MS01 Calcul scientifique parallèle
Master 2 AMS

TP 1 : Prise en main du code + CG

Ces TPs sur la décomposition de domaine s'appuient sur un code éléments finis écrit en C++ sous la forme d'une archive `femtool.zip` disponible sur la page web du cours. Vous êtes invités à disposer de ce code à votre convenance en le modifiant si vous en ressentez le besoin pour répondre aux questions.

Exercice 1

Le but de ce premier exercice est de vous familiariser avec la lecture et l'écriture de maillage, et la visualisation de solution.

Question 1 Compilez et exécutez le code localisé dans le fichier `example/example.cpp`. Visualisez les fichiers de sortie `output.mesh` et `output.sol` avec le logiciel `vizir4`.

Question 2 On se place dorénavant systématiquement dans le répertoire `tp`. Effectuez les actions suivantes :

1. À l'aide du logiciel `gmsh`, générez le fichier de maillage `tp1-1.mesh` au format `.mesh` d'un domaine 2D carré $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.
2. Créez un fichier `tp1-1` contenant une fonction `main`, instanciez-y un objet `Mesh2D Omega` dans lequel vous chargerez le maillage `tp1-1.mesh` en vous servant de la fonction `Read`.
3. Assemblez dans une variable `FeSpace Vh` un espace éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur le maillage `Omega`.
4. On note $u_{ex}(\boldsymbol{x}) := \cos(10\pi(x_1 + x_2))$ pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{S}_h(\Omega)$ l'ensemble des noeuds du maillage. Assemblez le vecteur de valeurs nodales $(u_{ex}(\boldsymbol{s}))_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}_h(\Omega)}$ dans une variable `std::vector<double> uex` à l'aide de l'opérateur `FeSpace::operator()`.
5. En vous servant de la routine `Plot`, générez des fichiers de sortie `tp1-1-output.mesh` et `tp1-1-output.sol` permettant de visualiser la fonction u_{ex} sur Ω.

Question 3 Effectuez les actions suivantes :

1. A l'aide du logiciel `gmsh`, générez le fichier de maillage `tp1-2.mesh` d'un domaine 3D cubique $\Omega =]0,1[\times]0,1[\times]0,1[$.
2. Créez un fichier `tp1-2` contenant une fonction `main` dans laquelle vous chargerez le maillage `tp1-2.mesh` dans une variable `Mesh3D Omega`.

3. Assemblez dans une variable `FeSpace Vh` un espace éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur le maillage `Omega`.
4. A l'aide de la fonction `Boundary`, générez une variable `FeSpace Wh` modélisant un espace élément finis sur le bord de Ω, ainsi qu'une variable `CooMatrix<double> B` modélisant l'opérateur de trace sur le bord.
5. On note $u_{ex}(\boldsymbol{x}) := \cos(5\pi(x_1 + x_2 + x_3))$ pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Générez des fichiers de sortie `tp1-2-output.mesh` et `tp1-2-output.sol` permettant de visualiser la fonction u_{ex} sur Γ.

Exercice 2

On se place dans un domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$. On considère la fonction $u_{ex}(\boldsymbol{x}) := \cos(10\pi x_1)$, et on pose $f := -\Delta u_{ex} + u_{ex}$. On considère le problème aux limites suivant :

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

Question 1 A l'aide du logiciel `gmsh`, générez un maillage du domaine Ω avec une finesse de maille $h = 0.025$.

Question 2 Après avoir mis (1) sous forme variationnelle, résolvez numériquement ce problème aux limites sur le maillage de la question précédente et représentez graphiquement la solution avec `vizir4`. Pour l'assemblage des matrices éléments finis, vous pourrez utiliser les fonctions `Mass` et `Stiffness`.

Question 3 Représentez graphiquement, à l'aide d'une carte de champ sur le maillage des questions précédentes, l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte pour le problème (1).

Question 4 On considère toujours le maillage de la Question 1. On note $u_h^{(k)}, k \geq 0$ la suite des approximations de la solution discrète u_h de (1) après k itérations du gradient conjugué (CG). Tracez la courbe représentant $\|u_h^{(k)} - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}/\|u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ en fonction de k. On se placera en échelle logarithmique sur l'ordonnée. On pourra utiliser la librairie `matplotlib` sous `python`, ou bien la librairie `gnuplot` pour tracer cette courbe. Le gradient conjugué sera interrompu lorsque $\|u_h^{(k)} - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}/\|u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} < 10^{-6}$.

Question 5 Reprendre la question précédente, en traçant la même courbe pour 4 finesses de maillage différentes $h = 0.025$, $h = 0.01$, $h = 0.005$ et $h = 0.0025$. On fera apparaître ces 4 courbes sur la même figure.

Question 6 Tracez la courbe représentant en abscisse la finesse du maillage variant entre $h = 0.05$ et $h = 0.001$, et en ordonnée le nombre d'itérations de CG nécessaire pour atteindre l'erreur relative $\|u_h^{(k)} - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}/\|u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} < 10^{-6}$.