

## Equation intégrale pour l'équation de Helmholtz 2D

**TP2 : à rendre pour Lundi 6 octobre 2025**

**Rappel de la Philosophie des TPs :** Le but de la série de trois TPs est de mettre en oeuvre un solveur BEM rapide pour l'équation de Hemholtz 2D. Nous choisissons le cas de la diffraction d'une onde incidente plane, i.e.  $u^{inc} = e^{-ik \cdot \mathbf{x}}$ , par un disque de rayon  $a$  centré en  $\mathbf{0}$  et de frontière  $\Gamma$ .  $\mathbf{k}$  est le vecteur qui permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde. Le nombre d'onde du problème est donné par  $k = |\mathbf{k}|$ . Le domaine extérieur est noté  $\Omega^+$ .

### Grandes étapes de la BEM :

1. Reformulation de l'EDP sous forme intégrale ;
2. Résolution d'une équation intégrale pour obtenir les traces des champs sur la frontière ;
3. Application de la représentation intégrale pour obtenir le champ dans tout le domaine (non-borné pour les problèmes extérieurs).

Le TP1 s'est intéressé à l'étape 3. Nous allons maintenant considérer l'étape 2 dans ce TP. Il s'agit de coder un solveur qui va permettre de déterminer la trace nécessaire à l'étape 3.

### TP2 : Résolution d'une équation intégrale

Dans ce TP, nous allons mettre en oeuvre la résolution numérique de l'équation intégrale pour les formulations directes. Lors du TP1, nous avons vu que le champ diffracté dans le cas de conditions à la frontière de type Dirichlet est donné par la représentation intégrale

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (1)$$

où  $p = -\partial_{\mathbf{n}} u^+ - \partial_{\mathbf{n}} u^{inc}$  avec  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au disque. La fonction de Green pour l'espace libre en 2D est donnée par  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k||\mathbf{x} - \mathbf{y}||)$ .

Lors du TP1,  $p$  a été obtenu analytiquement. Dans le TP2, nous allons le déterminer numériquement en résolvant l'équation intégrale vue en cours. On rappelle que le problème de diffraction est alors donné par

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } p \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que} \\ &\int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = -u^{inc} \end{aligned} \quad (2)$$

Le but de ce TP2 est non seulement de vérifier que la solution numérique obtenue avec (2) correspond bien à la solution analytique mais également de supprimer l'utilisation de la solution analytique pour calculer le champ diffracté dans  $\Omega^+$ .

Il y a deux difficultés supplémentaires dans ce TP2 par rapport au TP1. La première est qu'il faut gérer la singularité de la fonction de Green. La deuxième est de résoudre un système linéaire.

### Principales étapes du travail (à détailler dans votre compte-rendu)

1. Ecrire la formulation variationnelle correspondant à (2). Dans un premier temps, nous considérons une interpolation  $\mathbb{P}^0$ .
2. Ecrire la forme discrétisée de la formulation variationnelle. En particulier si on écrit le problème sous la forme matricielle

$$\mathbb{A}\mathbf{p} = \mathbf{b},$$

quelles sont les expressions de  $\mathbb{A}_{ij}$  et  $\mathbf{b}_i$  ?

3. Coder la fonction qui évalue le second membre  $\mathbf{b}$ . Il n'y a aucune difficulté par rapport au TP1.
4. On va maintenant assembler la matrice  $\mathbb{A}$ . Numériquement, il y a deux différences par rapport au cas de la représentation intégrale. La première est qu'il y a une double intégration dans la formulation variationnelle. Il faut donc appliquer deux fois les formules de quadrature de Gauss (sur les segments  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_{e'}$ ). Préparer la routine qui assemble la matrice  $\mathbb{A}$ .
5. La deuxième difficulté est due au caractère singulier de la fonction de Green. Il faut dissocier deux cas de figure : le cas régulier où  $\Gamma_e \neq \Gamma_{e'}$  et le cas singulier où  $\Gamma_e = \Gamma_{e'}$ . Les coefficients de la matrice correspondants à ce cas de figure ne peuvent pas être calculés directement avec une quadrature numérique. Il existe plusieurs techniques pour éviter ce problème. Comme nous sommes dans un cas simple, nous allons utiliser une méthode semi-analytique. Pour cela nous utilisons le développement limité autour de 0 des fonctions de Hankel. Nous avons

