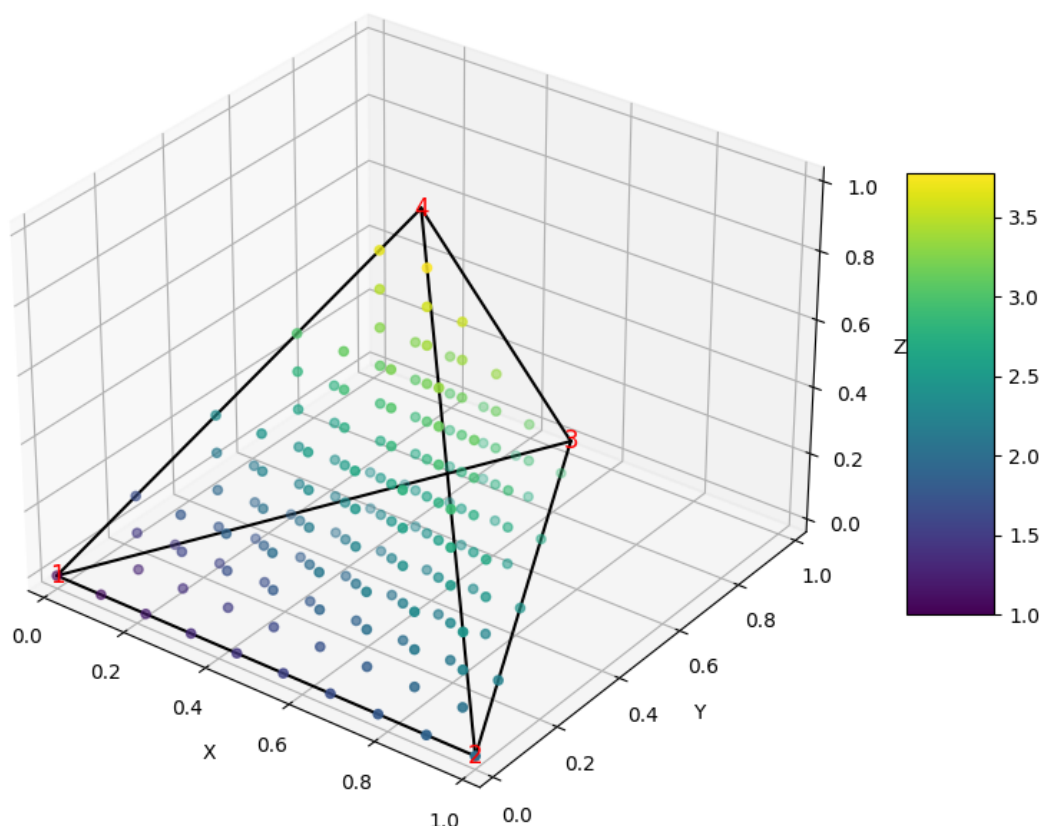


Rapport de stage Aéro 4

Développement de la méthode d'interpolation linéaire et évaluation de ses performances dans l'application de l'aéroacoustique

Stagiaire au sein de l'équipe AAM

Interpolation quadratique en 3D dans un tétraèdre



Remerciements

Je tiens à sincèrement remercier mon maître de stage Carlos pour m'avoir guidé tout au long de ce stage et toujours aidé avec le sourire.

Je tiens également à remercier Madame la présidente du CERFACS, Catherine LAMBERT, pour sa sympathie et pour m'avoir permis de faire ce stage.

Merci à amis montagnards et matheux Benjamin CANOVAS-ANDRIEUX et Dimitri LANIER ainsi qu'à mon professeur de mathématiques à l'IPSA, Guillaume COUFFIGNAL, pour leur précieuse aide en mathématiques.

Merci à mon tuteur pédagogique, Nadir MESSAI, pour son aide dans ma recherche de stage et au sein du CERFACS.

Merci à Alexis BOUDIN pour ses explications sur l'interpolation d'ordre élevé. Merci à mes amis et collègues au CERFACS Kélian RENOUX, Luc POTIER, Arthur COLOMBIÉ, Guillaume DAVILLER ainsi qu'à l'administration et au CSG pour l'aide qu'ils m'ont apportée au CERFACS.

Table des matières

Bilan Technique	4
Introduction	5
1 Le CERFACS	6
2 Présentation du stage	10
2.1 La librairie Antares	10
2.2 Les différentes méthodes d'interpolation	11
2.2.1 L'interpolation par voisin le plus proche	12
2.2.2 L'interpolation Inverse Distance Weighting (IDW)	12
2.2.3 L'interpolation polynomiale	15
2.2.4 L'interpolation à base de distance	15
2.2.5 Méthodes géostatiques	15
2.2.6 Méthode par moindres carrés	16
2.2.7 MISCOG	16
2.2.8 L'interpolation linéaire	16
2.2.9 Résumé des similitudes et différences des différentes méthodes	19
2.3 Implémentation de la méthode linéaire	19
2.3.1 La structure générale du code TreatmentInterpolation	19
2.3.2 Le Pseudo-algorithme	20
2.3.3 Optimisation du temps de calcul	20
2.3.4 Le résultat	21
2.4 Tests sur des cas d'aéroacoustique	21
2.4.1 Tests sur les paramètres de la méthode IDW	21
2.4.2 Discrétisation spatiale et résolution du problème	22
Conclusion	23
Annexes	24
Bibliographie	29

Bilan Technique

Fiche de synthèse		Clément THIBAUT - Aéro 4	
Sujet de stage		Objectifs	
Influence de la méthode d'interpolation sur la propagation acoustique FWH		<ul style="list-style-type: none">- Développer une méthode d'interpolation linéaire HPC dans Antares- Évaluer l'influence de la méthode d'interpolation dans la qualité des résultats de propagation acoustique avec l'analogie FWH- Améliorer les performances HPC de la méthode d'interpolation dans Antares	
Client principal		Outils utilisés	
<ul style="list-style-type: none">- CERFACS- Date de mise à jour : 15 octobre 2024		VSCode, Python, Kraken (supercalculateur du CERFACS), Antares, Paraview, Git	
Études réalisées			
<ul style="list-style-type: none">— Influence de paramètres de la méthode d'interpolation IDW— Différences de DSP entre la méthode IDW et linéaire— Optimisation de la rapidité du traitement			
Résultats		Explications des écarts possibles	
<ul style="list-style-type: none">- Meilleurs paramètres pour l'IDW se situent autour de $N=10$ et $p=10$- Méthode linéaire généralement plus précise que IDW- Rapidité du code d'interpolation augmentée, pour toutes les méthodes, d'un facteur 100 sur le cas test d'aéroacoustique		<ul style="list-style-type: none">- $N=10$ et $p=10$ donne beaucoup d'information et d'importance aux points proches- La méthode linéaire est d'ordre 1 contrairement à IDW qui n'a pas d'ordre au sens usuel du terme- Pour la rapidité, une amélioration a consisté à ne pas recalculer des coefficients à chaque instant de la solution	
Difficultés rencontrées		Travaux à poursuivre	
<ul style="list-style-type: none">- Prise en main des outils- Adapter la méthode linéaire au code déjà existant		<ul style="list-style-type: none">- Optimiser la méthode linéaire pour les maillages prismatiques- Traiter les maillages 'multi-zones' avec points partagés en linéaire- Implémenter une méthode d'ordre supérieur- Passer le code en parallèle pour améliorer la rapidité sur supercalculateur	

Introduction

Ce rapport de stage a pour objectif de permettre à l'IPSA, de m'évaluer sur le stage. La structure et le contenu principal de ce rapport sont fixés par l'école.

Il vise également à fournir un rapport sur mon stage pour le CERFACS et pour d'autres personnes qui utiliseraient ou modifieraient le traitement d'interpolation d'Antares.

J'adore les mathématiques appliquées, la mécanique des fluides et je voulais découvrir le monde de la recherche. Lors d'une présentation des activités au Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS) par nos deux enseignants chercheurs Arthur COLOMBIÉ et Nadir MESSAI, j'ai eu l'occasion de découvrir ce laboratoire et d'y candidater pour mon stage de M1. Carlos MONTILLA, docteur au CERFACS, m'a proposé un sujet sur l'interpolation dans le cas de post-traitement de simulations numériques et son application en aéroacoustique. Le sujet m'a interpellé et c'est avec enthousiasme que j'ai ainsi pu commencer mon stage le 10 juin 2024 au CERFACS.

En quelques mots, le CERFACS est un institut de recherche privé, spécialisé dans le développement de code High Performance Computing (HPC), financé par sept actionnaires.

Antares[1] est un code d'analyse de données privé sous forme de librairie python, développé au CERFACS en 2012 dont l'objectif est de réaliser du pré et post-traitement sur des simulations numériques utilisées par le CERFACS et ses sept actionnaires. Il contient notamment une fonction d'interpolation, codée en Python.

Mon maître de stage, Carlos MONTILLA, est responsable d'Antares depuis dix mois. Il a notamment développé le traitement Ffowcs Williams-Hawkings (FWH) qui utilise le traitement interpolation.

