RF3100 Matematikk og fysikk – Øving 8

Faglærer: Lars Sydnes, `lars.sydnes@westerdals.no`

Dato: 3. mai 2017. Tidsfrist: 18. mai 2017

Oppgave 1

Leveranse

I denne oppgaven kan du levere fortrinnsvis én fil med python- eller java-kode. Dersom du av en eller annen grunn ønsker å bruke et annet språk (som f.eks C++), bør det også kunne gå fint.

Dersom du skriver python-kode kan du god bruk for modulen `geometri3D.py`, samt modulene `animasjon.py` og `figur.py`, slik at du får visualisert løsningen. Disse modulene skal inneholde eksempler på bruk (se nederst i filene). Legg merke til at `animasjon.py` forutsetter at du har modulen `matplotlib` installert.

Koden finner du her: roterommet/kode/python/simulering.

Svar på spørsmpål i oppgavene kan leveres i et separat dokument, eller legges inn i kommentarer i koden.

Advarsel: I de første sidene er det samlet mye informasjon som kan være av interesse når man skal løse oppgaven. Mitt råd er at du først titter på oppgaven på side 7, og deretter slår opp det du behøver for å løse de ulike oppgavene.

Simulering

Det å simulere bevegelsen til en partikkel innebærer å beskrive tre funksjoner

$$x(t), y(t), z(t)$$

slik at partikkelen befinner seg i punktet $(x(t), y(t), z(t))$ ved tid t.

Bortsett fra i svært enkle tilfeller kan vi ikke beskrive bevegelsen helt eksplisitt, og langt mindre regne ut eksakt posisjon ved ethvert tidspunkt t. Det vi derimot kan gjøre er å finne tilnærmet korrekte posisjoner ved noen utvalgte tidspunkter $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$, d.v.s tall

$$x_i, y_i, z_i, \quad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

slik at partikkelen befinner seg *nær* punktet (x_i, y_i, z_i) ved tid t_i. På denne måten kan vi beskrive en stegvis bevegelse som ligner på den ekte bevegelsen.

La oss nå se på en partikkel som har masse m, posjonsvektor $\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ og fartsvektor $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$. Når vi benytter Newtons lover i simuleringen, vil legemet være utsatt for en kraft $\mathbf{f}$. Denne kraften vil gjerne være en funksjon av både posisjon $\mathbf{x}$ og fart $\mathbf{v}$, og også muligens t.

Newton's 2. lov forteller nå at

$$m\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}.$$

Siden $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$, og $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, kan vi nå beskrive bevegelsen på følgende måte:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{v}'(t) &= \frac{1}{m}\mathbf{f}. \end{aligned} \tag{I}$$

Dette kalles et system av to første ordens differensialligninger (fordi de inneholder førstederiverte), men siden $\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t)$, kan vi også skrive dette slik:

$$\mathbf{x}''(t) = \frac{1}{m}\mathbf{f} \tag{II}$$

Dette kalles en annen ordens differensialligning (fordi den inneholder andrederiverte).

Simulering ved Eulers metode I:

Nå skal vi regne ut $\mathbf{x}(t_i)$ når $t_i = ih$, der h er et tall som vi vil kalle *steglengden i simuleringen*. Her vil vi ta utgangspunkt i definisjonen av den deriverte, som faktisk sikrer medfører at

$$\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \tag{III}$$

er en brukbar tilnærming når steglengden h er et lite tall. Denne approksimasjonen kan vi skrive om slik:

$$\mathbf{x}(t+h) \approx \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}'(t) \cdot h$$

På tilsvarende måte kan vi skrive opp følgende approksimasjon:

$$\mathbf{v}(t+h) \approx \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}'(t) \cdot h$$

Nå er vi så heldige at (I) på side 2 gir oss formler for $\mathbf{x}'(t)$ og $\mathbf{v}'(t)$, og at vi dermed kan skrive

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+h) &\approx \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot h \\ \mathbf{v}(t+h) &\approx \mathbf{v}(t) + \frac{1}{m}\mathbf{f} \cdot h, \end{aligned}$$

der kraften $\mathbf{f}$ er regnet ut ved tid t.

Vi kan nå approksimere $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}(ih)$ $\mathbf{v}(t_i) = \mathbf{v}(ih)$ med verdier $\mathbf{x}_i$ og $\mathbf{v}_i$ der

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \cdot h \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \frac{1}{m}\mathbf{f}_i \cdot h, \end{aligned} \tag{IV}$$

der kraften $\mathbf{f}_i$ er regnet ut utifra at partikkelen befinner seg i punktet $\mathbf{x}_i$ ved tid $t = t_i = ih$ og da har hastighet $\mathbf{v}_i$.

