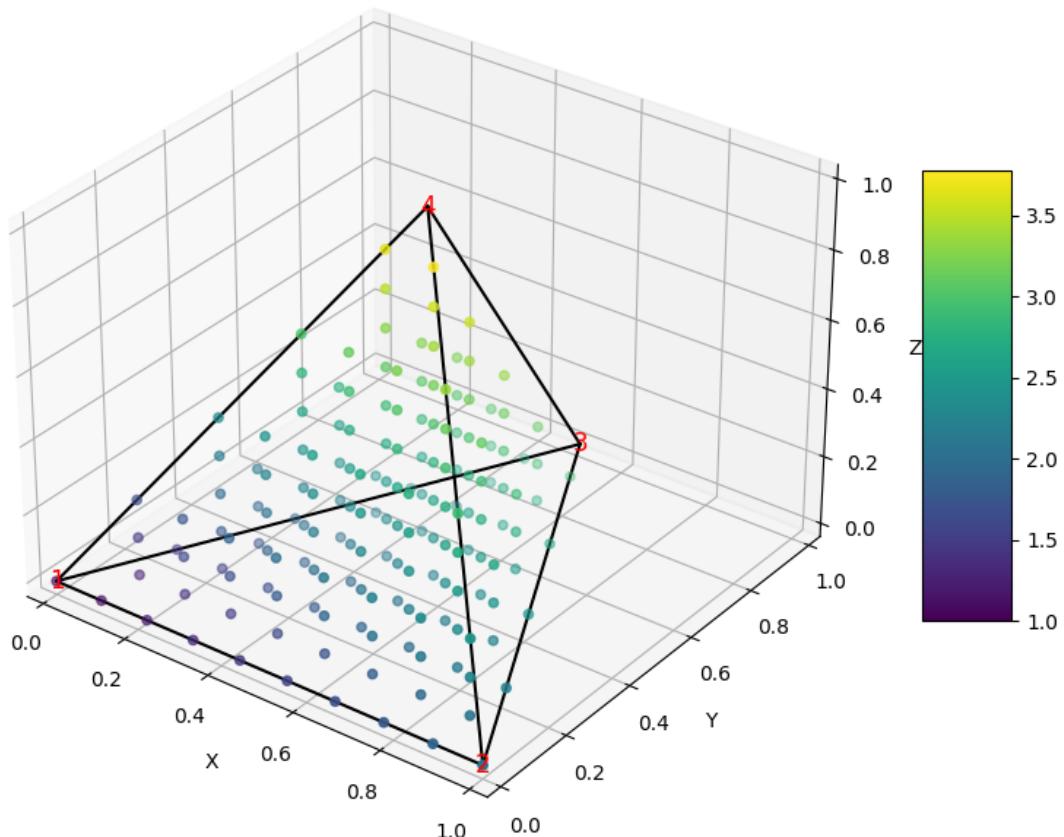


## Rapport de stage Aéro 4

# Développement de la méthode d'interpolation linéaire et évaluation de ses performances dans l'application de l'aéroacoustique

Stagiaire au sein de l'équipe AAM



Interpolation quadratique dans un tétraèdre

# Remerciements

Je tiens à sincèrement remercier mon maître de stage, Carlos MONTILLA, pour m'avoir guidé tout au long de ce stage et toujours aidé avec le sourire.

Je tiens également à remercier Madame la présidente du CERFACS, Catherine LAMBERT, pour sa sympathie et pour m'avoir permis d'effectuer ce stage.

Merci à mes amis montagnards et passionnés de mathématiques, Benjamin CANOVAS-ANDRIEUX et Dimitri LANIER ainsi qu'à mon professeur à l'IPSA, Guillaume COUFFIGNAL, pour leur précieuse aide en mathématiques.

Merci à mon tuteur pédagogique, Nadir MESSAI, pour son aide dans ma recherche de stage et au sein du CERFACS.

Merci à Alexis BOUDIN pour ses explications sur l'interpolation d'ordre élevé. Merci à mes amis et collègues Kélian RENOUX, Luc POTIER, Arthur COLOMBIÉ, Guillaume DAVILLER ainsi qu'à l'administration et au CSG pour l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de ce stage.

# Table des matières

<b>Bilan Technique</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Le laboratoire de recherche CERFACS</b>	<b>6</b>
<b>2 Implémentation de la méthode linéaire dans Antares</b>	<b>10</b>
2.1 La librairie Antares . . . . .	10
2.2 Les différentes méthodes d'interpolation . . . . .	11
2.2.1 La méthode par voisin le plus proche . . . . .	12
2.2.2 La méthode pondération inverse à la distance (IDW) . . . . .	13
2.2.3 D'autres méthodes . . . . .	15
2.2.4 La méthode linéaire . . . . .	18
2.2.5 Résumé des similitudes et différences des différentes méthodes . . . . .	22
2.3 Implémentation de la méthode linéaire . . . . .	22
2.3.1 La structure générale du code TreatmentInterpolation . . . . .	22
2.3.2 Le Pseudo-algorithme . . . . .	23
2.3.3 Optimisation du temps de calcul . . . . .	24
2.4 Tests . . . . .	26
2.4.1 Tests unitaires sur la méthode linéaire . . . . .	26
2.4.2 Tests sur des cas industriels . . . . .	27
2.4.3 Tests sur les paramètres de la méthode IDW . . . . .	27
2.4.4 Tests sur des cas d'aéroacoustique . . . . .	28
<b>Conclusion</b>	<b>29</b>
<b>Annexes</b>	<b>30</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>

## Bilan Technique

Ce bilan technique a pour objectif de synthétiser les écarts et leurs causes entre les missions du stage et ce qui a été réalisé. Il permet aussi de proposer ce qui pourrait être fait par la prochaine personne travaillant sur le même sujet.