Mes missions principales lors de ce stage ont été :

- De faire un état des lieux sur les autres méthodes d'interpolation qui seraient implémentables dans Antares (avec ses contraintes associées).
- D'identifier les meilleurs paramètres pour l'équation Inverse Distance Weighting (IDW), la seule qui était implémentée jusqu'alors dans Antares
- D'implémenter la méthode linéaire.

Pour bien comprendre l'idée globale, l'objectif est d'interpoler les valeurs aux points d'un maillage 'cible', issu d'une discrétisation de l'espace, en utilisant les valeurs aux points d'un maillage 'source'. Par exemple dans le cadre d'un raffinement de maillage entre deux itérations de calcul ou bien dans le cadre de la création d'une sphère dans un maillage 3D pour l'application des équations de FWH pour la propagation aéroacoustique.

Pour expliquer plus en détail ce stage au CERFACS, je présenterai dans une première partie ce laboratoire de recherche, puis dans une seconde partie j'exposerai le travail que j'ai réalisé sous forme de rapport. La seconde partie, se décompose en quatre temps : la présentation de la librairie Antares, les différentes méthodes d'interpolation, l'implémentation de la méthode linéaire dans Antares et finalement les tests de l'ancienne et la nouvelle méthode.

Chapitre 1

Le CERFACS

Le CERFACS est un laboratoire de recherche privé dont les actionnaires sont Airbus, le CNES (Centre National d'Études Spatiale), EDF (Électricité de France), Météo France, l'ONERA (Office National d'Études et de Recherche Aéronautiques), Safran et TotalEnergies. Il a pour but de développer la simulation numérique par le calcul haute performance HPC pour ses actionnaires, mais aussi de faire de la recherche et de former des ingénieurs, chercheurs et doctorants. Il a été créé en 1988 sous le statut de Groupement d'Intérêt Public (GIP), pour devenir une société civile en 1996 et depuis 2021, le CERFACS est une SAS (Société par Actions Simplifiées).

Les deux bâtiments du CERFACS sont situés au Météopole, dans la partie Ouest de Toulouse. Environ 170 personnes y travaillent, dont 20 % de femmes, 50% de doctorants et 20% d'étrangers dont la moitié ne sont pas Européens.

Physiciens, mathématiciens, informaticiens, numériciens et data Scientist y travaillent dans cinq équipes :

- ALOGrithmes parallèles & sCientifics sOftware Operational Performances (ALGO-COOP)
- Équipe Informatique et Support Utilisateur (CSG)
- Énergie et Sécurité; Energy and Safety (ES)
- Advanced Aerodynamics and Multiphysics (AAM)
- Modélisation du climat et de son changement global (GLOBC)

La Conception assistée par Ordinateur (CAO) permet de faire les plans numériques d'un avion par exemple, afin de s'assurer que toutes les pièces fabriquées vont bien s'imbriquer entre elles. Mais cela permet aussi de faire des simulations numériques pour prévoir à l'avance la tenue structurelle, les forces aérodynamiques, le volume sonore, etc. sans faire d'onéreux tests.

L'équipe AAM se focalise sur la simulation des écoulements en développant des méthodes numériques avancées et en les appliquant aux avions, fusées, hélicoptères, moteurs, turbomachines, etc. Les liens de l'équipe AAM avec toutes les autres équipes du CERFACS sont forts, car ces équipes utilisent aussi la Computation Fluid Dynamics ou mécanique des fluides numérique (CFD) de façon intensive pour prévoir leurs modèles : en effet, derrière ces thèmes, on retrouve en premier les équations qui régissent les écoulements des fluides.

Le CERFACS héberge des supercalculateurs (Kraken et Calypso) et un serveur sur lequel se trouve l'intranet avec toutes les ressources nécessaires aux employés. Nous y trouvons notamment les liens vers la Qualité de Vie au Travail (QVT), le Comité Social et Économique (CSE), un document "Plan du management de la qualité" et énormément d'autres ressources.

Après une recherche non fructueuse sur l'intranet, j'ai pu demander à la responsables de ressources humaines le document relatant des objectifs Responsabilité Sociétale des Entreprises (RSE). Le document d'actions RSE est segmenté en trois parties principales :

Démarche RSE

"Le Cerfacs n'a pas mis en place une démarche spécifique RSE mais des actions ont été réalisées dans ce cadre, vis-à-vis de l'écoresponsabilité, la qualité de vie au travail et une charte éthique a été incluse dans le règlement intérieur depuis décembre 2023 (intégrant notamment la prévention de la corruption et la gestion des conflits d'intérêts).

En outre, le Cerfacs achète ses fournitures auprès de créateurs solidaires (exemple : Antilope qui compte 32 salariés sur les 49 avec une reconnaissance de « travailleur handicapé »).

Le Cerfacs met à jour au moins deux fois par an et aussi souvent que nécessaire un document unique d'évaluation des risques Cerfacs (avec un plan d'actions de prévention).

Le Cerfacs a nommé des référents : un référent « Santé et Sécurité », un référent « Règlement Général sur la Protection des Données (RGPD) », un référent « Handicap », deux référents « Harcèlement, agissements sexistes et violences ».

Un bilan HSE et RSE est présenté chaque année aux Associés du Cerfacs lors de l'Assemblée d'avril."

Écoresponsabilité

J'ai constaté beaucoup d'actions dans le sens de l'écoresponsabilité lors de mon stage. La plupart sont mentionnées dans le document.

Un Groupe de Travail « Bilan carbone du CERFACS », composé de 10 volontaires, a été créé. Des bilans carbone ont été réalisés pour les années 2019 et 2021, en suivant la méthodologie proposée par le collectif de laboratoires Labos1point5¹. Depuis mi-2023, le CERFACS collabore avec le Cabinet Take[air] pour établir un plan d'actions visant à réduire son empreinte carbone. Cette collaboration a permis de réaliser le bilan carbone de 2022 et de commencer l'élaboration d'un plan d'actions, qui devrait être finalisé à l'automne 2024, après la tenue de plusieurs ateliers. Finalement nous trouvons dans le document un tableau 2.1 récapitulant les principaux postes d'émission identifiés dans une première colonne puis les objectifs et actions associés dans une seconde colonne.

En parallèle, j'ai entendu parler de cette démarche en discutant avec des thésards. Et j'ai aussi pu trouver la page depuis l'intranet. Elle est divisée en cinq sections : "présentation", "actualités", "émissions", "bilan" et "actions". J'aime beaucoup l'image ci-dessous, présente dans le document et le site internet, qui montre que le CERFACS réduit ses émissions d'année en année, probablement grâce aux efforts du groupe « Bilan carbone du CERFACS » :

1. <https://labos1point5.org>

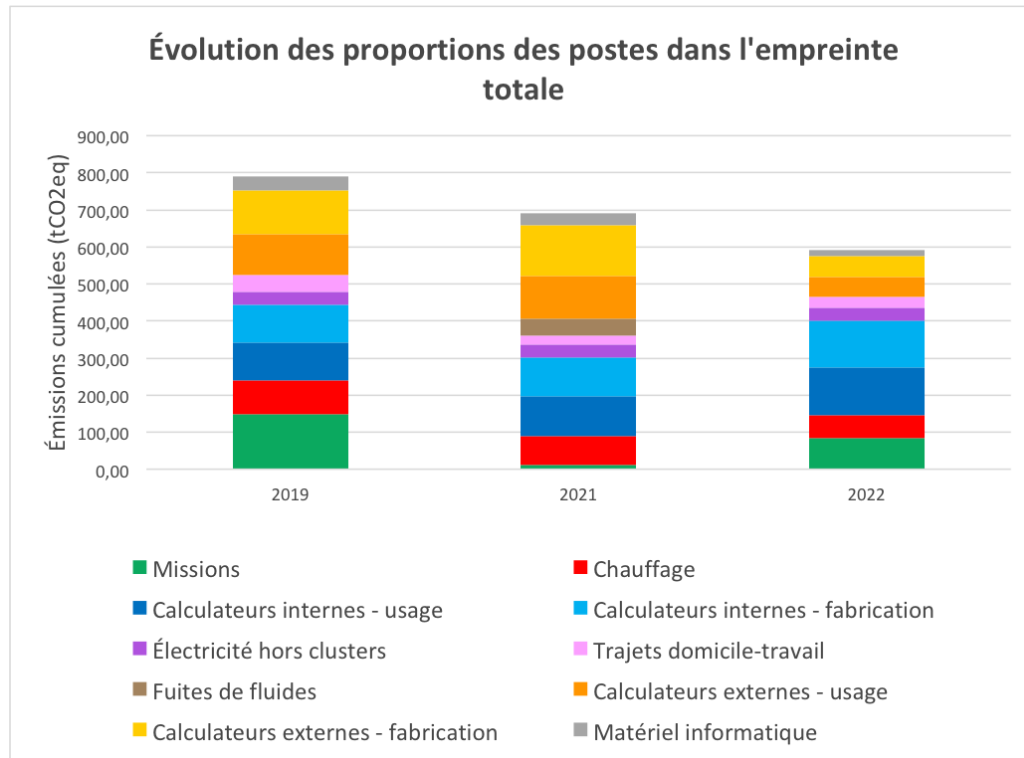


FIGURE 1.1 – Evolution de l'empreinte carbone du CERFACS entre 2019 et 2022

Dans les couloirs du CERFACS on trouve des posters très clairs sur l'empreinte carbone d'un trajet pour une conférence en fonction des moyens de transports.

