Solution analytique de l'équation de Helmholtz 2D

TP0 : Lundi 15 Septembre 2025 (à rendre le lundi 22 Septembre)

Philosophie des TPs : Le but de la série de TPs est de mettre en oeuvre un solveur BEM rapide pour l'équation de Hemholtz 2D. Nous choisissons le cas de la diffraction d'une onde incidente plane, i.e. $u^{inc} = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}$, par un disque de rayon a centré en $\mathbf{0}$ et de frontière Γ. $\mathbf{k}$ est le vecteur qui permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde (prendre un angle d'incidence nul pour le cas du disque). Le nombre d'onde du problème est donné par $k = |\mathbf{k}|$. Le domaine extérieur est noté Ω^+. Nous allons considérer le cas d'une condition à la frontière de type Dirichlet. Ce cas test a l'avantage de présenter une solution analytique simple. Le champ diffracté est donné par :

$$u^+(r,\theta) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad r \geq a. \tag{1}$$

Les J_n sont les fonctions de Bessel de première espèce et les $H_n^{(1)}$ les fonctions de Hankel du premier type. Une première question bonus est de chercher comment on prouve que le champ diffracté est donné sous cette forme, en utilisant la formule de Jacobi-Anger

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n J_n(kr) e^{in\theta}. \tag{2}$$

Cette déposition permet également de déterminer le nombre de modes à sélectionner dans (1).

Grandes étapes de la BEM :

1. Reformulation de l'EDP sous forme intégrale ;
2. Résolution d'une équation intégrale pour obtenir les traces des champs sur la frontière ;
3. Application de la représentation intégrale pour obtenir le champ dans tout le domaine (non-borné pour les problèmes extérieurs).

Le TP0 va permettre de construire la solution de référence et le maillage utilisé plus tard pour la méthode numérique. Le TP1 s'intéresse à l'étape 3. En effet, l'étape 1 est plus compliquée à mettre en oeuvre car elle nécessite la résolution d'un système et la gestion de singularités. L'étape 2 sera vue lors du TP2. Comme le résultat de l'étape 2 est normalement nécessaire à l'étape 3, nous ne pouvons considérer dans ce TP1 que des cas où nous connaissons la trace sur la frontière et que nous souhaitons en déduire le champ dans le domaine non-borné.

Les trois TPs sont de difficulté croissante. Deux TP feront l'objet d'un compte-rendu noté (**limité à 5 pages**, soyez concis) à faire en binôme.

Conseils :

— Il faut éviter autant que possible de faire des boucles sous Matlab, sinon votre code sera très lent. Prenez l'habitude de réfléchir sur papier à la meilleure façon de coder.

— Chaque étape du TP doit être validée séparément.

— Le compte-rendu ne doit pas être une succession de réponses aux questions (cf la feuille de conseils). Vous devez m'expliquer pourquoi vous savez que votre code est correct (ou incorrect). Il faut donc expliquer la théorie mais aussi toutes les étapes qui permettent de valider le code. Il doit y avoir des illustrations par des résultats numériques intégrés au texte de votre compte-rendu. Vous pouvez mettre, quand c'est pertinent, un extrait de votre code.

Principales étapes du travail (à détailler dans votre compte-rendu)

1. Générer un maillage du bord du disque : d'abord les noeuds du maillage puis les extrémités de chaque segment. Quel est le nombre de segments (en fonction du nombre de noeuds du maillage) ?

2. Déterminer puis coder la trace de p sur Γ (dans la réalité cette trace est obtenue en résolvant une équation intégrale mais pour avancer progressivement, on considère un cas avec une solution de référence). Vous aurez besoin de la formule suivante :

$$\frac{d}{dr} H_n^{(1)}(kr) = \frac{k}{2}\Big(H_{n-1}^{(1)}(kr) - H_{n+1}^{(1)}(kr)\Big) \tag{3}$$

   N'hésitez pas à utiliser l'IA pour vous aider pour ces étapes de base. Mais dites moi dans la compte-rendu ce que vous avez demandé et surtout comment vous avez vérifié que c'était correct (sinon je mettrai 0).

BON COURAGE !