<b>Fiche de synthèse</b>		Clément THIBAULT - Aéro 4
<b>Sujet de stage</b>	<b>Objectifs</b>	
Influence de la méthode d'interpolation sur la propagation acoustique FWH	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Développer une méthode d'interpolation linéaire HPC dans Antares</li> <li>- Évaluer l'influence de la méthode d'interpolation dans la qualité des résultats de propagation acoustique avec l'analogie FWH</li> <li>- Améliorer les performances HPC de la méthode d'interpolation dans Antares</li> </ul>	
<b>Client principal</b>	<b>Outils utilisés</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- CERFACS</li> <li>- Date de mise à jour : 15 octobre 2024</li> </ul>	VSCode, Python, Kraken (supercalculateur du CERFACS), Antares, Paraview, Git	
<b>Études réalisées</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Influence de paramètres de la méthode d'interpolation IDW</li> <li>— Différences de DSP entre la méthode IDW et linéaire</li> <li>— Optimisation de la rapidité du traitement</li> </ul>	
<b>Résultats</b>	<b>Explications des écarts possibles entre les résultats et le code initial</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Meilleurs paramètres pour l'IDW se situent autour de N=10 et p=10</li> <li>- Méthode linéaire généralement plus précise que IDW</li> <li>- Rapidité du code d'interpolation augmentée, pour toutes les méthodes, (d'un facteur 105 en linéaire, sur le cas test d'aéroacoustique)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- N=10 et p=10 donnent beaucoup d'information et d'importance aux points proches</li> <li>- La méthode linéaire est d'ordre 1 contrairement à IDW qui n'a pas d'ordre au sens usuel du terme</li> <li>- Pour la rapidité, une amélioration a consisté à ne pas recalculer des coefficients à chaque instant de la solution</li> </ul>	
<b>Difficultés rencontrées</b>	<b>Travaux à poursuivre</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Prise en main des outils</li> <li>- Adapter la méthode linéaire au code déjà existant</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Optimiser la méthode linéaire pour les maillages prismatiques</li> <li>- Traiter les maillages 'multi-zones' avec points partagés en linéaire</li> <li>- Implémenter une méthode d'ordre supérieur</li> <li>- Passer le code en parallèle pour améliorer la rapidité sur supercalculateur</li> </ul>	

## Introduction

Ce stage de M1, d'une durée de trois mois, s'est déroulé au CERFACS, un institut reconnu pour son expertise en calcul High Performance Computing (HPC). L'objectif principal était d'explorer et d'améliorer les méthodes d'interpolation dans le cadre du post-traitement de simulations numériques, avec un focus particulier sur l'application en aéroacoustique.

Le secteur de la recherche en calcul scientifique est réputé pour son environnement exigeant, mais stimulant, à la base de l'innovation. Le CERFACS, en particulier, est un acteur principal dans le domaine du HPC, collaborant avec de grands industriels et institutions pour développer des solutions à la pointe de la technologie.

Ce rapport de stage a deux objectifs :

D'une part permettre à l'IPSA, de m'évaluer (la structure et le contenu principal de ce rapport sont fixés par l'école).

D'autre part fournir un rapport sur mon stage pour le CERFACS et pour d'autres personnes qui utiliseraient ou modifieraient le traitement d'interpolation d'Antares.

J'adore les mathématiques appliquées, la mécanique des fluides et je voulais découvrir le monde de la recherche. Lors d'une présentation des activités au Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS) par nos deux enseignants chercheurs Arthur COLOMBIÉ et Nadir MESSAI, j'ai eu l'occasion de découvrir ce laboratoire et d'y candidater pour mon stage de M1. Carlos MONTILLA, docteur au CERFACS, m'a proposé un sujet sur l'interpolation dans le cas de post-traitement de simulations numériques et son application en aéroacoustique. Le sujet m'a interpellé et c'est avec enthousiasme que j'ai ainsi pu commencer mon stage le 10 juin 2024 au CERFACS.

En quelques mots, le CERFACS est un institut de recherche privé, spécialisé dans le développement de code HPC, financé par sept actionnaires. (voir ref1)

Antares[1] est un code d'analyse de données privé sous forme de librairie python, développé au CERFACS en 2012 et dont l'objectif est de réaliser du pré et post-traitement sur des simulations numériques utilisées par le CERFACS et ses actionnaires et autres partenaires. Il contient notamment une fonction d'interpolation, codée en Python.

Mon maître de stage, Carlos MONTILLA, est responsable d'Antares depuis dix mois. Il a notamment fortement contribué au traitement Ffowcs Williams-Hawkins (FWH). La chaîne de calcul aéroacoustique utilise le traitement d'interpolation avant de pouvoir utiliser le traitement FWH.

Mes missions principales lors de ce stage ont été :

- De faire un état des lieux sur les autres méthodes d'interpolation qui seraient implémentables dans Antares (avec les contraintes associées).
- D'identifier les meilleurs paramètres pour l'équation Inverse Distance Weighting (IDW), la seule qui était implantée jusqu'alors dans Antares
- D'implémenter la méthode linéaire.

Pour bien comprendre l'idée globale, l'objectif est d'interpoler les valeurs aux points d'un maillage 'cible', issu d'une discréttisation de l'espace, en utilisant les valeurs aux points d'un maillage 'source'. Par exemple dans le cadre d'un raffinement de maillage entre deux itérations de calcul ou bien dans le cadre de la création d'une sphère dans un maillage 3D pour l'application des équations de FWH pour la propagation aéroacoustique.

Pour expliquer plus en détail ce stage au CERFACS, je présenterai dans une première partie ce laboratoire de recherche, puis dans une seconde partie j'exposerai le travail que j'ai réalisé sous forme de rapport. Cette seconde partie se décomposera en quatre temps : la présentation de la librairie Antares, les différentes méthodes d'interpolation, l'implémentation de la méthode linéaire dans Antares et finalement les tests de l'ancienne et de la nouvelle méthode.

## Chapitre 1

# Le laboratoire de recherche CERFACS

Le CERFACS est un laboratoire de recherche privé dont les actionnaires sont Airbus, le CNES (Centre National d'Études Spatiale), EDF (Électricité de France), Météo France, l'ONERA (Office National d'Études et de Recherche Aérospatiales), Safran et TotalEnergies. Il a pour but de développer la simulation numérique par le calcul HPC pour ses actionnaires, mais aussi de faire de la recherche et de former des ingénieurs, chercheurs et doctorants. Il a été créé en 1988 sous le statut de Groupement d'Intérêt Public (GIP), pour devenir une société civile en 1996 et depuis 2021, le CERFACS est une SAS (Société par Actions Simplifiées).

Les deux bâtiments du CERFACS sont situés à la Météropole, dans la partie Ouest de Toulouse. Environ 170 personnes y travaillent, dont 20 % de femmes, 50% de doctorants et 20% d'étrangers dont la moitié ne sont pas Européens.

Physiciens, mathématiciens, informaticiens, numériciens et data scientist y travaillent dans cinq équipes :

- parallels ALGOirthmes & sCientifics sOftware Operational Performances (pour Algorithmes parallèles et logiciels scientifiques performances opérationnelles) (ALGO-COOP)
- Computer Service General (pour Équipe informatique et support utilisateur) (CSG)
- Energy and Safety (pour Énergie et sécurité) (ES)
- Advanced Aerodynamics and Multiphysics (pour Aérodynamique avancée et multiphysique) (AAM)
- modelling climate and GLOBal Change (pour Modélisation du climat et de son changement global) (GLOBE)

La Conception assistée par Ordinateur (CAO) permet de faire les plans numériques d'un avion par exemple, afin de s'assurer que toutes les pièces fabriquées vont bien s'imbriquer entre elles. Mais cela permet aussi de faire des simulations numériques pour prévoir à l'avance la tenue structurelle, les forces aérodynamiques, le volume sonore, etc. sans avoir à faire d'onéreux tests.