Les employés sont incités à venir à vélo. Le CERFACS donne une prime pour chaque kilomètre fait à vélo sur le trajet habitation-travail-et vis-versa. Il y a aussi un atelier de réparation et des emplacements sécurisés pour les vélos.

La politique de communication n'est pas spécialement tournée vers les efforts pour le climat ou la RSE, mais le CERFACS agit efficacement en ce sens.

Responsabilité sociale / Qualité de vie au travail

"La démarche Qualité de Vie au Travail (QVT) a été lancée au Cerfacs en janvier 2022, avec la mise en place d'un Groupe de Travail : elle a permis d'identifier 6 axes de travail pour améliorer le fonctionnement de la structure et du ressenti des personnes :

- Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau global
- Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau de l'équipe
- Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau personnel
- Assurer un meilleur accueil et support des non permanents
- Favoriser la vie sociale
- Améliorer le confort matériel"

De nouveau, un tableau2.2 détaille des exemples d'actions que j'ai pu expérimenter (salle de repos, machine à café, endroit pour attacher son vélo, ...)

Un dernier plan d'action a été mis en place sur l'égalité professionnelle entre les femmes et les hommes. Il traite des sujets : l'embauche, la rémunération effective et l'articulation entre l'activité professionnelle et l'exercice de la responsabilité familiale.

Je tiens à mentionner également que j'ai reçu un mail qui lançait un appel au volontariat pour composer le Comité de Pilotage pour la Prévention des Violences Sexistes et Sexuelles au Travail suite à une réunion d'information réalisée en collaboration avec la médecine du travail.

Mon ressenti personnel sur le cadre de travail est très positif. Être assis dans un bureau climatisé avec une vue sur la campagne participe évidemment à cela. Un des seuls risques à ce type de travail est une mauvaise position qui peut entraîner des problèmes de dos, épaules, etc. Pour palier cela il y a des affiches dans chaque bureau indiquant la meilleure position à avoir et proposant des exercices. Ces mêmes informations apparaissent dans le 'livret d'accueil stagiaire' qui m'a été remis le premier jour.

Une cantine présente sur le site à quelques minutes à pied, permet de manger avec les collègues du CERFACS hors du cadre professionnelle

Chapitre 2

Présentation du stage

Le stage a débuté au début du mois de juin 2024. Un ordinateur et un PIN-pad générateur d'One-Time-Password (OTP) ont été mis à ma disposition. Carlos, mon maître de stage, m'a fourni les informations nécessaires pour comprendre et utiliser Antares[1], une librairie de développement, à l'aide de la documentation en ligne¹. Ensuite j'ai résolu un bug mineur sur Antares, ce qui a permis de se familiariser avec Nitrox, le Gitlab hébergé sur le serveur du CERFACS où sont situés Antares et d'autres codes du CERFACS.

2.1 La librairie Antares

Généralement, nous mettons en entrée dans Antares des données, issus d'une simulation numérique. Antares les lit et les structures à sa façon.

La structure des solutions CFD interprétées dans Antares est illustrée ci-dessous :

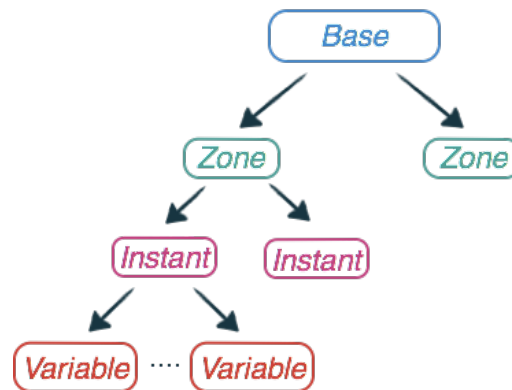


FIGURE 2.1 – Structure des données

Concrètement, le maillage peut être divisé en plusieurs zones. Ensuite chaque zone a un ou plusieurs instants où nous pouvons trouver la solution d'une variable, qui sera de même dimension que les coordonnées de l'instant.

Ensuite Antares a différents traitements, comme la vue en coupe, l'interpolation, etc.

Voici un exemple d'utilisation d'Antares :

```
1 import antares
2 myt = antares.Treatment('interpolation')
3 myt['source'] = source_base
4 myt['target'] = target_base
5 result = myt.execute()
6 print(result[0][0]['v1'])
```

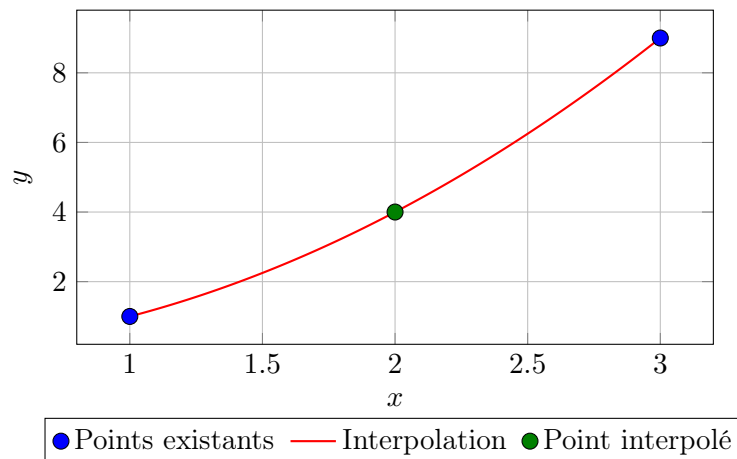
Listing 2.1 – Exemple simple d'utilisation d'Antares pour interpoler

1. Documentation d'Antares : <https://cerfacs.fr/antares/>

Un point important pour l'interpolation linéaire est la connectivité. Si le maillage est non structuré, alors, chaque cellule est définie par un type de forme et par ses sommets. Par exemple, elle peut être donnée par `base[0][0]['tri']` si la base contient des triangles (a une connectivité "tri") dans sa zone 0 à l'instant 0.

2.2 Les différentes méthodes d'interpolation

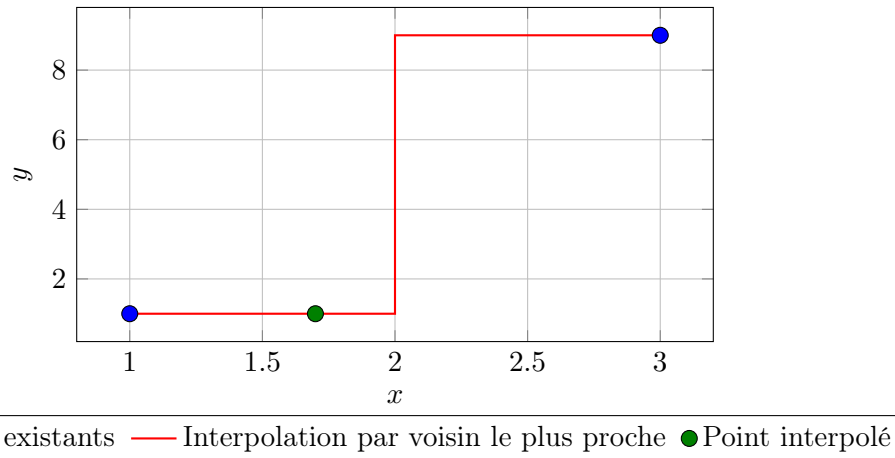
L'interpolation consiste à déterminer la valeur de nouveaux points à partir de la valeur de points existants. En voici un exemple en une dimension (l'axe x représente la position et l'axe y la valeur des points).



Nous allons premièrement présenter les types d'interpolation implémentables dans Antares, à savoir, qui permette de l'interpolation une Dimension (1D) à 3D, sur des maillages dits non structurés, c'est-à-dire pas de simples maillages, rectangulaires en 2D et hexaédrique en 3D, représentés par des matrices, mais des maillages créés avec différentes formes géométriques. Le temps de calcul, appelé 'coût' est aussi un paramètre à prendre en compte. Finalement, les caractéristiques mathématiques des équations à interpoler est probablement le paramètre le plus important à prendre en compte, mais aussi assurément le plus difficile. Effectivement différentes équations très difficiles à caractériser mathématiquement tel que l'équation de Naviers-Stokes sont utilisées et le niveau en maths est trop élevé pour pouvoir se plonger en profondeur dans ce problème. C'est pour cela qu'il n'y aura pas beaucoup de résultat mathématique à présenter dans cette partie. Mais heureusement que ces méthodes ont déjà été implémentés et testés pour d'autres codes de simulation numérique, ce qui donne une bonne idée des résultats que nous pouvons espérer.

