



HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT

DOKUMENTATION

---

**Projektseminar**  
**Optimierung und**  
**Unsicherheitsquantifizierung mit**  
**Bayesianischer Statistik und**  
**MCMC-Methoden**  
**(Prof. Schwarzenberger)**

---

*Clemens Näther, s85426*

*Jakub Kliemann, s85515*

# Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theoretischer Teil</b>	<b>3</b>
2.1	Grundlagen der bayesianischen Statistik und das Bayes'sche Theorem .	3
2.1.1	Einführung in die bayesianische Statistik . . . . .	3
2.1.2	Das Bayes'sche Theorem und seine Bestandteile . . . . .	3
2.1.3	Beispiele und praktische Anwendungen . . . . .	4
2.2	Binomiale Verteilung und deren bayesianische Interpretation . . . . .	5
2.3	Markov Chain Monte Carlo (MCMC) Methoden . . . . .	6
2.4	Konvergenzkriterien und Diagnosewerkzeuge für MCMC-Simulationen .	7
<b>3</b>	<b>Praktischer Teil</b>	<b>8</b>
3.1	Implementierung bayesianischer Modelle unter Verwendung in Python .	8
3.2	Anwendung der Modelle auf verschiedene Datensätze . . . . .	9
3.3	Durchführung von MCMC-Simulationen . . . . .	10
3.4	Interpretation der Ergebnisse . . . . .	11
3.5	Vergleich mit klassischen Methoden . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>15</b>

# 1 Einleitung

## 2 Theoretischer Teil

### 2.1 Grundlagen der bayesianischen Statistik und das Bayes'sche Theorem

#### 2.1.1 Einführung in die bayesianische Statistik

Im wesentlichen unterscheiden sich die klassische und die bayesianische Statistik in der Interpretation der Wahrscheinlichkeit. Die klassische Statistik definiert die Wahrscheinlichkeit als die **relative Häufigkeit** in einem Zufallsexperiment [4, p. 2]. In der bayesianischen Statistik hingegen wird die Wahrscheinlichkeit als Grad des Glaubens respektiv als **Plausibilität** eines Ereignisses oder einer Aussage interpretiert [1, p. 1].

Kern der bayesianischen Statistik ist es Wissen über ein Ereignis zu verfeinern, sobald neue Informationen vorliegen. Dazu nutzt man hauptsächlich das **Bayes'sche Theorem**, welches erlaubt das Vorwissen (Prior) mit neuen Daten (Likelihood) zu kombinieren und daraus eine aktualisierte Wahrscheinlichkeit (Posterior) zu berechnen.

Mit Hilfe des Bayes'schen Theorems kann man unbekannte Parameter schätzen, ein Konfidenzintervall für diese Parameter angeben und Hypothesen prüfen. Die klassische Statistik benötigt hingegen dafür Testgrößen, weshalb die bayesianische Statistik als flexibler und intuitiver gilt. [1, p. 1].

#### 2.1.2 Das Bayes'sche Theorem und seine Bestandteile

Das Bayes'sche Theorem ist ein fundamentales Konzept der bayesianischen Statistik. Es beschreibt, wie man vorhandenes Vorwissen durch neue Daten aktualisiert.

Die **Prioriverteilung** beschreibt die anfänglichen Annahmen oder das Vorwissen über einen Parameter oder ein Ereignis, bevor neue Daten berücksichtigt werden. Dabei "enthält die Prioriverteilung eines Parameters  $\theta$ , ausgedrückt durch  $f(\theta)$ , was man vor Auswertung der Stichprobe über  $\theta$  weiß." [4, p. 90].

Als Priori-Wahrscheinlichkeit wird somit die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  bezeichnet.

Die **Posterioriverteilung** beschreibt das Wissen über einen Parameter oder ein Ereignis, nachdem alle vorhandenen Daten berücksichtigt wurden. Durch die neuen Daten, meist einer Stichprobe, wird die anfängliche Annahme, die durch die Prioriverteilung ausgedrückt wird, aktualisiert. Dies führt zu einer neuen Verteilung die widerspiegelt, wie wahrscheinlich verschiedene Werte des Parameters auf Grundlage sowohl des Vorwissens als auch der neuen Informationen sind. [4, p. 109]

Die Posteriori-Wahrscheinlichkeit wird somit als  $P(A|B)$  bezeichnet.

Die **Likelihood-Funktion** enthält die Informationen, die die Daten über den Parameter oder das Ereignis liefern. Dabei beschreibt die Likelihood die Informationen aus den neuen Daten, die zur Aktualisierung der Prioriverteilung beitragen. [4, p. 88]

Die Likelihood-Wahrscheinlichkeit wird somit als  $P(B|A)$  bezeichnet.

---

Die Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  wird als Normierungskonstante bezeichnet. Sie sorgt dafür, dass die Posterioriverteilung korrekt normiert ist, das heißt, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Werte des Parameters 1 ergibt. [4, p. 109]

Das Bayes'sche Theorem lässt sich somit wie folgt darstellen:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (1)$$

Alternativ kann das Bayes-Theorem ohne die Normierungskonstante  $P(B)$  in folgender proportionaler Form dargestellt werden [5, p. 15]:

$$P(A|B) \propto P(B|A) \cdot P(A) \quad (2)$$

### 2.1.3 Beispiele und praktische Anwendungen

## **2.2 Binomiale Verteilung und deren bayesianische Interpretation**

## **2.3 Markov Chain Monte Carlo (MCMC) Methoden**

## **2.4 Konvergenzkriterien und Diagnosewerkzeuge für MCMC-Simulationen**



## **3 Praktischer Teil**

### **3.1 Implementierung bayesianischer Modelle unter Verwendung in Python**

## **3.2 Anwendung der Modelle auf verschiedene Datensätze**

### **3.3 Durchführung von MCMC-Simulationen**

### **3.4 Interpretation der Ergebnisse**

### **3.5 Vergleich mit klassischen Methoden**

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

## 5 Literaturverzeichnis

Hier ist eine Zitation aus einem Buch [5].

Hier ist eine Zitation aus einem Buch [1].

Hier ist eine Zitation aus einem Buch [3].

Hier ist eine Zitation aus einem Buch [4].

Hier ist eine Zitation aus einem Buch [2].

## References

- [1] Karl-Rudolf Koch. *Einführung in die Bayes-Statistik*. Berlin [u.a.]: Springer, 2000. ISBN: 3540666702. URL: <https://katalog.slub-dresden.de/id/0-306244284>.
  - [2] Gabriele Marinell Gerhard Steckel-Berger. *Einführung in die Bayes-Statistik Optimaler Stichprobenumfang*. Berlin ;Boston , , ©2000. URL: <https://katalog.slub-dresden.de/id/0-871513366>.
  - [3] Thomas Müller-Gronbach, Erich Novak, and Klaus Ritter. *Monte Carlo-Algorithmen*. Berlin: Springer, 2012. ISBN: 9783540891406. URL: <https://katalog.slub-dresden.de/id/0-618339728>.
  - [4] Wolfgang Tschirk. *Statistik: Klassisch oder Bayes zwei Wege im Vergleich*. Berlin , , © 2014. ISBN: 3642543847. URL: <https://katalog.slub-dresden.de/id/0-160866449X>.
  - [5] Dieter Wickmann. *Bayes-Statistik Einsicht gewinnen und entscheiden bei Unsicherheit*. Mannheim: BI-Wiss.-Verl., 1990. ISBN: 3411146710. URL: <https://katalog.slub-dresden.de/id/0-276492471>.
-

## **6 Selbstständigkeitserklärung**