R}$. En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. De plus, $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc $k = -F(a)$. Or $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a,\, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a,\, b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Integrales et primitives

3- Propriété de linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

1. Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

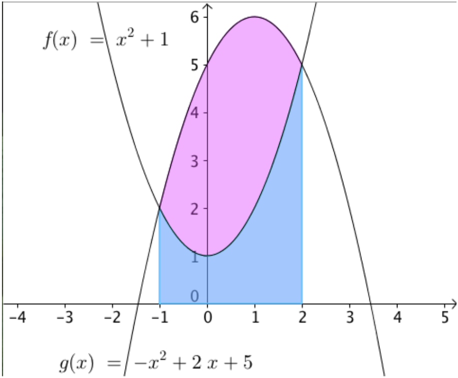
4- Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

1. Si, pour tout x de $[a,\, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b$ f$(x)\,dx \geq 0$
2. Si, pour tout x de $[a,\, b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Aire délimitée par deux courbes

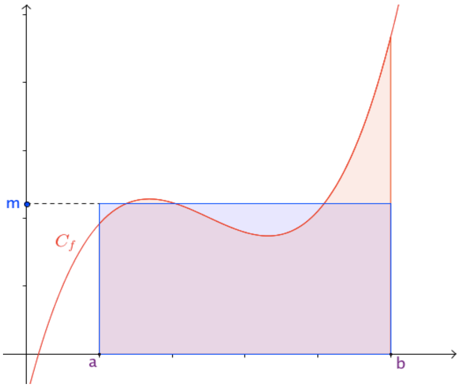
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$. On admet que pour tout x de $[-1; 2]$, on a $f(x) \leq g(x)$. Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1, 2]$.



Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\, b]$ avec $a \neq b$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,\, b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int f(x)\,dx$$



Sommaire.

Intégration par parties

Théorème : Soit u et v deux fonctions dérivables. Alors, on a :

$$\boxed{\int u'(x)\, v(x) dx = [u(x)\, v(x)] - \int u(x)\, v'(x) dx}$$

Intégrale : Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a,\, b]$. Alors, on a :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)\, v(x) dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x) dx}$$