Hvis vi nå skal simulere en planetbevegelse, så vil vi ta utgangspunkt i en startposisjon $\mathbf{x}_0$ og en startfart $\mathbf{v}_0$, og så bruke formlene (IV) til å regne ut $\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2$ osv.

Simulering ved Eulers metode II:

I det forrige punktet oppdaterte vi posisjonen som om farten var konstant (Se første ligning i (IV)). Her skal vi forbedre dette en smule ved å regne som om *akselerasjonen* er konstant. Hvis akselerasjonen hadde vært tilnærmet konstant lik $\mathbf{a}$ over tidsintervallet fra t til $t + h$, så skulle

$$\mathbf{x}(t+h) \approx \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot h + \mathbf{a} \cdot \frac{1}{2}h^2,$$

mens

$$\mathbf{v}(t+h) \approx \mathbf{v}(t) + \mathbf{a} \cdot h.$$

Siden akselerasjonen er lik $\frac{1}{m}\mathbf{f}$ (se ligning (II) på side 2), kan vi erstatte systemet (IV) med

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \cdot h + \frac{1}{2}h^2\frac{1}{m}\mathbf{f}_i \cdot \frac{1}{2}h^2 \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \frac{1}{m}\mathbf{f}_i \cdot h, \end{aligned} \tag{V}$$

På denne måten kan vi regne ut tilnærmede verdier $\mathbf{x}_i$ til posisjonsvektorene $\mathbf{x}(t_i)$ for $t_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$.

Semiimplisitt Euler:

Merkelig nok kan vi forbedre egenskapene til Eulers metode ved ganske enkelt å endre rekkefølgen på utregningene. F.eks. kan man regne ut posisjonen $\mathbf{x}_{i+1}$ ved hjelp av hastigheten $\mathbf{v}_{i+1}$. Da ser utregningen slik ut:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \frac{1}{m}\mathbf{f}_i \cdot h \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_{i+1} \cdot h \end{aligned} \tag{VI}$$

Dersom man velger å heller velger å oppdatere farten med den kraften som virker på partikkelen i posisjon $\mathbf{x}_{i+1}$, d.v.s. med kraften $\mathbf{f}_{i+1}$, så får man føkgende skjema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \cdot h \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \frac{1}{m}\mathbf{f}_{i+1} \cdot h \end{aligned} \tag{VII}$$

Begge disse metodene fungerer bedre enn (V), og de fungerer spesielt godt dersom man veksler mellom disse to metodene, d.v.s. at man bruker (VI) og (VII) i annenhvert steg.

Størmers metode:

Med utgangspunkt i (III) kan vi sette opp følgende approksimasjon for akselerasjonen:

$$\mathbf{x}''(t) \approx \frac{\mathbf{x}'(t+h) - \mathbf{x}'(t)}{h}$$

Inspirert av formelen (III) kan vi sette opp følgende alternative approksimasjon for den deriverte.

$$\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-h)}{h},$$

som også gir oss approksimasjonen

$$\mathbf{x}'(t+h) \approx \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}.$$

Når vi setter disse formlene inn i approksimasjonen for $x''(t)$ som vi ser over, så får vi

$$\mathbf{x}''(t) \approx \frac{\mathbf{x}'(t+h) - \mathbf{x}'(t)}{h} \approx \frac{\frac{\mathbf{x}(t+h)-\mathbf{x}(t)}{h} - \frac{\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t-h)}{h}}{h} = \frac{\mathbf{x}(t+h) - 2\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t-h)}{h^2}, \tag{VIII}$$

Denne approksimasjonen kan vi skrive om slik:

$$\mathbf{x}(t+h) \approx 2\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-h) + h^2\, x''(t).$$

Basert på denne formelen kan vi sette opp følgende iterasjonsskjema:

$$\mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + h^2 \frac{1}{m}\mathbf{f}_i. \tag{IX}$$

Som over er $\mathbf{f}_i$ kraften utregnet ved posisjon $\mathbf{x}_i$, og vi får som over tilnærmede verdier $\mathbf{x}_i$ for posisjonsvektorene $\mathbf{x}(t_i)$.

Når vi bruker Størmers metode, vil vi ta utgangspunkt i startposisjonen $\mathbf{x}_0$ og en påfølgende posisjon $\mathbf{x}_1$, som vi kan bruke til å regne ut $\mathbf{x}_2$. Deretter kan vi bruker $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ til å regne ut $\mathbf{x}_3$ osv.

