Fast algorithms and numerical methods for the solution of Boundary Element Methods

Session 2: Boundary Integral Representation

Stéphanie Chaillat-Loseille

Laboratoire POEMS (CNRS-INRIA-ENSTA Paris)
stephanie.chaillat@ensta.fr

MS 04
2025/2026

Outline of the sessions

I will introduce BEMs and modern fast BEMs ... but a large fraction of the time will be devoted to practice (in Matlab, Python, Fortran, ...)

- 15/09 Introduction / Fundamental solutions and Boundary Integral Representation - TP0 (report 2 pages for 22/09)
- 22/09 TP on Boundary Integral Representation (5 pages for 29/09)
- 29/09 Boundary Integral Equations / TP on BIE (5 pages for 06/10)
- 06/10 Fast algebraic BEMs / TP on low rank approximations
- 09/10 TP on low rank approximations (2 pages for 03/11)
- 03/11 TP on Hierarchical Matrices - clustering (2 pages for 10/11)
- 06/11 TP on Hierarchical Matrices - admissibility condition (2 pages for 10/11)
- 10/11 TP on Hierarchical Matrices - matrix-vector product (5 pages for 17/11)
- 17/11 Presentation of Fast Multipole Method and TP
- 20/11 Link between fast BEMs and GNN. Written Exam

Grading: Projects (by pair) and a Written exam (1h)

Principle of derivation of Boundary Integral Representation

Boundary-value problem over Ω : $\begin{cases} \mathcal{L}u + f = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g_1 & \text{on } \partial\Omega_D, \\ T^n(u) = g_2 & \text{on } \partial\Omega_N. \end{cases}$

where u: unknown; g_1, g_2 and source f given. T^n: first-order partial differential operator, linear with respect to n. $\mathcal{L}$ linear second-order partial differential operator

- $\mathcal{L}$ and T^n assumed to satisfy the reciprocity identity

$$\int_\Omega (\mathcal{L}u.v - \mathcal{L}v.u)dV = \int_{\partial\Omega} (T^n(u).v - T^n(v).u)dS$$

- G: fundamental solution (point source f applied at x $\notin \partial\Omega$)

$$\mathcal{L}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

- Property of the Dirac distribution

$$\int_\Omega \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{y})dV_y = \kappa u(\boldsymbol{x}) \quad (\kappa = 1 \; if \; \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \kappa = 0 \; if \; \boldsymbol{x} \notin \Omega)$$

- Integral Representation formula: $x \notin \partial\Omega$

$$\kappa u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega f(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dV_y + \int_{\partial\Omega} (u(\boldsymbol{y})T^n G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - T^n u(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))dS_y$$

Integral Representation for Poisson equation

$$\Delta u + b = 0 \text{ on } \Omega \quad + \text{(unspecified well-posed B.C.)}$$

i.e., $\mathcal{L} = \Delta$ and $T^n = \nabla.n$ (normal der.)

Derivation of reciprocity identity: u^1, u^2 sol. of eq. and $q(\boldsymbol{y}) = \nabla u(\boldsymbol{y}).n(\boldsymbol{y})$

$$\int_{\partial\Omega} q^1 u^2 dS + \int_{\Omega} (b^1 u^2 - \nabla u^1.\nabla u^2) dV = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} q^2 u^1 dS + \int_{\Omega} (b^2 u^1 - \nabla u^1.\nabla u^2) dV = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} (q^1 u^2 - q^2 u^1) dS = \int_{\Omega} (b^2 u^1 - b^1 u^2) dV$$

Fundamental sol.:

$\Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = 0,\ G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi||x-y||}$ (full-space)

Boundary Integral Representation

$$\kappa u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dV_y + \int_{\partial\Omega} (u_{,n}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y}) G_{,n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) dS_y \quad (x \notin \partial\Omega)$$

Single and Double-layer potentials for Laplace equation

The single-layer potential solves the Laplace equation in $\mathbb{R}^3 \backslash \partial\Omega$

$$\mathcal{S}\phi(\boldsymbol{x}) := \int_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y}) dS_y$$

The double-layer potential solves the Laplace equation in $\mathbb{R}^3 \backslash \partial\Omega$

$$\mathcal{D}\psi(\boldsymbol{x}) := \int_{\partial\Omega} G_{,n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y}) dS_y$$

Boundary Integral Representation

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dV_y + \mathcal{S}u_{,n}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{D}u(\boldsymbol{x})$$

Representation Theorem

(a) If u is solution in Ω_i then

$$\int_\Gamma \left(G(x,y) \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^i (y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) u^i(y) \right) d\gamma_y = \begin{cases} u(x) \text{ if } x \in \Omega_i \\ 0 \text{ if } x \in \Omega_e \end{cases}$$

(b) If u is solution in Ω_e then (with the normal still from Ω_i to Ω_e)

$$\int_\Gamma \left(-G(x,y) \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^e (y) + \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) u^e(y) \right) d\gamma_y = \begin{cases} 0 \text{ if } x \in \Omega_i \\ u(x) \text{ if } x \in \Omega_e \end{cases}$$

(c) If u is solution in $\Omega_i \cup \Omega_e$ then

$$\forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e,\ u(x) = \int_\Gamma \left(G(x,y) \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma (y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) [u]_\Gamma(y) \right) d\gamma_y$$

What is next?