2.2.1 L'interpolation par voisin le plus proche

Cette première méthode est très simple : nous prenons comme valeur v d'interpolation au point p la valeur v du point le plus proche de p . En voici quelques illustration :



Cette méthode est discontinue et peu précise pour la plupart des fonctions.

2.2.2 L'interpolation IDW

Probablement l'interpolation la plus simple après la méthode du voisin le plus proche (toujours dans notre cas d'application), cette méthode est la seule qui était implémentée dans Antares. Elle a pour formule :

$$\hat{f}(x) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{d(x, x_i)^p}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d(x, x_i)^p}}$$

où :

- $\hat{f}(x)$ est la valeur interpolée à la position x ,
- $f(x_i)$ est la valeur connue aux points de données x_i ,
- $d(x, x_i)$ est la distance entre x et x_i ,
- p est le paramètre de puissance,
- N est le nombre total de points de données.

Pour éviter une division par 0, très proche d'un point existant, le point interpolé prendra la valeur du point existant. Cette distance est définie à 1e-10 dans le traitement et peut être modifiée par l'utilisateur en ajustant l'argument 'tolerance' en ajoutant la ligne :

```
1 myt['tolerance'] = valeur
```

entre la ligne 2 et 5 de l'exemple présenté dans la partie 2.1 La librairie Antares. Il en est de même pour les paramètres N et p avec pour argument respectivement 'nb_points' et 'invdist_power'.

En voici des illustrations 1D :

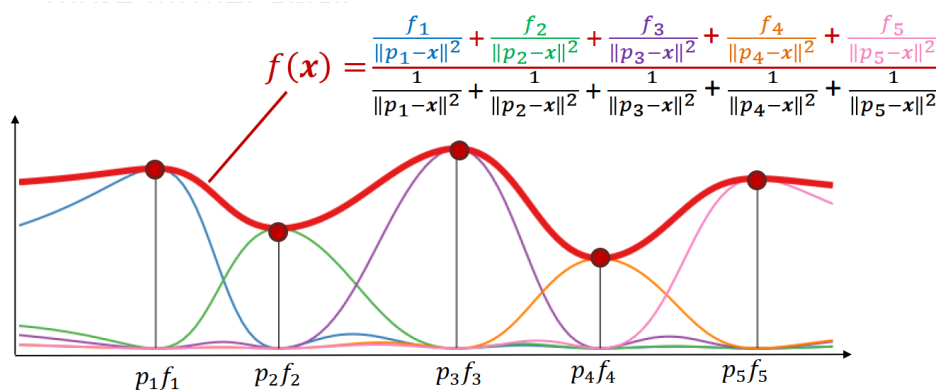
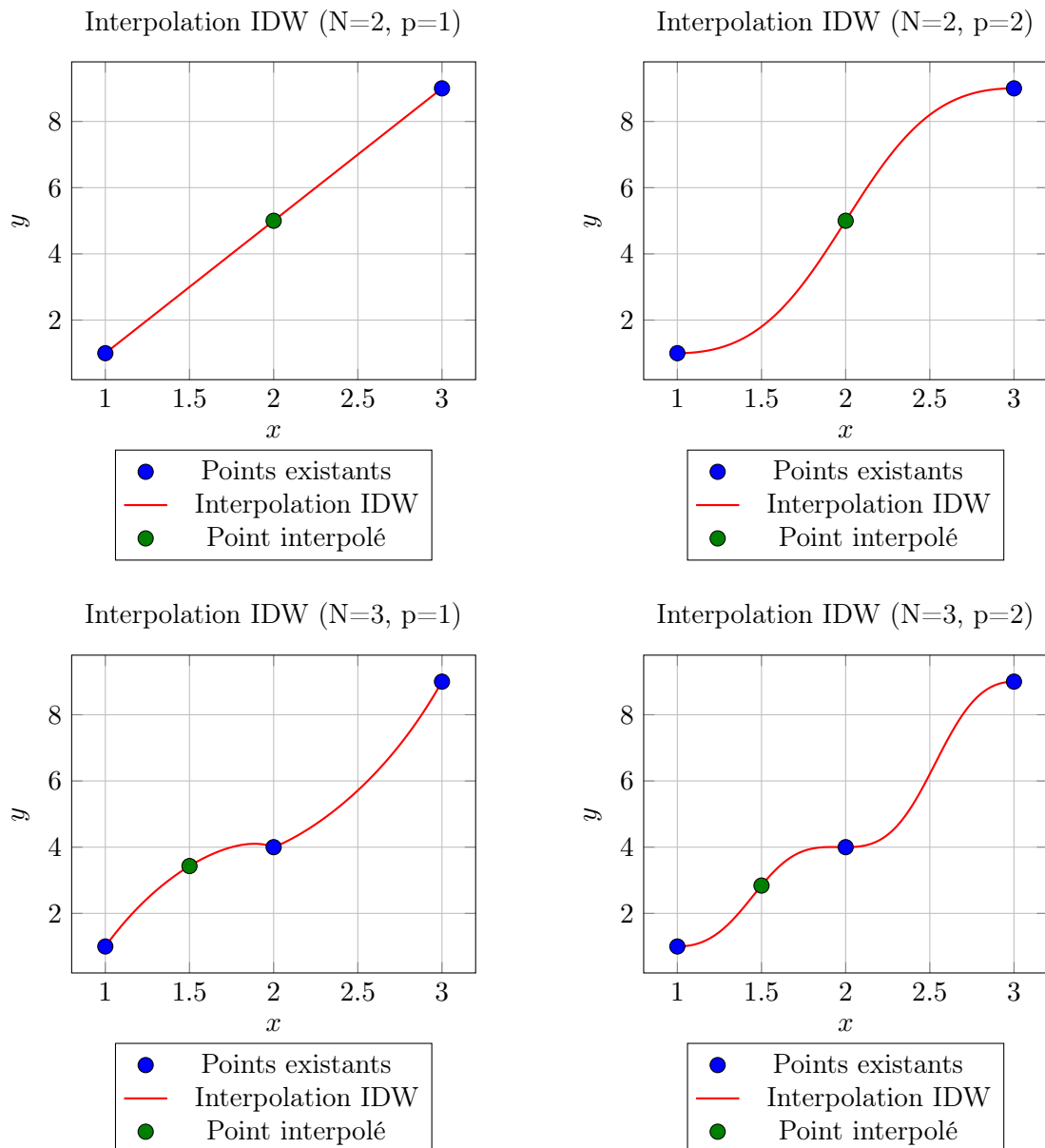
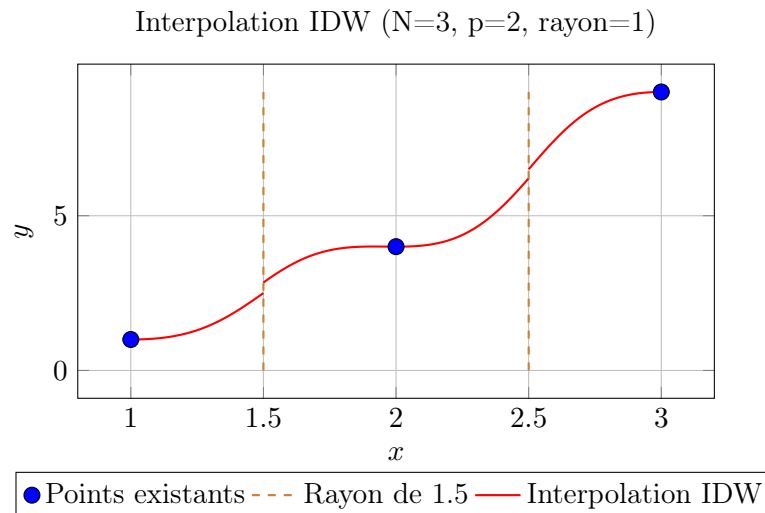


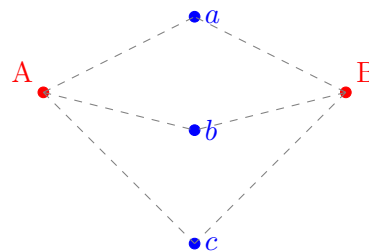
FIGURE 2.2 – Interpolation 1D avec (N=5, p=2 et r infini)

Dans notre cas, nous ne prenons pas en compte tous les points du maillage source. Nous nous limitons à un nombre N de points les plus proches. Cela implique une discontinuité lorsque nous changeons de point. Pour illustrer cela, voici une figure 1D où tous les points sont espacés d'une unité. Avec $N=3$, cela revient ici à changer l'un des trois points de calcul tout les unités $+0,5$ de x .



Nous observons une discontinuité en 1,5 et 2,5. La discontinuité peut être un grand problème pour la stabilité des schémas numériques

Nous pouvons aussi imaginer que 2 points, A et B, à droite et à gauche d'une ligne verticale de 3 points (les plus proches), prendrons la même valeur pour $N = 3$:



Ce qui n'est pas cohérent dans le cas où le gradient selon l'horizontal n'est pas nul.