En kompliksjon: Hvilken verdi skal vi bruke for $\mathbf{x}_1$? Et vanlig svar på dette er å regne ut $\mathbf{x}_1$ utifra $\mathbf{x}_0$ og $\mathbf{v}_0$ og akseleasjonen ved (V)-

Om steglengden

Steglengden h er en størrelse som vi i og for seg kan velge fritt i simuleringen, men ikke uten konsekvenser. Approksimasjonene (III) og (VIII) er best for små verdier av h, og slik vil det også være med simuleringene: Ved å velge en liten steglengde, kan vi som regel øke nøyaktigheten. Samtidig vil det da ta lengre tid å utføre simuleringen, i og med at det blir flere steg å regne ut.

Det faller utenfor rekkevidden av kurset vårt å gå dypere inn i forholdet mellom steglengde og nøyaktighet.

Solsystemet

Fysikken

Simuleringen bygger på Newtons 2. lov: $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ og Newtons gravitasjonslov:

$$\mathbf{f} = \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1).$$

Denne formelen gir kraften på et legeme med masse m_1 i posisjon $\mathbf{x}_1$ forårsaket av et legeme med masse m_2 i posisjon $\mathbf{x}_2$. G står her for Newtons gravitasjonskonstant.

I vår simulering skal $\mathbf{x}_2$ i utgangspuntket være solens posisjon, som for enkelhets skyld skal være konstant lik $[0, 0, 0]$. For en planet i posisjon (x, y, z) med masse m_1 vil gravitasjonen fra solen være

$$\mathbf{f} = \frac{G\, m_1 m_2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}[-x, -y, -z]$$

Med denne kraften får vi (ifølge Newtons 2.lov) akselerasjon

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m_1} = \frac{Gm_2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}[-x, -y, -z].$$

Måleenheter

I dagliglivet er vi vant med at det er praktisk å bruke kilogram, meter og sekund som målenheter for henholdvis masse, avstand og tid. I astronomisk sammenheng gir dette veldig upraktiske tall, og det er derfor vanlig å bruke andre måleenheter.

I denne simuleringen anbefales det derfor at vi bruker følgende måleenheter:

Måleenhet for masse: Solmasser

Vi bruker solen masse som måleenhet for masse, og bruker (i dette notatet) symbolet M som betegnelse på denne størrelsen. I denne måleenheten har jorden masse $m_{\text{jord}} \approx 3.0 \cdot 10^{-6} M$, altså tre milliontedelers solmasse. Legg også merke til at solen har masse $1M$ i dette systemet (pr. def).

Måleenhet for avstand: Astronomiske enheter (AU)

En astronomisk enhet er definert slik at den gjennomsnittlige avstanden mellom jorden og sola er omtrent lik 1 AU. Det betyr at $1\text{AU} \approx 150 \cdot 10^9$ meter.

Måleenhet for tid: Døgn

Vi bruker antall døgn som måleenhet for tid. I astronomisk sammenheng kan man definere et døgn på mange ulike måter, men her vil vi ta utgangspunkt i at 1 døgn er det samme som 86400 sekunder.

Koordinatsystem

Vi bruker et koordinatsystem der origo befinner seg i solsystemets massesenter.

Nøkkeldata

Her kommer endelig de tallene vi skal ta utgangspunkt i i simuleringen!

Når vi bruker andre måleenheter vil størrelser som f.eks. Newtons gravitasjonskonstant få en annen numerisk verdi. Her vil vi regne med den følgende numeriske verdien:

$$G \approx 2.959122 \cdot 10^{-4},$$

som har måleenheten $\frac{\mathrm{AU}^3}{\mathrm{M}}$

Solens posisjon, hastighet og masse

Vi tar utgangspunkt i at solen ligger i ro i origo $(0, 0, 0)$ og har masse $1M$.

Jordens posisjon, hastighet og masse

Den 3. mai 2017, ca. 30 sekunder over 2 (2017-May-03 12:00:00.0000 TDB) har jorden posisjonsvektor

$$\mathbf{x}_{\mathrm{jord}} \approx [-7.3423 \cdot 10^{-1}, -6.8292 \cdot 10^{-1}, -1.1499 \cdot 10^{-4}]$$

(Måleenhet = AU) og fartsvektor

$$\mathbf{v}_{\mathrm{jord}} \approx [1.1456 \cdot 10^{-2}, -1.2634 \cdot 10^{-2}, -5.7432 \cdot 10^{-8}]$$

(Måleenhet = AU/døgn).

Jordens masse $m_{\mathrm{jord}} \approx 3.0 \cdot 10^{-6} M$, der M er solens masse.

Månens posisjon og hastighet

Den 3. mai 2017, ca. 30 sekunder over 2 (2017-May-03 12:00:00.0000 TDB) har månen posisjonsvektor

$$\mathbf{x}_{\text{måne}} \approx [-7.3611 \cdot 10^{-1}, -6.8121 \cdot 10^{-1}, -1.6369 \cdot 10^{-4}]$$

(Måleenhet = AU) og fartsvektor

$$\mathbf{v}_{\text{måne}} \approx [1.033 \cdot 10^{-2}, -1.3049 \cdot 10^{-2}, -5.0483 \cdot 10^{-5}]$$

(Måleenhet = AU/døgn).