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} [\ln(\frac{k}{2}) + \gamma] + \mathcal{O}\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \ln \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}\right) \quad (3)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler (que l'on pourra approcher par 0.5772156649). Nous allons séparer le noyau en une partie singulière (la partie logarithmique) et une partie régulière (tout le reste). La partie régulière s'intègre avec une quadrature de Gauss. La partie singulière s'intègre de manière analytique (en utilisant un peu de géométrie) :

$$\int_{\Gamma_e} \frac{-1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x}_h - \mathbf{y}_h\| d\Gamma(\mathbf{y}_h) = -\frac{1}{2\pi} \left( \mathbf{d}_{j+1}^e \cdot \boldsymbol{\tau}_e \ln \|\mathbf{d}_{j+1}^e\| - \mathbf{d}_j^e \cdot \boldsymbol{\tau}_e \ln \|\mathbf{d}_j^e\| - |\Gamma_e| + d_e(\mathbf{x}_h) \Omega \right) \quad (4)$$

où l'on a utilisé les notations suivantes (cf Figure 1) :

- $\boldsymbol{\tau}_e$  est le vecteur tangent unitaire,
- $d_e(\mathbf{x})_h$  est la distance de  $(\mathbf{x})_h$  à  $\Gamma_e$ ,
- $\Omega$  est l'angle solide sous lequel  $(\mathbf{x})_h$  voit  $\Gamma_e$ ,  $0 \leq \Omega \leq \pi$ .

Comme  $\Gamma_e = \Gamma_{e'}$ ,  $\Omega = 0$  de sorte que la formule (4) devient

$$\int_{\Gamma_e} \frac{-1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x}_h - \mathbf{y}_h\| d\Gamma(\mathbf{y}_h) = -\frac{1}{2\pi} \left( \mathbf{d}_{j+1}^e \cdot \boldsymbol{\tau}_e \ln \|\mathbf{d}_{j+1}^e\| - \mathbf{d}_j^e \cdot \boldsymbol{\tau}_e \ln \|\mathbf{d}_j^e\| - |\Gamma_e| \right) \quad (5)$$

Quelle est finalement l'expression des termes  $\mathbb{A}_{ii}$  (attention à la double intégration) ? Modifier en conséquence la construction de la diagonale de la matrice  $\mathbb{A}$ .

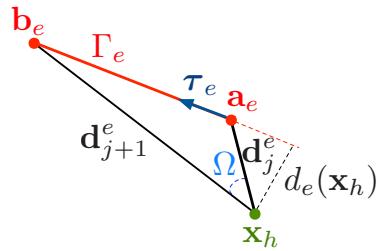


FIGURE 1 – Notations pour l'intégration de la partie logarithmique

6. Validation : vérifier la trace de  $p$  sur le cas du disque. Vous pouvez dans un premier temps regarder ce qu'il se passe si vous ne séparez pas les parties régulières et singulières. Pour valider le code, il vous faut comparer l'erreur à la solution analytique pour plusieurs fréquences, plusieurs maillages, en plusieurs points, ... N'oubliez pas de vérifier la convergence de votre code. Quelle est la complexité de votre temps de calcul par rapport au nombre de points (pour une fréquence fixée) ?
7. Coupler ce code de résolution d'une équation intégrale avec le code d'évaluation de la représentation intégrale développé pour le TP1. Vous avez votre premier code BEM ! Quelle est la différence au niveau des temps de calcul entre la représentation intégrale et l'équation intégrale ?
8. Pour aller plus loin : vous pouvez également regarder comment se comporte le code avec des quadratures avec plus de points ou regarder d'autres géométries d'obstacle (cube, ellipse, ...). Vous pouvez déterminer la solution analytique pour le cas de la diffraction par plusieurs disques ! N'hésitez pas à demander de l'aide à l'IA pour déterminer cette solution de référence mais le principe est le même que pour un obstacle.

BON COURAGE !