Un des problèmes avec la méthode IDW est que « un biais directionnel dans les solutions de la base de données peut décaler les résultats interpolés »².

Lorsque toutes les informations selon un axe de l'espace ne se situe que d'un côté, le gradient ne sera pas pris en compte et l'erreur sera élevée. Par exemple, cela est généralement le cas lorsque le maillage cible a des points qui ne sont pas compris dans le maillage source.

D'autres méthodes dérivées ou similaires existent pour évaluer nos poids. La plus intéressante serait celle dite de Franke-Littke. Elle consiste à utiliser une distance maximale autour du point au-delà des autres points ne sont pas pris en compte. Autrement dit, en utilisant un cercle (dans le cas 2D) d'un certain rayon pour déterminer quels points nous sont utiles pour l'interpolation. Dans ce cas le nombre de points est variable. J'ai considéré subjectivement que cette méthode n'était pas intéressante car, confronté à un maillage ayant une différence de raffinement intrinsèque importante, dans certains cas aucuns points ne seraient pris, et dans d'autres, une trop grande somme serait calculée.

Par défaut, dans le code, $p = 1$ et N est égale aux nombres de sommets de la première cellule de la liste de types de cellules de la base target. Il y aurait peut-être une modification mineure à faire sur ce point. La structure de la base target importe peu à côté de celle de la base source,

2. Traduction de : « One issue with the IDW method is that a directional bias to the database solutions can shift the interpolated results. »[21]

pour l'interpolation. Mais aucune modification qui pourrait changer l'utilisation qui a déjà été faite de ce traitement ne pourra être faite par soucis de rétrocompatibilité.

Nous remarquons que pour $N = 1$, nous retrouvons la méthode du voisin le plus proche, pour tout p . Et pour $N = 2$ et $p = 1$, toujours en 1D, nous retrouvons la méthode linéaire.

Une de mes missions était de chercher s'il y avait des paramètres plus optimisés que N et p pour cette méthode. Je n'ai pas trouvé la réponse dans les différents articles[10] et thèses que j'ai lues. C'est pour cela que je présenterais plus tard comment j'ai trouvé des paramètres optimaux en faisant des tests.

Une des limitation[18] de la méthode IDW est qu'elle n'a pas d'autocorrélation spacial, contrairement à la méthode kriging que je décrirais plus tard.

Est-ce que je dois mettre un titre pour référencer toutes les illustrations que je fais de mon côté ?

2.2.3 L'interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale est d'un degré correspondant à celui du polynôme utilisé. Elle peut être réalisée en N dimensions sur un maillage structuré. Cette interpolation est de classe C^∞ (c'est-à-dire infiniment dérivable, avec des dérivées de tous ordres continues)

Lagrange ...

Hermite ...

Splines ...

NURBS Non Uniform Rational Basis Splines; B-splines rationnelles non uniformes (NURBS)
Cette méthode[25] pourrait être un bon candidat pour l'interpolation

2.2.4 L'interpolation à base de distance

IDW Comme décrit plus tôt dans la partie 2.2.2, la méthode IDW se base sur la distance des points pour le calcul de l'interpolation.

Shépard ...

RBF Radial Basis Function (RBF) ...

2.2.5 Méthodes géostatistiques

<https://desktop.arcgis.com/fr/arcmap/latest/extensions/geostatistical-analyst/what-is-arcgis-geostatistical-analyst-.htm>

Cokriging is the multivariate extension of kriging formalism, which allows to deal simultaneously with two or more variables defined over the same domain and to account for additional information about spatial correlation between the variables : <https://www.sciencedirect.com/topics/agricultural-and-biological-sciences/kriging>

"We specifically use the Gaussian RBF and the Exponential Dot Product Kernels to do the interpolations, and approximate the benchmark called Franke's Function." : <https://bitbucket.org/joelrosenfeld/rbf-and-kernel-interpolation/src/master/>

"The Moving Least Squares (MLS) method is a meshless numerical technique used for solving partial differential equations (PDEs) and reconstructing functions from scattered data, especially in cases where the data points are irregularly spaced or unstructured. Ligne a decouper

Expliquer voronoï

Pour prochaine méthode : <https://github.com/Ferrite-FEM/Ferrite.jl/blob/master/src/interpolations.jl>

Super site pour ordre supérieur : <https://getfem.readthedocs.io/en/latest/userdoc/appendixA.html>

2.2.6 Méthode par moindres carrés

Approximation des moindres carrés ...

Moindres carrés mobiles ...

2.2.7 MISCOG

Plusieurs méthodes d'interpolation d'ordre élevé sont déjà implémentés dans d'autres codes du CERFACS...

2.2.8 L'interpolation linéaire

L'interpolation linéaire, est la plus simple (après les plus proches voisins et IDW). Elle est moyennement précise et ne demande que peu de ressource. Elle interpole généralement mieux qu'IDW. C'est pour cela que le CERFACS voulait l'implémenter dans Antares. C'est aussi la plus utilisée par Airbus, Safran et d'autres industriels (dans via d'autres codes qu'Antares). Cela les arrange donc aussi d'avoir une interpolation linéaire directement dans Antares.

1D

Linéaire En 1D, l'interpolation linéaire est simple : c'est la moyenne pondérée linéairement par la distance, des valeurs des deux points les plus proches. Supposons que nous voulons interpoler une valeur d'un point p entre deux points a et b dans un espace 1D et que nous représentons leurs valeurs dans une deuxième dimension y . Nous aurons alors pour formule :

$$y_p = \frac{x_b - x_p}{x_b - x_a} \cdot y_a + \frac{x_p - x_a}{x_b - x_a} \cdot y_b$$

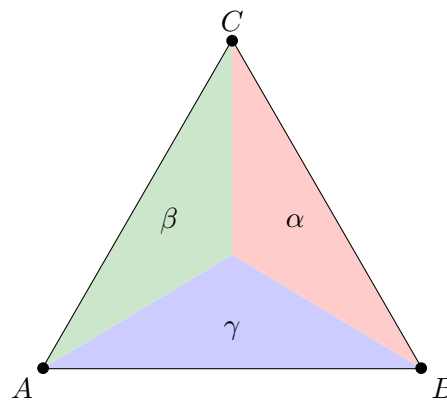
où y_p représente la valeur interpolée à la position x_p , et (x_a, y_a) et (x_b, y_b) sont les points de référence. J'ai écrit cette formule afin qu'elle soit symétrique par rapport aux points a et b , pour qu'ils jouent la même rôle. Ainsi elle s'entendra plus intuitivement dans des dimensions supérieures.

$\frac{x_b - x_p}{x_b - x_a}$ est le poids pour y_a basé sur la distance relative de x_p à x_b .
 $\frac{x_p - x_a}{x_b - x_a}$ est le poids pour y_b basé sur la distance relative de x_p à x_a .

Ces deux termes sont pondérés de manière que leur somme soit toujours égale à 1, ce qui garantit que l'interpolation est correcte et symétrique par rapport à a et b .

2D En 2D, nous devons nous baser sur des surfaces, extraites de formes pour pouvoir effectuer cette pondération. En CFD, ces formes sont appelées cellules et leurs sommets nœuds. Dans notre cas, nous considérons que les variables du maillage sont contenus au niveau des nœuds. Aussi, Antares ne traite que des maillages ayant des valeurs uniquement au niveau des nœuds des cellules (pas entre). Il existe 3 principaux types de cellules (formes) en 2D : les triangles, les rectangles des maillages structurés (dans ce cas, la méthode est dite bilinéaire) et les quadrilatères (non croisés).

Triangle : Barycentrique Pour le triangle, la méthode pour trouver la valeur au point à interpoler p est celle dite du barycentre (barycentrique). Elle est bien documentée. Visuellement, il faut faire la somme des valeurs aux points pondérés par la surface opposés et pondéré le tout par la surface du triangle.