L'équipe AAM se focalise sur la simulation des écoulements aérodynamiques externes en développant des méthodes numériques avancées et en les appliquant aux avions, fusées, hélicoptères, moteurs, turbomachines, etc. Les liens de l'équipe AAM avec toutes les autres équipes du CERFACS sont forts. Par exemple, les simulations des chambres de combustion faites par l'équipe ES donnent les conditions de sortie dans des moteurs d'avions qui sont ensuite utilisées par l'équipe AAM pour des simulations aéroacoustique. Dans l'autre sens, les simulations aérodynamiques externes des ailes d'avions réalisées par AAM sont ensuite utilisés à GLOBE pour faire des analyses des contrails afin de déterminer leurs impact sur le climat.

Le CERFACS héberge des supercalculateurs (Kraken, Calypso et Scylla) et un serveur sur lequel se trouve l'intranet avec toutes les ressources nécessaires aux employés. Nous y trouvons notamment les liens vers la Qualité de Vie au Travail (QVT), le Comité Social et Économique (CSE), un document "Plan du management de la qualité" et énormément d'autres ressources.

Après une recherche non fructueuse sur l'intranet, j'ai pu demander à la responsable des

ressources humaines le document relatant des objectifs Responsabilité Sociétale des Entreprises (RSE). Le document d'actions RSE est segmenté en trois parties principales :

## Démarche RSE

"Le Cerfacs n'a pas mis en place une démarche spécifique RSE mais des actions ont été réalisées dans ce cadre, vis-à-vis de l'écoresponsabilité, la qualité de vie au travail et une charte éthique a été incluse dans le règlement intérieur depuis décembre 2023 (intégrant notamment la prévention de la corruption et la gestion des conflits d'intérêts).

En outre, le Cerfacs achète ses fournitures auprès de créateurs solidaires (exemple : Antilope qui compte 32 salariés sur les 49 avec une reconnaissance de « travailleur handicapé »).

Le Cerfacs met à jour au moins deux fois par an et aussi souvent que nécessaire un document unique d'évaluation des risques Cerfacs (avec un plan d'actions de prévention).

Le Cerfacs a nommé des référents : un référent « Santé et Sécurité », un référent « Règlement Général sur la Protection des Données (RGPD) », un référent « Handicap », deux référents « Harcèlement, agissements sexistes et violences ».

Un bilan HSE et RSE est présenté chaque année aux Associés du Cerfacs lors de l'Assemblée d'avril."

## Écoresponsabilité

J'ai constaté beaucoup d'actions dans le sens de l'écoresponsabilité lors de mon stage. La plupart sont mentionnées dans le document d'actions RSE.

Un Groupe de Travail « Bilan carbone du CERFACS », composé de 10 volontaires, a été créé. Des bilans carbone ont été réalisés pour les années 2019 et 2021, en suivant la méthodologie proposée par le collectif de laboratoires Labos1point5<sup>1</sup>. Depuis mi-2023, le CERFACS collabore avec le Cabinet Take[air] pour établir un plan d'actions visant à réduire son empreinte carbone. Cette collaboration a permis de réaliser le bilan carbone de 2022 et de commencer l'élaboration d'un plan d'actions, qui devrait être finalisé à l'automne 2024, après la tenue de plusieurs ateliers. Finalement nous trouvons dans le document un tableau 2.2 récapitulant les principaux postes d'émission identifiés dans une première colonne puis les objectifs et actions associés dans une seconde colonne.

En parallèle, j'ai entendu parler de cette démarche en discutant avec des thésards. Et j'ai aussi pu trouver la page depuis l'intranet. Elle est divisée en cinq sections : "présentation", "actualités", "émissions", "bilan" et "actions". J'aime beaucoup l'image ci-dessous (figure 1.1), présente dans le document et le site internet, qui montre que le CERFACS réduit ses émissions d'année en année. Cela est probablement dû aux efforts du groupe « Bilan carbone du CERFACS ». L'année 2021 est peu représentative, car grandement marquée par une diminution des missions à cause de la COVID. Mais 2022 nous montre bien que le CERFACS réduit les émissions dues à ses missions, à la fabrication et utilisation de calculateurs externes, aux trajets domicile-travail et au matériel informatique, sujets cible de la sensibilisation du groupe.

1. <https://labos1point5.org>

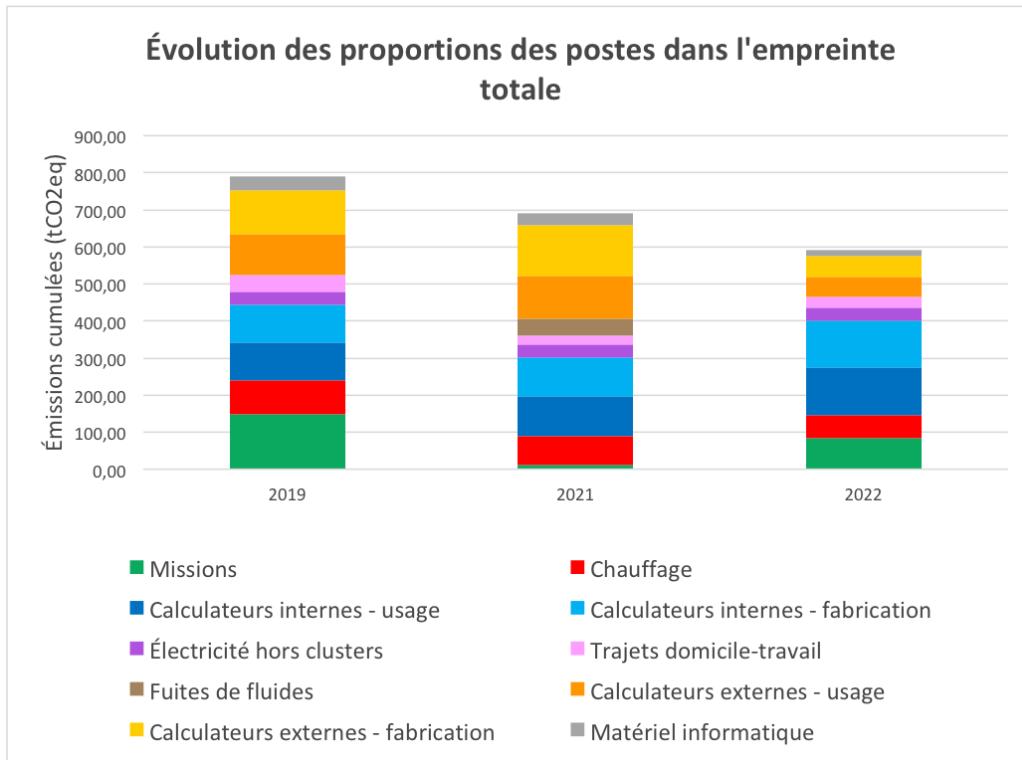


FIGURE 1.1 – Evolution de l'empreinte carbone du CERFACS entre 2019 et 2022

Dans les couloirs du CERFACS on trouve des posters très clairs sur l'empreinte carbone d'un trajet pour une conférence en fonction des moyens de transports.