For exterior problems, we have

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Gamma \left(-G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^e (\mathbf{y}) + \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x},\mathbf{y}) u^e(\mathbf{y}) \right) d\gamma_y, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e, \mathbf{x} \notin \Gamma$$

☺ u in the domain is known only from values on boundary

☺ Reduction of computational costs and memory requirements

It is a Boundary Integral Representation (not an equation)

You need to obtain the traces of u on Γ (with an equation)

The Boundary Element Method is a two steps methods

1. Resolution of a boundary integral equation to obtain traces (TP2)
2. Application of the boundary integral representation to obtain solution in the domain (TP1)

Philosophie des TPs

But des trois TPs: mettre en oeuvre un solveur BEM rapide pour l'équation de Hemholtz 2D

Diffraction d'une onde incidente plane par un disque de rayon a centré en $\mathbf{0}$ et de frontière Γ

- $u^{inc} = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}$
- $\mathbf{k}$: est le vecteur qui permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde (prendre un angle nul)
- Nombre d'onde: $k = |\mathbf{k}|$
- Domaine extérieur est noté Ω^+

Solution analytique pour le problème de Dirichlet: $u^+ + u^{inc} = 0$ sur Γ

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n J_n(kr) e^{in\theta}$$

$$u^+(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad r \geq a$$

Philosophie des TPs

But des trois TPs: mettre en oeuvre un solveur BEM rapide pour l'équation de Hemholtz 2D

Diffraction d'une onde incidente plane par un disque de rayon a centré en $\mathbf{0}$ et de frontière Γ

- $u^{inc} = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}$
- $\mathbf{k}$: est le vecteur qui permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde (prendre un angle nul)
- Nombre d'onde: $k = |\mathbf{k}|$
- Domaine extérieur est noté Ω^+

Solution analytique pour le problème de Dirichlet: $u^+ + u^{inc} = 0$ sur Γ

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n J_n(kr) e^{in\theta}$$

$$u^+(r,\theta) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad r \geq a$$

TP1: Mise en oeuvre de la représentation intégrale

Dans ce TP, nous allons simplement mettre en oeuvre la représentation intégrale pour les formulations intégrales directes. Le champ diffracté dans le cas de conditions à la frontière de type Dirichlet est donné par

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}) \qquad (1)$$

où$p = -\partial_{\mathbf{n}} u^+ - \partial_{\mathbf{n}} u^{inc}$ (solution analytique qui devra dans le TP2 être obtenue numériquement) avec $\mathbf{n}$ la normale extérieure au disque. La fonction de Green pour l'espace libre en 2D est donnée par $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k||\mathbf{x}-\mathbf{y}||)$.

Le but de ce TP est de vérifier que la solution numérique obtenue avec (1) correspond bien à la solution analytique donnée.

2 difficultés dans ce TP: (i) discrétiser la représentation intégrale, (ii) calculer numériquement l'intégrale.

Etape 2: Trace de p analytique

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad p = -\partial_\mathbf{n} u^+ - \partial_\mathbf{n} u^{inc}$$

- Déterminer la trace de p sur Γ
- La coder

Dans la réalité cette trace est obtenue en résolvant une équation intégrale. Pour avancer progressivement dans le TP et comprendre les notions les unes après les autres, on considère un cas avec une solution de référence

Vous aurez besoin de la formule suivante:

$$\frac{d}{dr} H_n^{(1)}(kr) = \frac{k}{2}\left(H_{n-1}^{(1)}(kr) - H_{n+1}^{(1)}(kr)\right) \tag{2}$$

Etape 3: Discrétisation de la représentation intégrale

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad p = -\partial_\mathbf{n} u^+ - \partial_\mathbf{n} u^{inc}$$

☺ Pour simplifier, il vous est demandé, dans un premier temps, d'utiliser une interpolation constante par élément.

Cette étape se fait uniquement sur le papier!

Etape 3: Discrétisation de la représentation intégrale

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad p = -\partial_\mathbf{n} u^+ - \partial_\mathbf{n} u^{inc}$$

Pour simplifier, il vous est demandé, dans un premier temps, d'utiliser une interpolation constante par élément.

Cette étape se fait uniquement sur le papier!

