

Projet 1 : Problème avec grille structurée

L'objectif de ce projet est de paralléliser un code de calcul avec la librairie MPI, et d'en étudier les performances sur le cluster cholesky. Le code de calcul résout un problème structuré obtenu en discrétisant l'équation de la chaleur bidimensionnelle avec une méthode de différences finies.

Pour le **mardi 7 octobre 2025** (au plus tard), un **rapport intermédiaire** (2 pages) sur la partie 1 du projet et les **codes associés** (nettoyés) doivent être envoyés aux enseignants.

Pour le **mercredi 22 octobre 2025** (au plus tard), un **rapport final** (max. 8 pages) sur les parties 1 et 2 du projet et les **codes finaux** (nettoyés) doivent être envoyés aux enseignants

E-mails: nicolas.kielbasiewicz@ensta-paris.fr

Description du problème• **Problème continu**

Étant donné un domaine $\Omega =]0, a[\times]0, b[$, on cherche à calculer le champ $u(x, y)$ gouverné par

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y), \quad \text{pour } (x, y) \in \Omega,$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, 0) = U_0, \quad u(x, b) = U_0, \quad u(a, y) = U_0, \quad u(0, y) = U_0 (1 + \alpha V(y)),$$

pour $x \in]0, a[$ et $y \in]0, b[$. On suppose que $V(y) = 1 - \cos(2\pi y/b)$ et $f(x, y) = 0$, et que les paramètres a , b et α sont strictement positifs, avec $\alpha < 1$.

• **Problème discrétisé**

Pour résoudre ce problème, on discrétise le champ sur une grille régulière, $u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta y)$, avec $i = 0 \dots N_x + 1$ et $j = 0 \dots N_y + 1$, et on considère le schéma de différences finies

$$\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) = f_{i,j},$$

pour $i = 1 \dots N_x$ et $j = 1 \dots N_y$.

On se propose de résoudre le problème ci-dessus par une méthode de Jacobi, puis par une méthode de Gauss-Seidel. Pour la résolution itérative, on partira d'un champ initial $u = U_0$. La résolution sera réalisée en séquentiel, puis en parallèle sur une station de travail de l'ENSTA, puis en parallèle sur le cluster Cholesky.

Consignes

Partie 1 (“*Let’s start the journey ...*”)

1. Écrire un code séquentiel pour résoudre le problème avec la méthode de Jacobi, et valider ce code en vérifiant la convergence numérique du schéma de différences finies sur une solution manufacturée.
2. Paralléliser le code “*Jacobi*”, valider le code parallèle, et étudier la performance parallèle sur une station de travail de l’ENSTA.
3. Écrire un code séquentiel pour résoudre le problème avec la méthode de Gauss-Seidel, et valider ce code de la même façon que pour la question 1.
4. Étudier et comparer numériquement la convergence des méthodes de “*Jacobi*” et “*Gauss-Seidel*” en utilisant les codes.

Partie 2 (“*On the road again ...*”)

5. Étudier la performance parallèle du code “*Jacobi*” en utilisant le cluster Cholesky.

Choisir une extension ...

- A. [Gauss-Seidel] Paralléliser la résolution par la méthode de Gauss-Seidel. Étudier les performances parallèle de cette version du code, et comparer globalement les performances des codes “*Jacobi*” et “*Gauss-Seidel*”.
- B. [Parallélisation] Proposer et implémenter une autre stratégie de parallélisation (ex. utilisation d’une partition bidimensionnelle de type *damier*, ...).
- C. [3D] Proposer une version tridimensionnelle parallélisée du code.