Les employés sont incités à venir à vélo. Le CERFACS donne une prime pour chaque kilomètre fait à vélo sur le trajet habitation-travail-et vis-versa. Il y a aussi un atelier de réparation et des emplacements sécurisés pour les vélos.

La politique de communication n'est pas spécialement tournée vers les efforts pour le climat ou la RSE, mais le CERFACS agit efficacement en ce sens.

### Responsabilité sociale / Qualité de vie au travail

"La démarche Qualité de Vie au Travail (QVT) a été lancée au Cerfacs en janvier 2022, avec la mise en place d'un Groupe de Travail : elle a permis d'identifier 6 axes de travail pour améliorer le fonctionnement de la structure et du ressenti des personnes :

- Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau global
- Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau de l'équipe
- Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau personnel
- Assurer un meilleur accueil et support des non permanents
- Favoriser la vie sociale
- Améliorer le confort matériel"

De nouveau, un tableau 2.3 détaille des exemples d'actions que j'ai pu experimenter (salle de repos, machine à café, endroit pour attacher son vélo, etc)

Un dernier plan d'action a été mis en place sur l'égalité professionnelle entre les femmes et les hommes. Il traite de diverse sujets : l'embauche, la rémunération effective et l'articulation entre l'activité professionnelle et l'exercice de la responsabilité familiale.

Je tiens à mentionner également que j'ai reçu un mail qui lançait un appel au volontariat pour composer le Comité de Pilotage pour la Prévention des Violences Sexistes et Sexuelles au Travail suite à une réunion d'information réalisée en collaboration avec la médecine du travail.

Mon ressenti personnel sur le cadre de travail est très positif. Être assis dans un bureau climatisé avec une vue sur la campagne participe évidemment à cela. Un des seuls risques à ce type de travail est une mauvaise position qui peut entraîner des problèmes de dos, épaules, etc. Pour palier cela il y a des affiches dans chaque bureau indiquant la meilleure position à avoir et proposant des exercices. Ces mêmes informations apparaissent dans le 'livret d'accueil stagiaire' qui m'a été remis le premier jour.

Une cantine présente sur le site à quelques minutes à pied, permet de déjeuner et échanger avec les collègues du CERFACS hors cadre professionnel.

## Chapitre 2

# Implémentation de la méthode linéaire dans Antares

Le stage a débuté au début du mois de juin 2024. Un ordinateur et un PIN-pad générateur d'One-Time-Password (OTP) ont été mis à ma disposition. Carlos, mon maître de stage, m'a fourni les informations nécessaires pour comprendre et utiliser Antares[1], une librairie de développement, à l'aide de la documentation en ligne<sup>1</sup>. Ensuite j'ai résolu un bug mineur sur Antares, ce qui m'a permis de me familiariser avec Nitrox, le Gitlab hébergé sur le serveur du CERFACS où sont situés Antares et d'autres codes du CERFACS.

### 2.1 La librairie Antares

Antares est une librairie Python d'environ trois cents mégaoctets (Mo), composée de près de trois mille fichiers, incluant environ cinquante traitements. Un traitement est ce qui permet de faire une vue en coupe, de l'interpolation, etc. Elle s'appuie fortement sur la librairie numpy afin de profiter des leurs algorithmes optimisés. Elle permet de visualiser, traiter, réorganiser des données de simulation numérique issues de différents solveurs utilisés par le CERFACS et ses partenaires. Ces données sont organisées par Antares de manière unique et commune, ce qui est une grande force, notamment pour le partage et l'optimisation des post-traitements.

Chaque traitement est une classe composée liste de mots-clefs qui correspondent à chaque paramètre. Certains nécessairement à donner par l'utilisateur, d'autres sont initialisés par défaut et peuvent être modifiés ou non. Nous retrouvons les deux paramètres 'source' et 'target' nécessaires au traitement d'interpolation ligne 3 et 4 de l'exemple de code 2.1. Les autres arguments du traitement d'interpolation sont listés plus bas (ref 2.3.1).

Une solution CFD est interprété par Antares comme une "Base". Cette dernière peut être constituée d'une ou plusieurs zones. Une zone représente un emplacement physique de la solution (par exemple, pour une chambre de combustion, nous pourrions avoir deux zones, régis avec des équations différentes : une avant les injecteurs et une après). Chaque zone peut avoir un ou plusieurs instants. Un instant est une "capture" de la solution à un instant t. Cela peut être la solution finale de la simulation par exemple. Plusieurs instants peuvent représenter une simulation dynamique, qui est utile dans le cas de l'aéroacoustique par exemple, où nous cherchons l'évolution temporelle de la pression. Dans le cas où la structure du maillage ne change pas entre deux instants, les positions peuvent être définies dans la zone et seule les variables changent entre les instants. On parle dans ce cas d'"instant partagé".

Nous y retrouvons finalement les variables et leurs valeurs sur le maillage de la zone et instant en question

La structure des solutions CFD interprétées dans Antares est illustrée ci-dessous (figure 2.1) :

1. Documentation d'Antares : [cerfacs.fr/antares](http://cerfacs.fr/antares)

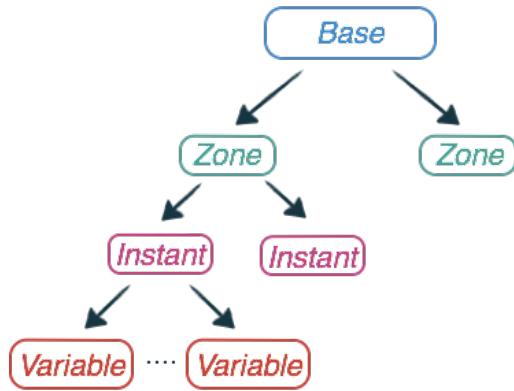


FIGURE 2.1 – Structure des données (source : Antares Tutorial)

Voici un exemple d'utilisation d'Antares :

```

1 import antares
2 myt = antares.Treatment('interpolation')
3 myt['source'] = source_base
4 myt['target'] = target_base
5 result = myt.execute()
  
```

Code 2.1 – Exemple simple d'utilisation d'Antares pour interpoler

Dans le cas ci-dessus, `result[0][0]['variable1']` est un tableau numpy manipulable par l'utilisateur.

