Dominante MDS
TP optimisation continue

Lecture outline

1 – Comparaison primal/dual

Enoncé de l'exercice

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$.
Il s'agit de minimiser la fonction f définie sur $\mathbb{R}^N$:

$$\left(x^{(i)}\right)_{1 \leq i \leq N} \mapsto \sum_{i=1}^{N} \left(\exp\left(x^{(i)}\right) + \frac{i}{N} x^{(i)} \right)$$

sous la contrainte

$$\sum_{i=1}^{N} x^{(i)} \geq 1$$

Méthodes à tester et à comparer

- résolution directe du problème (primal) par une méthode de points intérieurs (vue plus tard).
- reformulation à l'aide de la méthode des multiplieurs de Lagrange puis résolution.

Résolution du problème primal

Question 1

- Mettre en œuvre un algorithme classique d'optimisation continue sous contraintes
  - avec Matlab : instruction « fmincon »
  - avec Python : instruction « scipy.minimize »
- Indiquer les résultats
  - valeur optimale de la fonction
  - temps d'exécution
  - tracé du x optimal

pour $N = 10, 100, 200, 400, 600$.

Méthode des multiplieurs de Lagrange

Question 2 : Existence d'un minimiseur

En utilisant les propriétés de la fonction f et de la contrainte (convexité, continuité, comportement lorsque $\|x\| \longrightarrow \infty$ etc.), discuter :

- l'existence d'un minimiseur,
- son unicité,
- l'existence d'un point selle

Question 3 : Expression de la fonction de Lagrange duale

Exprimer la fonction de Lagrange duale $\underline{\mathcal{L}}(x, \lambda)$.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Question 4 : Optimisation de la fonction de Lagrange duale

Donner l'expression du problème dual en faisant apparaitre qu'il s'agit d'un problème d'optimisation :

- à 1 variable (scalaire)
- sous une contrainte de borne
- Mettre en œuvre un algorithme classique d'optimisation scalaire sous une contrainte de borne
  - avec Matlab : instruction « fminbnd »
- Comparer les résultats obtenus avec ceux de la question 1.

Eléments de réponse

Minimiser $f(x) = \sum_{i=1}^{N} \left(\exp\left(x^{(i)}\right) + \frac{i}{N} x^{(i)}\right)$
sous la contrainte $h(x) = 1 - \sum_{i=1}^{N} x^{(i)} \leq 0$

Existence, unicité

- f strictement convexe,
- f coercive $f \longrightarrow \infty$ quand $\|x\| \longrightarrow \infty$
- $C = \left\{x \in \mathbb{R}^N \text{ tq } h(x) \leq 0\right\}$ ensemble convexe
- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^N$ et $C \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

donc le minimiseur existe et est unique

Condition de Slater

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^N$. On vérifie $x = 1_{N\times 1} \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$ et $h(x) < 0$

donc $\hat{x}$ minimiseur $\iff$ il existe $\hat{\lambda}$ tel que $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ point-selle

Eléments de réponse

Recherche d'un point selle

Soit $p_i = \frac{i}{N}$.

Lagrangien

$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \left(\exp\left(x^{(i)}\right) + p_i x^{(i)}\right) + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{N} x^{(i)}\right)$

Fonction de Lagrange duale

$\underline{\mathcal{L}}(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \mathcal{L}(x, \lambda)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, \lambda) = 0 \implies \forall i,\ \exp\left(x^{(i)}\right) + p_i - \lambda = 0$$

$$\hat{x} = \arg\min_{x} \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \log(\lambda - p_1) \\ \vdots \\ \log(\lambda - p_N) \end{bmatrix}$$

Eléments de réponse
Recherche d'un point selle

Optimisation univariée

$$\underline{\mathcal{L}}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} (\lambda - p_i) + (p_i - \lambda)\log(\lambda - p_i) + \lambda$$

➠ Fonction concave, dépendant d'une variable scalaire à maximiser sous la contrainte $\lambda \geq 0$.