Interpolation Barycentrique

Le calcul est

$$\frac{y_A \times \alpha + y_B \times \beta + y_C \times \gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \quad (2.1)$$

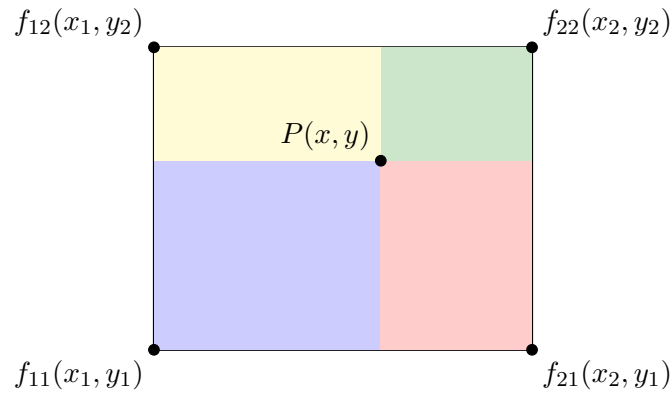
Bien sûr, les triangles sont quelconques, mais la formule reste la même

Rectangle : bilinéaire En ce qui concerne l'interpolation bilinéaire sur un rectangle, nous la trouvons aussi facilement. La formule est l'extension de celle pour les triangles :

$$f(x, y) = \frac{(x_2 - x)(y_2 - y)f_{11} + (x - x_1)(y_2 - y)f_{21} + (x_2 - x)(y - y_1)f_{12} + (x - x_1)(y - y_1)f_{22}}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \quad (2.2)$$

Ici les surfaces sont directement calculées

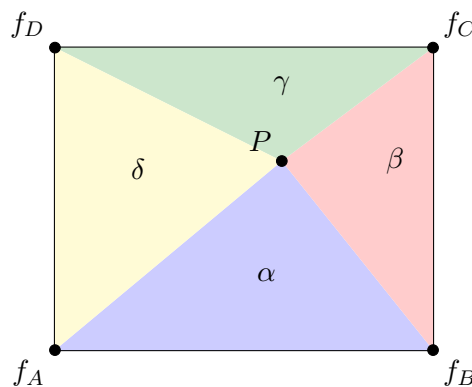
Visuellement nous créons cette fois des traits parallèles au passant par le point d'interpolation et nous additionnons, de manière pondérée, les 4 surfaces multipliées chacune par leur sommet opposé respectif. Cela correspond à deux interpolations linéaires. Souvent nous trouvons une équation analytique où tous les sommets ne jouent pas le même rôle, mais je trouvais cela plus simple de faire un calcul de poids pour pouvoir ensuite faire une moyenne pondérée :



Interpolation Bilinéaire

Quadrilatère Viens maintenant la dernière forme 2D rencontrée dans les solutions traitées par Antares : les quadrilatères. Pour cela je n'ai pas trouvé de méthode. Après plusieurs essais sur papier, je me suis concentré sur le fait que la méthode devait être continue, ce qui implique notamment que la valeur du point à interpoler doit tendre vers la valeur d'un sommet lorsque sa distance à ce dernier tend vers 0. Une première vérification de la linéarité est aussi de vérifier qu'un point au milieu d'une forme 2D a comme valeur la moyenne de ses côtés. Via cette démarche, j'ai imaginé, graphiquement, tracer des traits entre le point à interpoler et les sommets de la forme dans laquelle il se situe (tel que pour l'interpolation Barycentrique). Cela permet de ne créer uniquement 4 sous formes. Ensuite pour déterminer le poids associé au sommet s_1 , il faut multiplier les deux surfaces qui lui sont opposés entre elles, et bien entendu, le pondérer une fois les autres poids calculés. Par opposé j'entends que ces surfaces ne sont composées d'aucune arête ayant pour l'une de leurs extrémités le point d'interpolation. Ceci est important pour le 3D. Pour l'instant, je n'ai démontré que par l'expérimentation que cette méthode était linéaire. Un point qui me perturbait était de faire des multiplications de surfaces, donc ordre 4, dans une méthode linéaire. Mais contrairement à son nom, l'interpolation bilinéaire est en réalité quadratique avec un résultat linéaire. On pourrait imaginer que, par chance, ma méthode soit quadratique. Premièrement j'ai vérifié et ce n'est apparemment pas le cas. Deuxièmement je pense que le quadratique n'englobe pas le linéaire dans le cas où nous nous basons uniquement sur les quatre points d'un quadrilatère. Effectivement, en 1D, si nous avons $f(x_i) = 0$ et $f(x_{i+1}) = 1$, le résultat d'une variable linéaire serait 0,5 et celui d'une variable quadratique 0,25, si nous avons uniquement connaissance de ces deux points. Normalement il faut s'appuyer sur plus de points pour le quadratique. Finalement voici l'équation :

$$f(P) = \frac{f_A \cdot (\beta \times \gamma) + f_B \cdot (\gamma \times \delta) + f_C \cdot (\delta \times \alpha) + f_D \cdot (\alpha \times \beta)}{(\beta \times \gamma) + (\gamma \times \delta) + (\delta \times \alpha) + (\alpha \times \beta)} \quad (2.3)$$



Interpolation dans un quadrilatère quelconque

3D

Pavé droit : Trilinéaire Pour le 3D, si le maillage est structuré, alors la forme est le pavé droit. À ce moment, nous sommes dans le cas de l'interpolation dite trilinéaire. Encore une fois la formule se trouve facilement. Nous associons comme poids à un des huit sommets s_1 le volume opposé, construit de la sorte :

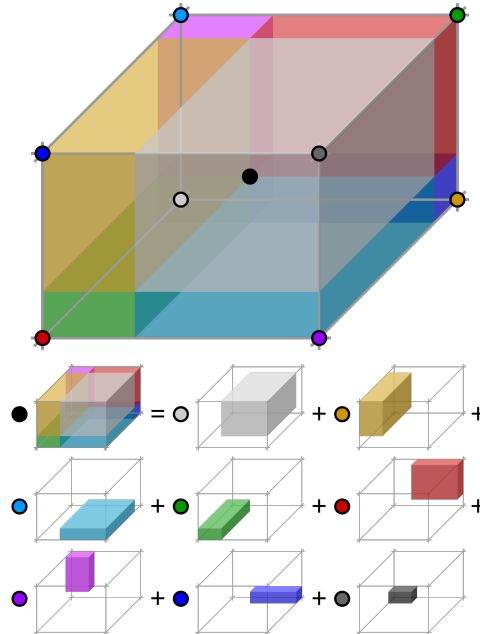


FIGURE 2.3 – Interpolation trilinéaire

L'équation qui en découle est la suivante :

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{ijk} (1 - |x - x_i|)(1 - |y - y_j|)(1 - |z - z_k|) \quad (2.4)$$

Tetraedre : Barycentrique étendu Pour le tétraèdre (une pyramide à base triangulaire quelconque), nous trouvons bien un volume opposé à chaque sommet. Opposé dans le sens où le sommet ne partage pas de segment avec le volume. Nous pouvons alors appliquer la même formule que pour le triangle, avec 4 volumes à la place de 3 surfaces.

Prisme et pyramide Pour le prisme et la pyramide (à base quadrilatérale), une extension de la formule pour le quadrilatère sera faite.

La méthode ne fonctionne possiblement pas pour des prismes constitués de triangles non parallèles entre eux dans l'espace et/ou de surface différentes.

Note pour l'ordre supérieur : faire une transformation des formes qui aurait pu être utilisé en linéaire comme pour le cas du quadrilatère.

2.2.9 Résumé des similitudes et différences des différentes méthodes

2.3 Implémentation de la méthode linéaire

2.3.1 La structure générale du code TreatmentInterpolation

EXPLICATION PLUS DÉTAILLER DU KDTREE

Après avoir recensé les différentes méthodes qui seraient applicables, ma seconde mission a été d'implémenter une interpolation linéaire dans Antares. Grâce à Nitrox, j'ai accès au code source

de la librairie que je peux modifier. Le code 'interpolation.py' faisais environ 500 lignes. Il est orienté objet. Il prend comme arguments obligatoires la base source et la base target et renvoie dans le cas le plus simple la base target avec les valeurs interpolés. De manière simplifiée, dans le code, les zones de la base source sont fusionnées puis nous parcourons les instants. Cette fusion permet de faire un KDTree (pour arbre à k-dimensions), qui permet concrètement de rechercher de manière efficace quels sont les N points de la base source les plus proches des points de la base target (et les distances associées, utilisés dans la méthode 'idw').

Ensuite nous calculons l'interpolation via une méthode 'principale' (`__idw_interpolate_instant` ou `__barycentrique_interpolate_instant`) qui peut elle-même appeler des fonctions ou méthodes.

2.3.2 Le Pseudo-algorithme

Voici le pseudo-algorithme simplifié donnant l'architecture de la fonction linéaire du traitement interpolation.

Initialisation :

- Créer le KD-tree
- Créer une liste de listes appelée `node_to_elements`
- Définir les points à interpoler

Parcours des points à interpoler :

- Pour chaque point :
 - ◊ Si la distance au point le plus proche est inférieure à `tolerance` :
 - Le poids associé au point cible prend la valeur 1
 - Le sommet associé au point cible prend la valeur du point source le plus proche
 - ◊ Sinon :
 - Récupérer les indices des éléments des points les plus proches
 - Pour chaque élément pertinent :
 - Récupérer les coordonnées des sommets (points) de l'élément
 - ◊ Si le point est à l'intérieur de la forme de l'élément :
 - Calculer les poids 'barycentriques'
 - Récupérer les indices des sommets (points) de la base source
 - ◊ Si le point n'est dans aucune cellule proche :
 - Le poids associé prend la valeur nan

Dans le cas où le maillage est le même entre tous les instants, ou que l'utilisateur a déjà récupéré les poids (et autres valeurs utiles) nous ne recalculons pas tous les paramètres, ce qui permet une diminution significative du temps de calcul.