Un point important pour l'interpolation linéaire est la connectivité (voir ref2.2). Si le maillage est non structuré, alors, chaque cellule est définie par un type de forme et par ses sommets. Par exemple, elle peut être donnée par `base[0][0].connectivity['tri']` si la base contient des triangles (équivalent à avoir une connectivité "tri") dans sa zone 0 à l'instant 0.

## 2.2 Les différentes méthodes d'interpolation

L'interpolation consiste à déterminer la valeur de nouveaux points à partir de la valeur de points existants. En voici un exemple en une Dimension (1D) (l'axe x représente la position et l'axe y la valeur des points).

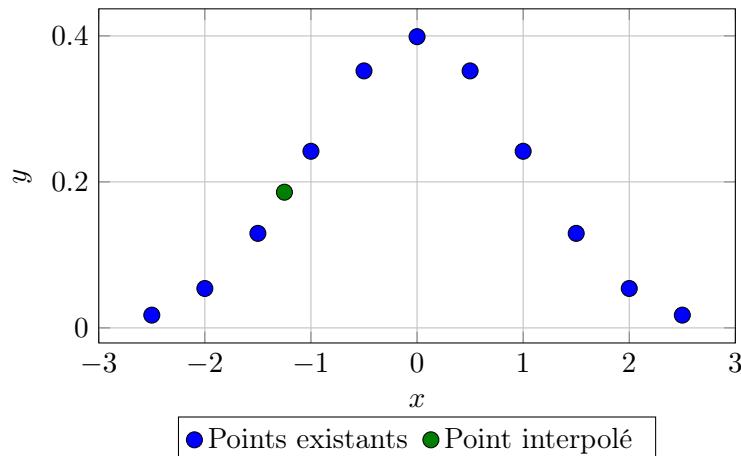


FIGURE 2.2 – Schéma d'interpolation avec des points sur une courbe en cloche

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les types d'interpolation[3] implémentables dans Antares.

Cela implique certaines conditions, notamment sur le type de maillage.

Un maillage structuré est un maillage dont la connectivité entre les points peut être décrite de manière régulière, généralement à l'aide de tableaux multidimensionnels (1D, 2D, 3D). Dans un tel maillage, les points sont organisés en une grille régulière, ce qui permet de naviguer facilement à travers les données sans avoir à spécifier explicitement les relations entre les points.

En revanche, un maillage non structuré est un maillage où les éléments (cellules) sont définis par des formes géométriques quelconques et où la connectivité des points ne suit pas un schéma régulier. Cela signifie que chaque cellule doit spécifier explicitement les points qui la composent. Ces maillages sont souvent utilisés pour modéliser des géométries complexes où une grille régulière serait inadaptée.

Dans Antares, nous visons principalement à traiter des maillages non structurés, car ils sont couramment utilisés dans les simulations modernes en raison de leur flexibilité à représenter des géométries complexes.

Un facteur à prendre en compte dans la méthode que l'on souhaite implémenter est aussi le temps de calcul, appelé 'coût'.

La caractérisation mathématique des équations à interpoler est probablement le paramètre le plus important à prendre en compte, mais aussi assurément le plus difficile. Les équations dont sont issues les solutions numériques en entrée dans Antares sont très difficiles à caractériser mathématiquement (tel que l'équation de Naviers-Stokes) et le niveau en mathématiques est trop élevé pour pouvoir se plonger en profondeur sur ce problème[12]. C'est pour cela qu'il n'y aura pas beaucoup de résultats mathématiques à présenter dans cette partie. Heureusement, ces méthodes ont déjà été implémentées et testées pour d'autres codes de simulation numérique, ce qui permet de nous donner une bonne idée des résultats que nous pouvons espérer.

hip est un logiciel créé en 1997 au CERFACS pour convertir des maillages multiblocs structurés en maillages non structurés. Différentes méthodes d'interpolation y sont codés et décrites dans le guide utilisateur[19]. Cette référence pourrait être lue avant d'implémenter une potentielle future interpolation dans Antares.

### 2.2.1 La méthode par voisin le plus proche

Cette première méthode est très simple : nous prenons comme valeur  $v$  d'interpolation au point  $p$  la valeur  $v$  du point le plus proche de  $p$ . En voici quelques illustrations :

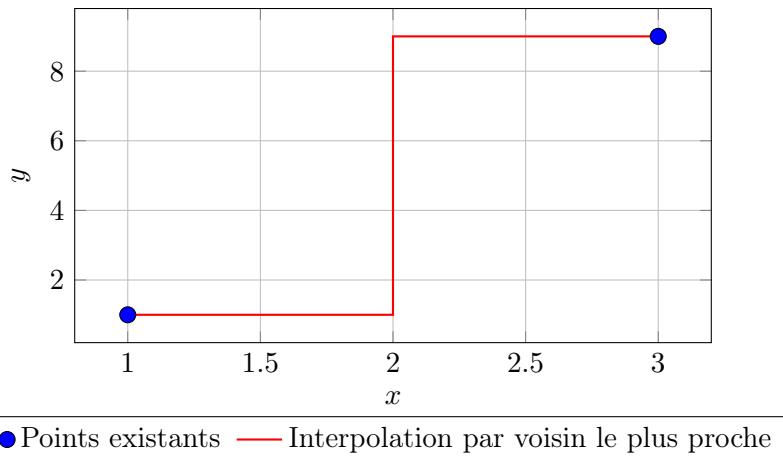


FIGURE 2.3 – Schéma d'interpolation par voisin le plus proche

La courbe La courbe rouge représente l'interpolation sur tout le domaine  $x$  entre les deux points. Cela représente les coordonnées ( $x$ ,  $y$ ) de tous les potentiels points d'interpolation.

Cette méthode est discontinue et peu précise pour la plupart des fonctions.

### 2.2.2 La méthode pondération inverse à la distance (IDW)

Probablement l'interpolation la plus simple après la méthode du voisin le plus proche (toujours dans notre cas d'application), cette méthode est la seule qui était implémentée dans Antares (elle inclut aussi la méthode du voisin le plus proche comme expliqué plus tard dans cette section). Elle a pour formule :

$$\hat{f}(x) = \frac{\sum_{i=1}^M \frac{f(x_i)}{d(x,x_i)^p}}{\sum_{i=1}^M \frac{1}{d(x,x_i)^p}}$$

où :

- $\hat{f}(x)$  est la valeur interpolée à la position  $x$ ,
- $f(x_i)$  est la valeur connue aux points de données  $x_i$ ,
- $d(x, x_i)$  est la distance entre  $x$  et  $x_i$ ,
- $p$  est le paramètre de puissance,
- $M$  est le nombre total de points de données.