- Evaluation pour chaque point du volume $\mathbf{x_i}$

$$u^+(\mathbf{x_i}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x_i}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y})$$

- Utilisation d'une interpolation constante par élément:
  $p(\mathbf{y}) = p_e \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma_e$ (évalué au centre de l'élément Γ_e)

$$u^+(\mathbf{x_i}) = \sum_e p_e \int_{\Gamma_e} G(\mathbf{x_i}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y})$$

Vous remarquez que c'est un produit matrice-vecteur

Etape 4: Quadrature de Gauss

La quadrature de Gauss-Legendre à deux points est donnée par

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{\ell=1}^{2} w_\ell f(x_\ell),$$

avec $w_1 = w_2 = 1$ et $x_1 = -x_2 = -\sqrt{1/3}$.

Par un simple changement de variable, on en déduit la quadrature pour intégrer entre a et b.

- Coder une fonction qui renvoie une quadrature à n points avec différentes valeurs de n entre 2 et 7
- Que doit prendre cette fonction en arguments?
- Comment faites vous pour vérifier que cette fonction est correcte?

Dans le cas de la représentation intégrale, a et b sont les coordonnées de points dans $\mathbb{R}^2$ mais ça ne change rien.

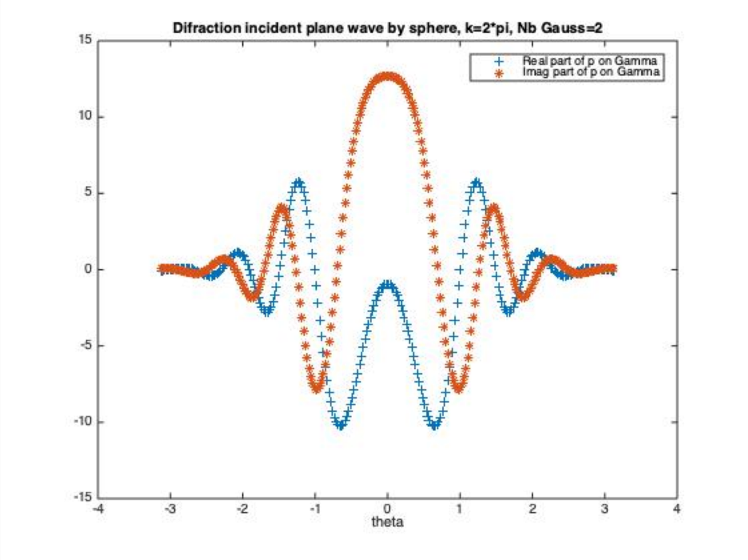
Etape 4: Mise en oeuvre de la représentation intégrale

☺ Bonne nouvelle: Vous avez tous les ingrédients, vous pouvez coder votre représentation intégrale.

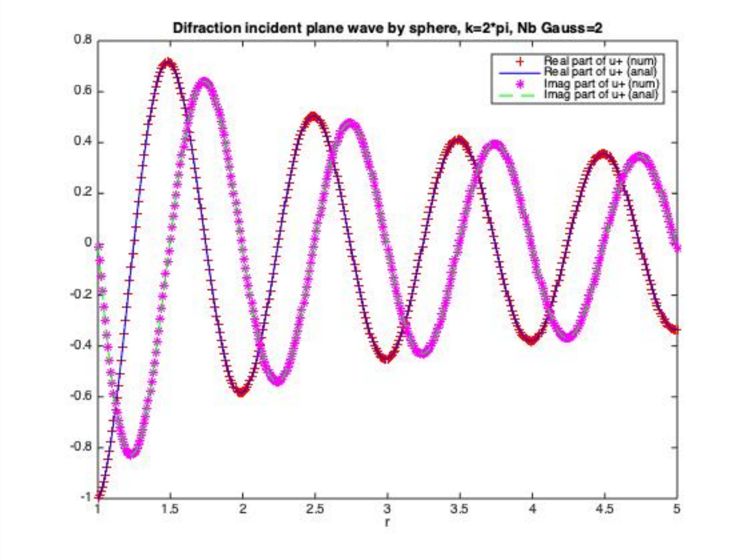
Pour bien comprendre ce que vous faites: En quels points est évaluée la trace de p?

Matlab: Pour que le code soit rapide, il faut écrire cette fonction sous la forme d'un produit matrice vecteur où le vecteur est la trace de p.

Etape 5: Validation sur le cas du disque



Etape 5: Validation sur le cas du disque



A vous de jouer

Pour valider le code, il vous faut comparer l'erreur à la solution analytique pour:

- plusieurs fréquences
- plusieurs maillages
- en plusieurs points, ...

N'oubliez pas de vérifier la convergence de votre code.

Quelle est la complexité de votre temps de calcul par rapport au nombre de points (pour une fréquence fixée)?

Pour aller plus loin: vous pourrez également regarder comment se comporte le code avec une interpolation linéaire par élément, essayer des quadratures avec plus de points