MS01 Calcul scientifique parallèle
Master 2 AMS

TP 2 : PCG + partitionnement

Ces TPs sur la décomposition de domaine s'appuient sur un code éléments finis écrit en C++ sous la forme d'une archive `femtool.zip` disponible sur la page web du cours. Vous êtes invités à disposer de ce code à votre convenance en le modifiant si vous en ressentez le besoin pour répondre aux questions.

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'implémenter et tester l'algorithme du gradient conjugué préconditionné (PCG). On se place dans les mêmes conditions qu'à l'Exercice 2 de la feuille de TP 1 : on considère $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$, $u_{ex}(\boldsymbol{x}) := \cos(10\pi x_1)$ et $f := -\Delta u_{ex} + u_{ex}$ et on s'intéresse au problème aux limites suivant

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans}\ \Omega \quad \text{et} \quad \partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 \quad \text{sur}\ \partial\Omega. \tag{1}$$

Question 1 Dans le fichier `iterativesolver.hpp`, implémentez une fonction `PCGSolver` permettant de résoudre un système linéaire $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ à l'aide d'un préconditionneur P, prenant en paramètre d'entrée $\mathrm{A}, \boldsymbol{b}, \mathrm{P}$ et renvoyant en sortie une approximation de la solution $\boldsymbol{x}$.

Question 2 A nouveau on considère 4 maillages du domaine $\Omega =]0,1[^2$ associés aux finesses $h = 0.025$, $h = 0.01$, $h = 0.005$ et $h = 0.0025$ [1], on considère les données A et $\boldsymbol{b}$ correspondant au problème (1) après discrétisation par éléments finis $\mathbb{P}_1$. On choisit le préconditionneur de Cholesky incomplet déjà implémenté et disponible dans le fichier `preconditioner.hpp`.

On note $u_h^{(k)}, k \geq 0$ la suite des approximations de la solution discrète u_h de (1) après k itérations du gradient conjugué préconditionné (PCG). Tracez, sur la même figure, les 4 courbes représentant $\|u_h^{(k)} - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}/\|u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ en fonction de k.

Question 3 Tracez la courbe représentant en abscisse la finesse du maillage variant entre $h = 0.05$ et $h = 0.001$, et en ordonnée le nombre d'itérations de PCG (avec préconditionneur de Cholesky incomplet) nécessaires pour atteindre l'erreur relative $\|u_h^{(k)} - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}/\|u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} < 10^{-6}$. Vous tracerez cette courbe sur la même figure que la courbe de la Question 6 du TP1.

1. Idéalement on reprendra les mêmes maillages que ceux utilisés à la Question 5 du TP 1.

Exercice 2

Le but de cet exercice est d'implémenter une procédure de partitionnement du domaine de calcul et de mettre en place les structures de données préparant l'implémentation du préconditionneur ASM. Dans tout cet exercice, pour simplifier, on partira du principe qu'on travaille sur le domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.

Question 1 Dans la suite on considère l'alias de type suivant : `using Mesh2DPart = std::vector<Mesh2D>;` Écrire une fonction admettant le profil

```
std::pair< Mesh2DPart,CooMatrix<double> >
Partition4(const Mesh2D& Omega)
```

Cette fonction prendra en argument d'entrée un maillage du domaine $]0,1[\times]0,1[$. Elle devra renvoyer en sortie une paire `(Sigma,Q)` formée de

- Un tableau `Sigma` de type `Mesh2DPart` de taille 4. Le tableau `Sigma` représentera un partitionnement sans recouvrement $\overline{\Omega} = \overline{\Sigma}_0 \cup \overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 \cup \overline{\Sigma}_3$ où chaque $\Sigma_p, p = 0,1,2,3$ est *approximativement* un quart du domaine de calcul initial

  $$\Sigma_p \simeq]j/2,(j+1)/2[\times]k/2,(k+1)/2[$$
  pour `j=p/2` et `k=p%2`.

- Une matrice creuse `Q` de type `CooMatrix<double>`. La matrice `Q` $= (Q_{j,p})$ est de taille `ne` $\times$ 4 où `ne` est le nombre d'éléments dans le maillage `Omega`. Cette matrice est telle que $Q_{j,p} = 1$ si le $j-$ème élément de Ω appartient à Σ_p, et $Q_{j,p} = 0$ sinon.

Le code source de cette fonction sera consigné dans un nouveau fichier intitulé `partition.hpp` rangé dans le répertoire `femtool`. Il vous appartient d'appliquer les modifications nécessaires pour assurer la compilation et l'exécution du code après l'ajout de ce nouveau fichier.

Question 2 Écrire dans le même fichier `partition.hpp` une fonction

```
void
Plot(const std::vector<Mesh2D>& Sigma,
     const std::string& filename)
```

qui prend en argument d'entrée un tableau de maillages `Sigma` modélisant une collection de sous-domaines sans recouvrement $\{\Sigma_j\}_{j=0,\dots,J}$, et qui écrit un fichier `filename` au format `.mesh` permettant de visualiser $\Sigma_0 \cup \cdots \cup \Sigma_J$ avec `vizir4` en faisant apparaître chaque Σ_j dans une couleur différente.

Question 3 On considère un maillage de $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ avec une finesse $h = 0.01$. Utiliser la fonction `Plot` de la Question 2 pour produire une image du partitionnement de Ω généré avec la fonction `Partition4` de la Question 1.

Question 4 Écrire dans le même fichier `partition.hpp` une surcharge de la fonction `Partition4` prenant en argument d'entrée un entier supplémentaire :

```
std::pair< Mesh2DPart,CooMatrix<double> >
Partition4(const Mesh2D& Omega, const std::size_t& nl)
```

Dans cette nouvelle fonction, `Omega` représente toujours le maillage du domaine de calcul initial, et `nl` représente un nombre de couches supplémentaires. Cette nouvelle fonction renverra en sortie une paire `(Gamma,R)` formée de

- Un tableau `Gamma` de type `Mesh2DPart` de taille 4 représentant un recouvrement $\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où chaque Γ_p est obtenu à partir du Σ_p de la Question 1 en ajoutant `nl` couches d'éléments, de sorte que les $\{\Gamma_p\}$ forment une décomposition en sous-domaines *avec* recouvrement.

- Une matrice `R` $= (R_{j,p})$ de type `CooMatrix<double>` et de taille `ne` $\times$ 4 où `ne` est le nombre d'éléments dans le maillage `Omega`. Soit τ_j le j-ème élément du maillage de Ω. Si τ_j n'est pas un élément du maillage de Γ_p, alors $R_{j,p} = 0$. En revanche, si τ_j appartient au maillage de Γ_p, alors $R_{j,p}$ est le numéro de τ_j en tant qu'élément du maillage de Γ_p.

Question 5 Reprendre les questions précédentes et effectuer le même travail pour une partition en 16 sous-domaines, en prenant `Partition16` pour le nom de la fonction de génération de la partition. Cette fois-ci, les sous-domaines $\Sigma_p, p = 0, 1, \ldots, 15$ devront approcher $\Sigma_p \simeq]j/4,(j+1)/4[\times]k/4,(k+1)/4[$ où `j=p/4` et `k=p%4` désigne le quotient et le reste dans la division euclidienne.