Pour éviter une division par 0, très proche d'un point de donnée, le point interpolé prendra la valeur du point existant (voir ref 2.3.1 pour l'implémentation).

En voici des illustrations 1D :

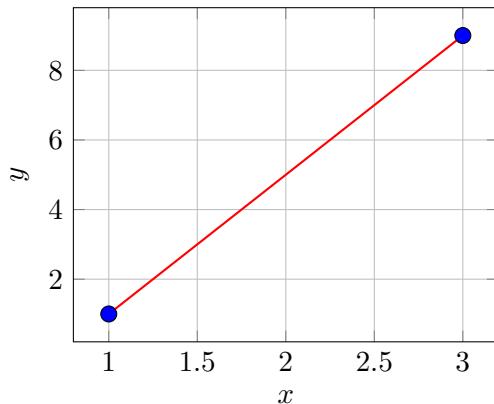


FIGURE 2.4 – interpolation IDW M=2, p=1

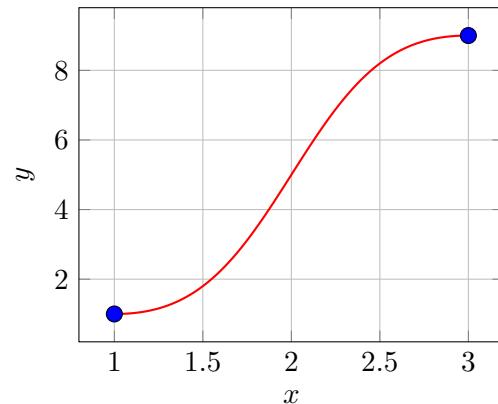


FIGURE 2.5 – interpolation IDW M=2, p=2

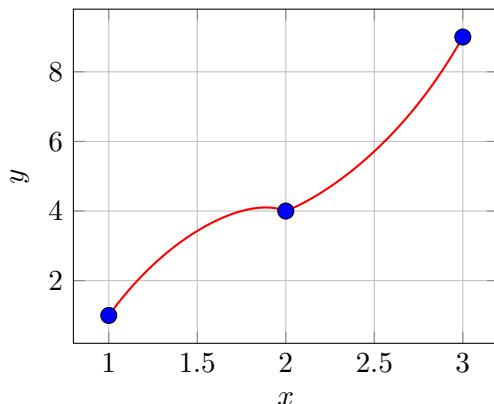


FIGURE 2.6 – interpolation IDW M=3, p=1

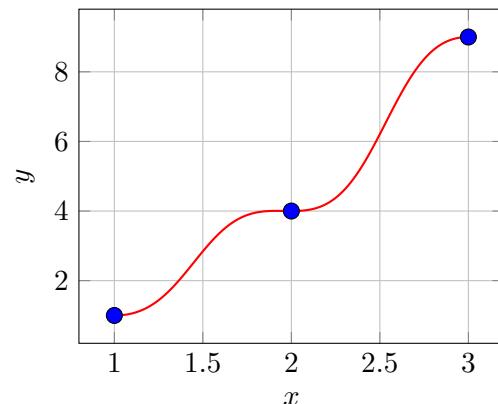


FIGURE 2.7 – interpolation IDW M=3, p=2

● Points existants	— Interpolation
--------------------	-----------------

Dans notre cas, nous ne prenons pas en compte tous les  $M$  points du maillage source. Nous nous limitons à un nombre  $N$  de points les plus proches. Cela implique une discontinuité lorsque

nous changeons de point. Pour illustrer cela, voici une figure 1D où tous les points sont espacés d'une unité (seuls trois points sont représentés). Avec  $M=\infty$  et  $N=3$ , cela revient **ici** à changer l'un des trois points de calcul pour une valeur de  $x$  égale à 0,5 modulo un. Le modulo un est représenté par une ligne en pointillés noirs. Il est appelé rayon, car en 2D, il est représenté par un cercle et en 3D pas une sphère.

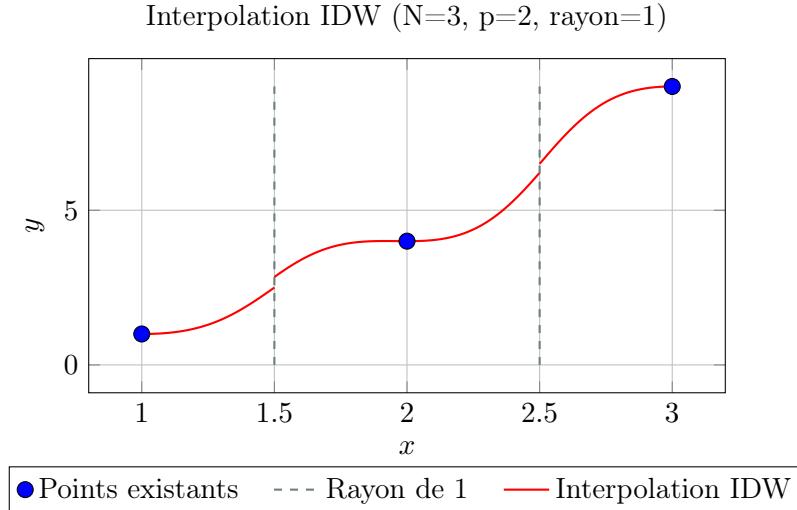


FIGURE 2.8 – Schéma d'interpolation IDW avec  $N=3$

Nous observons une discontinuité en 1,5 et 2,5. La discontinuité peut être un grand problème pour la stabilité des schémas numériques.

Nous pouvons aussi imaginer que 2 points, A et B, à droite et à gauche d'une ligne verticale de 3 points (les plus proches), prendront la même valeur pour  $N = 3$  :

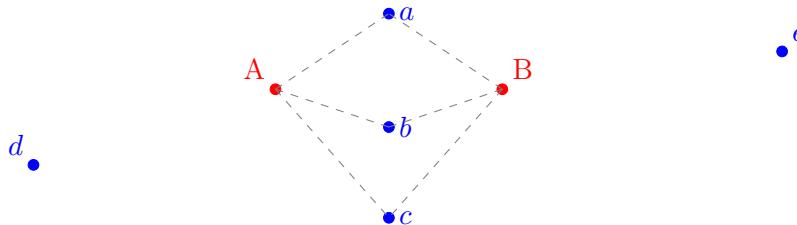


FIGURE 2.9 – Schéma montrant la non-directivité d'IDW

Ce qui n'est pas cohérent dans le cas où le gradient selon l'horizontal n'est pas nul.

Un des problèmes avec la méthode IDW est que « un biais directionnel dans les solutions de la base de données peut décaler les résultats interpolés »[20].

Lorsque toutes les informations selon un axe de l'espace ne se situent que d'un côté, le gradient ne sera pas pris en compte et l'erreur sera élevée. Par exemple, cela est généralement le cas lorsque le maillage cible a des points qui ne sont pas compris dans le maillage source.