Månens masse $m_{\text{måne}} \approx 3.7 \cdot 10^{-8} M$, der M er solens masse.

Jupiters posisjon og hastighet

Den 3. mai 2017, ca. 30 sekunder over 2 (2017-May-03 12:00:00.0000 TDB) har jupiter posisjonsvektor

$$\mathbf{x}_{\text{jupiter}} \approx [-5.1236, -1.8557, 0.1223]$$

(Måleenhet = AU) og fartsvektor

$$\mathbf{v}_{\text{jupiter}} \approx [2.4814 \cdot 10^{-3}, -6.7369 \cdot 10^{-3}, -2.7516 \cdot 10^{-5}]$$

(Måleenhet = AU/døgn).

Jupiters masse $m_{\text{jupiter}} \approx 3.0 \cdot 10^{-4} M$, der M er solens masse.

(Alle data er hentet fra https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi)

Oppgaven

a) Skriv en metode `solGravitasjon(posisjon)` som regner ut akselerasjonen til et legeme i posisjon `posisjon` under påvirkning av solens gravitasjon.

Du skal benytte de astronomiske måleenhetene (AU,døgn,M) som er beskrevet i innledningen.

b) Skriv en metode `gravitasjon(posisjonA, posisjon B, masseB)` som regner ut akselerasjonen til et legeme i posisjon `posisjonA` som er påvirket av gravitasjonen fra et legeme med masse `masseB` som befinner seg i punktet `posisjonB`.

c) Benytt metodene over, samt opplysningene i innledningen (gjeldende 30 sekunder over 2 den 3.mai 2017) til å regne ut følgende:

- (i) Hvilken akselerasjon har jorden som følge av solens tiltrekninskraft?
- (ii) Hvilken akselerasjon har månen som følge av jordens tiltrekningskraft?
- (iii) Hvilken akselerasjon har månen som følge av solens tiltrekningskraft?
- (iv) Hvilken akselerasjon har månen som følge av den kombinerte tiltrekningskraften fra jorden og solen?

d) Benytt Eulers metode (V) til å simulere jordens bevegelse rundt solen, under følgende forutsetninger:

- (i) Solen ligger i ro i origo.

(ii) Jorden er kun påvirket av solens gravitasjon.

Benytt denne simuleringen til å anslå hvor lang tid jorden bruker på å bevege seg én runde rundt solen.

Tips: (1) Det kan være lurt å eksperimentere med ulike verdier av steglengden h. (2) For å måle tiden på én runde, kan man f.eks. måle hvor lang tid det er mellom hver gang jordens x-koordinat skifter fortegn.

e) Benytt Eulers metode (V) til å simulere jordens og månens bevegelse runds solen, under følgende forutsetninger:

(i) Solen ligger i ro i origo.
(ii) Jorden er kun påvirket av solens gravitasjon.
(iii) Månen er kun påvirket av jordens gravitasjon.

Benytt denne simuleringen til å anslå hvor lang tid månen bruker på å bevege seg én runde rundt jorden.

f) Benytt Eulers metode (V) til å simulere jordens og månens bevegelse runds solen, under følgende forutsetninger:

(i) Solen ligger i ro i origo.
(ii) Jorden er kun påvirket av solens gravitasjon.
(iii) Månen er påvirket av både jordens og solens gravitasjon.

Benytt denne simuleringen til å anslå hvor lang tid månen bruker på å bevege seg én runde rundt jorden.

g) (Ekstra) Undersøk hvordan simuleringene over oppfører seg når du bruker metoder som semiimplisitt Euler (VI) og Størmers metode (IX).

Denne oppgaven er altså meget åpen, og her er det opp til deg selv å se om du ser noen interessante fenomener.

h) (Ekstra) Undersøk hvordan simuleringene oppfører seg når du gjør ulike endringer i de fysiske forutsetningene, som f.eks:

(i) Tar hensyn til at jorden blir påvirket av månens gravitasjon.
(ii) Tar hensyn til påvirkningen fra planeten Jupiter.

i) (Ekstra)

Forestill deg at du lager et dataspill som involverer planetbevegelser som de vi har sett på i denne oppgaven. Drøft følgende spørsmål:

(i) Vil det være fornuftig å simulere planetbevegelsene med Eulers metode?
(ii) Vil det være bedre å bruke Størmers metode?
(iii) Kan det være hensiktsmessig å lage en simulering som ignorerer fysikken, men som fungerer fint i spillet?