Mise à jour de la base source :

- Pour chaque variable à interpoler :
 - La variable de chaque nouveau point prend la valeur des poids calculés multipliés par la variable aux sommets (points) respectif de la base source

2.3.3 Optimisation du temps de calcul

Plusieurs axes ont été exploités afin de diminuer le temps de calcul du traitement interpolation.

Le premier a été énoncé dans le pseudo-algorithme section précédente. Il s'agit de ne calculer qu'une seule fois le couple (poids, indices des points source) et autres paramètres puis de les enregistrer. Cela est utile dans deux cas :

- Entre les instants si la structure des deux bases restent inchangés. Par exemple dans le cas de l'aéroacoustique, la solution contiens 200 instants, le temps de calcul est alors presque divisé par 200. Dans le code, un test est fait pour savoir si tous les instants sont dits 'partagés'. Si oui, alors les poids et autres données nécessaires sont calculés (grâce à la variable `computation`), mais pas le premier instant. Ensuite tous les instants seront calculés avec les données.

- Si le calcul sur la base source est réalisé plusieurs fois sans que sa structure ne soit changée. Ceci arrive régulièrement, notamment lors de tests. Dans ce cas, il faut légèrement changer l'appel à la fonction, voici un exemple :

```
1  import antares
2  from copy import deepcopy
3  # deepcopy est utilise pour s'assurer que la 'target_base' ne soit pas calculee
   par le traitement
4
5  myt = antares.Treatment('interpolation')
6  myt['source'] = source_base
7  myt['target'] = deepcopy(target_base)
8  myt['get_data'] = True
9  result1, data = myt.execute()
10
11 # 'data' peut etre enregistre sur votre ordinateur par exemple, pour pouvoir
   etre appele plus tard
12
13 myt = antares.Treatment('interpolation')
14 myt['source'] = source_base
15 myt['target'] = target_base
16 myt['data'] = data
17 result2 = myt.execute()
```

Listing 2.2 – Exemple de réutilisation des données

Ici, `result2` aura été calculé beaucoup plus rapidement que `result1`

De plus ce changement est aussi appliqué à la méthode IDW sans poser de problème de rétrocompatibilité, car les résultats sont inchangés.

La méthode linéaire était initialement 200 à 500 fois plus lente que IDW. J'ai donc fait du 'profiling' pour savoir quelles lignes de code étaient les plus coûteuses. J'ai remplacé des listes par des arrays, ce qui augmente la rapidité d'accès aux éléments de ce dernier en mémoire. J'ai aussi optimisé le test de localisation d'un point dans une cellule et de calcul des poids. Je calcule d'abord les surfaces créées par le point cible avec les sommets puis, je calcule le volume de la cellule. Si ces volumes sont à peu près égaux, alors le point est dans la cellule et j'ai les poids. Sinon je sais qu'il faut chercher autre part.

2.3.4 Le résultat

2.4 Tests sur des cas d'aéroacoustique

BIEN AFFICHER QUE LES Paramètres optimaux sont n=10 - p=10

À droit n=10, p=10. Rapports d'amplitude : idw : 101.88

Carlos a développé l'outil permettant de déterminer le résultat acoustique, à grande distance, à partir d'une surface, en utilisant les équations de Ffowcs Williams – Hawkins. Le résultat acoustique sont les petites variations de pression, impliquant du son (à différentes fréquences et amplitudes). En pratique, pour les utilisateurs d'Antares, cette surface est définie dans un maillage 'solution' où nous avons le résultat de la pression en différents points et différents instants.

2.4.1 Tests sur les paramètres de la méthode IDW

... (<https://cerfacs.fr/antares/>) :

— TreeMesh

2.4.2 Discrétisation spatiale et résolution du problème

Conclusion

Annexes

Les principaux postes d'émissions identifiés	Quelques objectifs et actions
Missions	- Prévention sur le sujet sur le site Carbon Footprint du Cerfacs et affiches présentes dans les locaux.
Chauffage	- Rénovation du circuit d'alimentation en eau glacée des ventilo-convecteurs de l'ancien bâtiment (Actions 2023 et 2024) - Traitement de l'étanchéité et de l'isolation de l'ancien bâtiment (analyse réalisée, actions en cours réparties sur plusieurs années pour cause de coût global).
Calculateurs internes et usage	- Un ordinateur a été arrêté en février 2023 et remplacé seulement en 2024. - Une sensibilisation à l'optimisation de l'usage des ordinateurs
Calculateurs internes et fabrication	
Électricité hors clusters	- Automatisation de l'éclairage des circulations de l'ancien bâtiment (abandon de l'éclairage manuel).
Trajet domicile-travail	- Participation à des initiatives en faveur du vélo ("Deux Pieds Deux Roues - 2P2R", "Objectif Employeur Pro Vélo") - Mise en place du Forfait Mobilité Durable pour le vélo. - Mise à disposition de deux vélos pour le personnel du Cerfacs
Fuites de fluides	
Calculateurs externes et usage	- Une sensibilisation à l'optimisation de l'usage des ordinateurs
Calculateurs externes et fabrication	
Matériel informatique	Les postes de travail sont globalement à jour et ont un bon niveau de technologie (77% publiés en 2023).

TABLE 2.1 – Axes de travail et exemples d'actions pour limiter l'empreinte carbone du CERFACS

Axes de travail	Exemples d'actions
Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau global	<ul style="list-style-type: none"> - Organisation d'une réunion générale du Cerfacs par la direction 2 fois par an - Valorisation de la bibliothèque (réaménagement de l'espace) - Amélioration de la communication interne (journal de la QVT disponible sur l'intranet, newsletter interne mensuelle) et externe (nomination d'un référent Communication)
Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau de l'équipe	<ul style="list-style-type: none"> - Proposer une formation à l'organisation et à la tenue de réunions efficaces
Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau personnel	<ul style="list-style-type: none"> - Information/sensibilisation au burn-out (par la médecine du travail)
Assurer un meilleur accueil et support des non permanents	<ul style="list-style-type: none"> - Mise en place d'un groupe de travail pour optimiser l'encadrement des non-permanents (doctorants, post-doctorants...) - Rédaction d'une charte QVT
Favoriser la vie sociale	<ul style="list-style-type: none"> - Organisation d'événements sociaux en dehors du temps de travail - Aménagement d'une salle de repos - Organisation de pauses café collectives mensuelles
Améliorer le confort matériel	<ul style="list-style-type: none"> - Nouvelle machine à café à grain mise à disposition pour tous (avec l'achat de café par le Cerfacs) - Gourdes métalliques offertes à l'ensemble du personnel - Achat et installation de nouveaux arceaux pour augmenter la capacité d'accueil des vélos - Sensibilisation à l'ergonomie sur le poste de travail (par la médecine du travail)

TABLE 2.2 – Axes de travail et exemples d'actions pour la Qualité de Vie au Travail au CERFACS