D'autres méthodes dérivées ou similaires existent pour évaluer nos poids (les poids sont les distances inverses à la puissance  $p$  dans notre cas). La plus intéressante serait celle dite de Franke-Little. Elle consiste à utiliser une distance maximale autour du point au-delà de laquelle les autres points ne sont pas pris en compte. Autrement dit, on utilise un cercle (dans le cas 2D) d'un certain rayon pour déterminer quels points nous sont utiles pour l'interpolation. Dans ce cas le nombre de points est variable. J'ai considéré subjectivement que cette méthode n'était pas intéressante. La méthode confrontée à un maillage ayant une différence de raffinement intrinsèque importante, ne prendrait aucun point à certains endroits et dans d'autres lieux, un trop grand nombre de points devrait être calculé.

Une des limites[18] de la méthode IDW est qu'elle n'a pas d'autocorrélation spacial, contrairement à la méthode kriging que je décrirais plus tard.

### 2.2.3 D'autres méthodes

#### 1. La méthode polynomiale

L'interpolation polynomiale est d'un degré correspondant à celui du polynôme utilisé. Elle peut être réalisée en N dimensions sur un maillage structuré. Cette interpolation est de classe  $C^\infty$  (c'est-à-dire infiniment dérivable, avec des dérivées de tous ordres continues). Elle peut aussi être appliquée à des maillages non structurés, une méthodes souvent utilisée au CERFACS est d'ajouter des points fictifs sur les arêtes des formes

**a. Lagrange** L'interpolation de Lagrange utilise un polynôme unique qui passe par tous les points donnés. Elle est souvent utilisée pour l'interpolation d'un petit nombre de points, mais elle peut devenir imprécise pour un grand nombre de points à cause de l'effet Runge. Il faut donc limiter le nombre de points (comme dans les méthodes déjà implémentées dans Antares). Nous pouvons retrouver sur un site[11] la structure des formes pour de l'interpolation d'ordre supérieur (notamment pour Lagrange). Un inconvénient de cette méthode est que sa généralisation en 2D et surtout 3D est complexe.

**b. Hermite[2]** L'interpolation d'Hermite prend en compte non seulement les valeurs des points, mais aussi leurs dérivées. Cela permet de créer un polynôme d'interpolation plus lisse.

**c. Splines** Les splines cubiques sont des morceaux de polynômes de degré trois qui sont collés ensemble de manière à ce que la courbe soit lisse (continuité des premières et deuxièmes dérivées). Elles sont très utilisées pour leur stabilité et leur précision. "Notre expérience montre que les fonctions cubiques d'assemblage par spline sont très avantageuses lorsque plusieurs lignes de coordonnées intérieures généralisées sont spécifiées a priori." [13]

**d. NURBS** Les Non Uniform Rational Basis Splines (pour B-splines rationnelles non uniformes) (NURBS)[22] pourrait être un bon candidat pour l'interpolation. C'est une généralisation des splines, permettant de représenter des formes géométriques simples comme complexes. Elles sont notamment utilisées en CAO et pour l'interpolation de surfaces.

<https://resources.system-analysis.cadence.com/blog/msa2022-the-best-methods-for-mesh-interpolation : interpolation entre points pour représenter une surface...>

**e. Interpolation cubique** L'interpolation cubique est une méthode simple qui utilise des polynômes de degré trois pour calculer des valeurs intermédiaires entre les points de données.[25] Ce serait potentiellement le meilleur candidat pour la prochaine méthode à implémenter. On pourrait alors utiliser le traitement gradient avec l'argument `vtk = True` pour avoir le gradient au nœud et non au centre de la cellule. Ensuite, dans le meilleur des cas, il faudrait simplement reprendre la fonction d'interpolation linéaire et mettre à jour le code "computes\_barycenters.py".

#### 2. Méthodes à base de distance

Ces méthodes utilisent la distance entre les points de données pour calculer les valeurs interpolées, souvent en pondérant les contributions des points voisins.

**a. IDW** Comme décrit plus tôt dans la partie 2.2.2, la méthode IDW se base sur la distance des points pour le calcul de l'interpolation.

**b. Shepard** La méthode de Shepard  
[15]

### 3. Méthodes géostatiques

Voici une classification des différentes méthodes d'interpolation géostatiques :

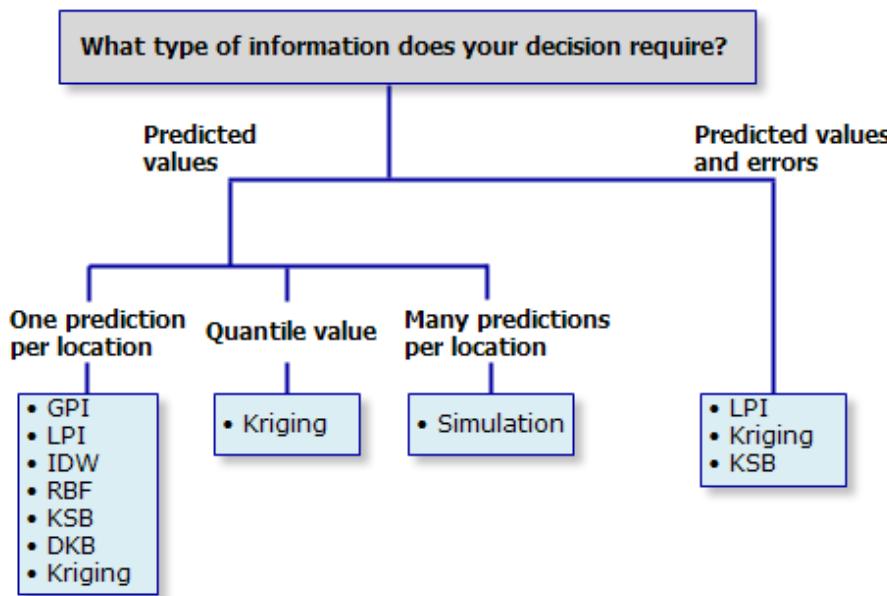


FIGURE 2.10 – Arbre des méthodes d'interpolation géostatique (source : pro.arcgis.com)

**Krigeage et Cokriging** Le krigeage est une méthode d'interpolation géostatistique qui génère une estimation statistique des variables spatiales. Le cokriging est son extension multivariée.

