Représentation intégrale pour l'équation de Helmholtz 2D

TP1 : à rendre Lundi 29 Septembre 2025

Philosophie des TPs : Le but de la série de trois TPs est de mettre en oeuvre un solveur BEM rapide pour l'équation de Hemholtz 2D. Nous choisissons le cas de la diffraction d'une onde incidente plane, i.e. $u^{inc} = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}$, par un disque de rayon a centré en $\mathbf{0}$ et de frontière Γ. $\mathbf{k}$ est le vecteur qui permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde (prendre un angle d'incidence nul pour le cas du disque). Le nombre d'onde du problème est donné par $k = |\mathbf{k}|$. Le domaine extérieur est noté Ω^+. Nous allons considérer le cas d'une condition à la frontière de type Dirichlet. Ce cas test a l'avantage de présenter une solution analytique simple. Le champ diffracté est donné par :

$$u^+(r,\theta) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad r \geq a. \tag{1}$$

Les J_n sont les fonctions de Bessel de première espèce et les $H_n^{(1)}$ les fonctions de Hankel du premier type. Une première question bonus est de chercher comment on prouve que le champ diffracté est donné sous cette forme, en utilisant la formule de Jacobi-Anger

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n J_n(kr) e^{in\theta}. \tag{2}$$

Cette déposition permet également de déterminer le nombre de modes à sélectionner dans (1).

Grandes étapes de la BEM :

1. Reformulation de l'EDP sous forme intégrale ;
2. Résolution d'une équation intégrale pour obtenir les traces des champs sur la frontière ;
3. Application de la représentation intégrale pour obtenir le champ dans tout le domaine (non-borné pour les problèmes extérieurs).

Le TP1 s'intéresse à l'étape 3. En effet, l'étape 1 est plus compliquée à mettre en oeuvre car elle nécessite la résolution d'un système et la gestion de singularités. L'étape 2 sera vue lors du TP2. Comme le résultat de l'étape 2 est normalement nécessaire à l'étape 3, nous ne pouvons considérer dans ce TP1 que des cas où nous connaissons la trace sur la frontière et que nous souhaitons en déduire le champ dans le domaine non-borné.

TP1 : Mise en oeuvre de la représentation intégrale

Dans ce TP, nous allons simplement mettre en oeuvre la représentation intégrale pour les formulations intégrales directes. Comme expliqué en cours, le champ diffracté dans le cas de conditions à la frontière de type Dirichlet est donné par

$$u^{+}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \tag{3}$$

ù $p = -\partial_{\mathbf{n}} u^{+} - \partial_{\mathbf{n}} u^{inc}$ avec $\mathbf{n}$ la normale extérieure au disque. La fonction de Green pour l'espace libre en 2D est donnée par $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k||\mathbf{x} - \mathbf{y}||)$.

Le but de ce TP est de vérifier que la solution numérique obtenue avec (3) correspond bien àla solution analytique donnée par (1).

Il y a deux difficultés dans ce TP. La première est qu'il faut discrétiser la représentation intégrale. La deuxième est de calculer numériquement l'intégrale.

Principales étapes du travail (àdétailler dans votre compte-rendu)

1. Fait en TP0 : Générer un maillage du bord du disque.
2. Fait en TP0 : Déterminer puis coder la trace de p sur Γ (dans la réalité cette trace est obtenue en résolvant une équation intégrale mais pour avancer progressivement, on considère un cas avec une solution de référence).
3. Discrétiser la représentation intégrale. Pour simplifier, il vous est demandé, dans un premier temps, d'utiliser une interpolation constante par élément. Cette étape se fait uniquement sur le papier !
4. Il faut ensuite calculer l'intégrale avec une méthode numérique : une quadrature de Gauss-Legendre. La quadrature de Gauss-Legendre à deux points est donnée par

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{\ell=1}^{2} w_{\ell} f(x_{\ell}), \tag{4}$$

   avec $w_1 = w_2 = 1$ et $x_1 = -x_2 = -\sqrt{1/3}$. Par un simple changement de variable, on en déduit la quadrature pour intégrer entre a et b. Coder une fonction qui renvoie une quadrature à n points avec différentes valeurs de n entre 2 et 7 (voir le Tableau 1 pour les valeurs des points et poids). Que doit prendre cette fonction en arguments ? Comment faites vous pour vérifier que cette fonction est correcte ? Pour cette étape vous pouvez utiliser l'aide de l'IA car vous pouvez toujours vérifier sur des exemples simples si ce qui est proposé est correct. N'hésitez pas à commenter les propositions de l'IA. Attention, dans le cas de la représentation intégrale, il faut travailler un peu plus car a et b sont les coordonnées de points dans $\mathbb{R}^2$. Quelles sont les modifications à apporter ?
5. Vous avez tous les ingrédients, vous pouvez coder votre représentation intégrale. Pour que le code soit rapide, il faut écrire cette fonction sous la forme d'un produit matrice vecteur ù le vecteur est la trace de p. En quels points est évaluée la trace de p ?

N	ξ_i	w_i
1	0.	2.
2	±0.57735026918962576450	1.
3	±0.	0.88888888888888888889
	±0.77459666924148337703	0.55555555555555555556
4	±0.33998104358485626480	0.65214515486254614262
	±0.86113631159405257522	0.34785484513745385737
5	0.	0.56888888888888888889
	±0.53846931010568309103	0.47862867049936646804
	±0.90617984593866399279	0.23692688505618908751
6	±0.23861918608319690863	0.46791393457269104738
	±0.66120938646626451366	0.36076157304813860756
	±0.93246951420315202781	0.17132449237917034504
7	0.	0.41795918367346938775
	±0.40584515137739716690	0.38183005050511894495
	±0.74153118559939443986	0.27970539148927666790
	±0.94910791234275852452	0.12948496616886969327

FIGURE 1 – Valeurs des points et poids pour la quadrature de Gauss-Legendre sur le segment $[-1 \quad 1]$. Les points sont toujours symétriques (avec le même poids). Seuls les points positifs sont donnés.

6. Validation : vérifiez sur le cas du disque. Pour valider le code, il vous faut comparer l'erreur à la solution analytique pour plusieurs fréquences, plusieurs maillages, en plusieurs points, ... N'oubliez pas de vérifier la convergence de votre code. Quelle est la complexité de votre temps de calcul par rapport au nombre de points (pour une fréquence fixée) ?

7. Pour aller plus loin : vous pouvez également regarder comment se comporte le code avec une interpolation linéaire par élément, essayer des quadratures avec plus de points.

8. Bonus : est-ce que l'IA aurait fait correctement ce TP ?

BON COURAGE !