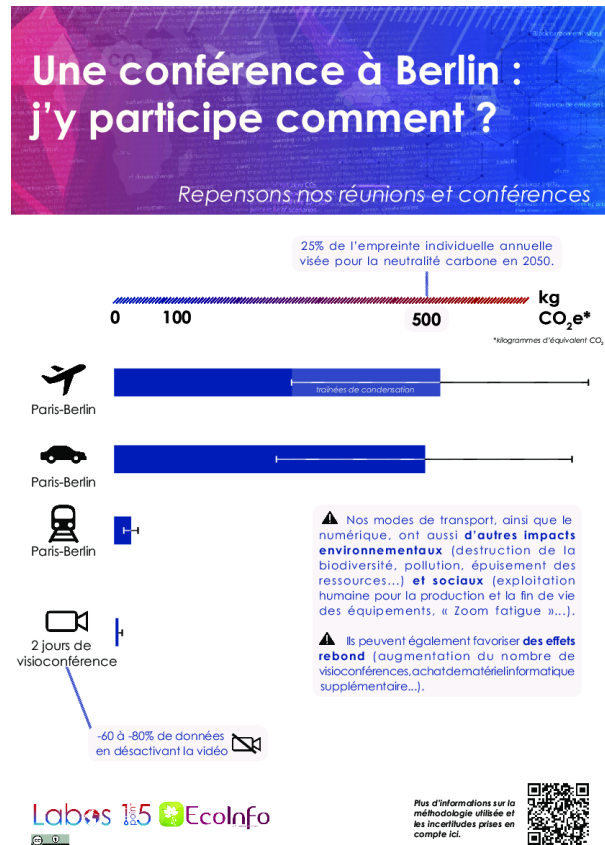


FIGURE 2.4 – Empreinte carbone s'une conférence à Berlin

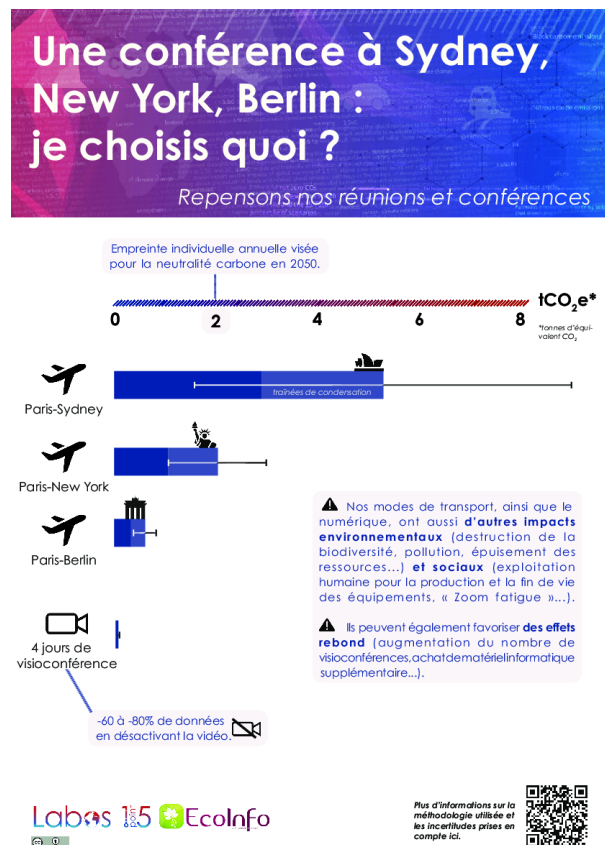


FIGURE 2.5 – Empreinte carbone s'une conférence à Sydney

Liste des acronymes

1D une Dimension

AAM Advanced Aerodynamics and Multiphysics

ALGO-COOP ALOGrithmes parallèles & sCientifics sOftware Operational Performances

CAO Conception assistée par Ordinateur

CERFACS Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique

CFD Computation Fluid Dynamics ou mécanique des fluides numérique

CSE Comité Social et Économique

CSG Équipe Informatique et Support Utilisateur

ES Énergie et Sécurité; Energy and Safety

FWH Ffowcs Williams-Hawkings

GIP Groupement d'Intérêt Public

GLOBC Modélisation du climat et de son changement global

HPC High Performance Computing

IDW Inverse Distance Weighting

NURBS Non Uniform Rational Basis Splines; B-splines rationnelles non uniformes

OTP One-Time-Password

QVT Qualité de Vie au Travail

RBF Radial Basis Function

RGPD Règlement Général sur la Protection des Données

RSE Responsabilité Sociétale des Entreprises

Bibliographie

- [1] ANTARES DEVELOPMENT TEAM. *Antares Documentation Release 2.2.0*. Avr. 2024. URL : <https://cerfacs.fr/antares/>.
- [2] Chandrajit L BAJAJ. *Multi-dimensional Hermite Interpolation and Approximation for Modelling and Visualization*.
- [3] J A BENEK et al. *Chimera : A Grid-Embedding Technique* ARNOLD ENGINEERING DEVELOPMENT CENTER ARNOLD AIR FORCE STATION, TENNESSEE AIR FORCE SYSTEMS COMMAND UNITED STATES AIR FORCE.
- [4] C BENOIT, G JEANFAIVRE et E CANONNE. *Synthesis of Onera Chimera Method Developed in the Frame of Chance Program*. 2023.
- [5] C BENOIT et al. *Cassiopee : a CFD pre-and post-processing tool*. 2023. URL : <https://hal.science/hal-01141585>.
- [6] Ricardo CAMARERO. *MEC6212 : Génération de maillages MAILLAGES TRANSFINIS*. 2023.
- [7] William M CHAN. *Development of Numerical Methods for Overset Grids with Applications for the Integrated Space Shuttle Vehicle*. 1995.
- [8] G. CUNHA et S. REDONNET. « Development of optimized interpolation schemes with spurious modes minimization ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 80 (2 jan. 2016), p. 140-158. ISSN : 10970363. DOI : 10.1002/flid.4079.
- [9] Guilherme CUNHA et Stephane REDONNET. *An Innovative Interpolation Technique for Aeroacoustic Hybrid Methods*. 2011.
- [10] ESRI. *How IDW (Inverse Distance Weighted) Interpolation Works*. Accessed : 2024-08-13. 2024. URL : [https://pro.arcgis.com/en/pro-app/latest/tool-reference/3d-analyst/how-idw-works.htm#:~:text=Inverse%20distance%20weighted%20\(IDW\)%20interpolation,of%20a%20locationally%20dependent%20variable](https://pro.arcgis.com/en/pro-app/latest/tool-reference/3d-analyst/how-idw-works.htm#:~:text=Inverse%20distance%20weighted%20(IDW)%20interpolation,of%20a%20locationally%20dependent%20variable).
- [11] FL FLUIDSSENGINEER, FL MARCELLILIE et FL PAULLSCHALLHORN. *Interpolation Method Needed for Numerical Uncertainty Analysis of Computational Fluid Dynamics*.
- [12] William J GORDON et Charles A HALL. « CONSTRUCTION OF CURVILINEAR COORDINATE SYSTEMS AND APPLICATIONS TO MESH GENERATION ». In : *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING* 7 (1973), p. 461-477.
- [13] William J GORDON. *BLENDING-FUNCTION METHODS OF BIVARIATE AND MULTIVARIATE INTERPOLATION AND APPROXIMATION**. 1971. URL : <http://www.siam.org/journals/ojsa.php>.
- [14] *Internal Documentation*. 2023.
- [15] Soohyeon KIM, Sooahm RHEE et Taejung KIM. « Digital surface model interpolation based on 3D mesh models ». In : *Remote Sensing* 11 (jan. 2019). ISSN : 2072-4292. DOI : 10.3390/rs11010024.
- [16] J. de LABORDERIE et al. « Numerical analysis of a high-order unstructured overset grid method for compressible LES of turbomachinery ». In : *Journal of Computational Physics* 363 (juin 2018), p. 371-398. ISSN : 10902716. DOI : 10.1016/j.jcp.2018.02.045.

- [17] David LEVIN. *Mesh-Independent Surface Interpolation*.
- [18] MAPSCAPING. *Understanding Inverse Distance Weighting*. Accessed : 2024-08-13. 2023. URL : <https://mapscaping.com/understanding-inverse-distance-weighting/>.
- [19] Jens-Dominik MÜLLER. *A user's guide to h i p*. 2020.
- [20] Taku OZAWA et Takahiko TANAHASHI. *CIVA (Cubic Interpolation with Volume/Area Coordinates) and AMR (Adaptive Mesh Refinement) Method for Discrete Boltzmann Equation **.
- [21] Grant E PALMER. *Construction of CFD Solutions Using Interpolation Rather than Computation with the ADSI Code*. 2009.
- [22] Wiebke K PEITSCH et al. *Drebrin, an Actin-Binding, Cell-Type Characteristic Protein : Induction and Localization in Epithelial Skin Tumors and Cultured Keratinocytes*. 2005.
- [23] Stéphanie PÉRON et Christophe BENOIT. « Automatic off-body overset adaptive Cartesian mesh method based on an octree approach ». In : *Journal of Computational Physics* 232 (jan. 2013), p. 153-173. ISSN : 10902716. DOI : 10.1016/j.jcp.2012.07.029.
- [24] Alain PERRONNET. *Interpolation transfinie SW le triangle, le tétraèdre et le pentakdre. Application h la crhation de maillages et h la condition de Dirichlet*. 1998. URL : %5Curl%7Bhttp://www.ann.jUssirrl.fr/~rro~n~%7D.
- [25] Les PIEGL et Wayne TILLER. *The NURBS Book*. Monographs in Visual Communications. Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Budapest, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo : Springer, 1995. ISBN : 978-3-642-97387-1. DOI : 10.1007/978-3-642-97385-7.
- [26] S REDONNET. « Issue 7-June 2014-Aircraft Noise Prediction via Aeroacoustic Hybrid Methods : Development and Application of Onera Tools over the Last Decade : Some Examples ». In : (). DOI : 10.12762/2014.AL07-07.
- [27] Stefan J. SCHODER et al. « Conservative source term interpolation for hybrid aeroacoustic computations ». In : *25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2019*. American Institute of Aeronautics et Astronautics Inc, AIAA, 2019. ISBN : 9781624105883. DOI : 10.2514/6.2019-2538.
- [28] Norman E SUHS, Stuart E ROGERS et William E DIETZ. *PEGASUS 5 : An Automated Pre-Processor for Overset-Grid CFD*. 2023.
- [29] Nobuatsu TANAKA, Toshiteru YAMASAKI et Takaya TAGUCHI. *Accurate and Robust Fluid Analysis Using Cubic Interpolation with Volume/Area Coordinates (CIVA) Method on Unstructured Grids **.
- [30] Manel TAYACHI. *Couplage de modèles de dimensions hétérogènes et application en hydrodynamique*. 2013. URL : <https://theses.hal.science/tel-00930084>.
- [31] Paul WALKER, Ulrich KROHN et David CARTY. *ARBTools : A tricubic spline interpolator for three-dimensional scalar or vector fields*. 2019. DOI : 10.5334/jors.258.

Résumé en français.
Puis en anglais.
Attention, doit se trouver sur une page de numéro paire.