"La pondération par l'inverse de la distance et les fonctions de base radiale sont des interpolateurs exacts, tandis que le polynôme global, le polynôme local, l'interpolation par noyaux avec interruptions et l'interpolation par diffusion avec interruptions sont inexacts."<sup>2</sup>

"The linear method is simple, robust, and an acceptable choice of interpolation for rough first estimates or if the database solution variables depend linearly on design space variables. The IDW method shows no advantages over the simpler linear method and is not recommended for interpolating CFD solutions. The Kriging method gives the most accurate interpolated results and has the ability to capture non-linear behavior in the database solution variables. For the AS-202 test case, the maximum percentage difference between the interpolated Kriging and exact CFD heating rate is less than the uncertainty of the CFD heating rate itself." [20]

2. <https://pro.arcgis.com/fr/pro-app/latest/help/analysis/geostatistical-analyst/deterministic-methods-for-spatial-interpolation.html>

### Results

Interpolation of CFD solutions is a nonlinear process that is dependent on a considerable number of unknowns. The quality of the interpolated solution will depend on the interpolation method used, the interpolation variables, the size and distribution of the database solutions, the degree of nonlinearity of the database solution variable values, and the quality of the solutions in the database. To provide some insight into whether interpolating CFD solutions is a viable approach as well as some recommendations as to what interpolation methods and control parameters should be used, interpolations within two CFD databases are presented following an initial simple, 1-D interpolation example.

#### A. Simple 1-D Interpolation

In order to discuss some general aspects about interpolation, a simple, 1-D interpolation is presented first. The “database” consisted of five points that lie along a nonlinear curve of the form  $q_0 = 1.83x - 1.32x^3$ , as shown in Fig. 2. The maximum value of the function occurs at  $x = 0.68$ , but there is no database point that captures this maximum value. The linear, IDW, and Kriging interpolation methods were applied to this database, interpolating values from  $0.3 < x < 0.85$  at increments of  $\Delta x = 0.25$  to see how well, or if, the methods could model the most nonlinear region of the curve.

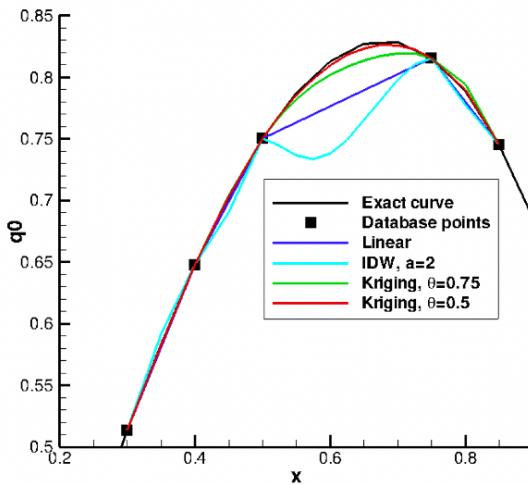


Figure 2. Simple, 1-D database interpolation results.

FIGURE 2.11 – Comparaison de différentes méthodes d’interpolation

...  
[14]

**DSM** Cokriging[24] is the multivariate extension of kriging formalism, which allows to deal simultaneously with two or more variables defined over the same domain and to account for additional information about spatial correlation between the variables.

**IDW** IDW appartient aux méthodes d’interpolation géostatiques

**RBF** La Radial Basis Function (pour fonction de base radiale) (RBF)

"We specifically use the Gaussian RBF and the Exponential Dot Product Kernels to do the interpolations, and approximate the benchmark called Franke's Function."<sup>[4]</sup>

Expliquer voronoï : "En mathématiques, un diagramme de Voronoï est un pavage (découpage) du plan en cellules (régions adjacentes) à partir d'un ensemble discret de points appelés germes. Chaque cellule enferme un seul germe, et forme l'ensemble des points du plan plus proches de ce germe que d'aucun autre." (source : Wikipédia, Diagramme de Voronoï)

Pour prochaine méthode : Des codes opensource d’interpolation d’ordre élevé sont disponibles sur GitHub (en Julia[9] et Python[4] pour RBF et Noyaux de produits de points exponentiels)

Bon site[11] pour structure des formes d’ordre supérieur

**Les méthodes par moindres carrés** Ces méthodes minimisent l’erreur quadratique pour créer une approximation linéaire des données. "Piece-wise linear and minimumnorm interpolation approaches are faster than the linear least squares."<sup>[19]</sup>

Approximation des moindres carrés ...

### Moindres carrés mobiles ...

La méthode Moving least squares (pour Moindres carrés mobiles) (MLS) MLS : [17] "The MLS method is a meshless numerical technique used for solving partial differential equations (PDEs) and reconstructing functions from scattered data, especially in cases where the data points are irregularly spaced or unstructured. Ligne a decomenter

**MISCOG** Plusieurs méthodes d'interpolation d'ordre élevé assez innovantes tel que les méthodes Multi-Instance Solver Coupled trough Overlapping Grids (pour Solveur multi-instances couplé à travers des grilles superposées) (MISCOG) sont déjà implémentées dans d'autres codes du CERFACS et un article les détails[16]. Elles servent généralement pour d'autres applications comme pour calculer un flux au travers d'une cellule à l'aide d'une intégration sur une surface ??

Interpolant d'Hermite : non recherché Interpolant bivarié : non recherché

#### 2.2.4 La méthode linéaire

"The linear method is simple, robust, and an acceptable choice of interpolation for rough first estimates or if the database solution variables depend linearly on design space variables. The IDW method shows no advantages over the simpler linear method and is not recommended for interpolating CFD solutions. The Kriging method gives the most accurate interpolated results and has the ability to capture non-linear behavior in the database solution variables." [20]. La littérature[10] s'accorde à dire que l'interpolation linéaire, est la plus basique après plus proche voisin et IDW. J'entends par basique simple à implémenter, demandant peu de ressource, robuste et moyennement précise pour de l'ordre élevé. C'est pour cela que le CERFACS voulait l'implémenter dans Antares. C'est aussi la plus utilisée par Airbus, Safran et d'autres industriels (via d'autres codes qu'Antares). Cela est donc aussi intéressant d'avoir une interpolation linéaire directement dans Antares.

#### 1D

**Linéaire** En 1D, l'interpolation linéaire est simple : c'est la moyenne pondérée linéairement par la distance, des valeurs des deux points les plus proches. Supposons que nous voulons interpoler une valeur d'un point  $p$  entre deux points  $a$  et  $b$  dans un espace 1D et que nous représentions leurs valeurs dans une deuxième dimension  $y$ . Nous aurons alors pour formule :

$$y_p = \frac{|x_b - x_p|}{|x_b - x_a|} \cdot y_a + \frac{|x_a - x_p|}{|x_b - x_a|} \cdot y_b$$

où  $y_p$  représente la valeur interpolée à la position  $x_p$ , et  $(x_a, y_a)$  et  $(x_b, y_b)$  sont les points de référence. J'ai écrit cette formule afin qu'elle soit symétrique par rapport aux points  $a$  et  $b$ , pour qu'ils jouent le même rôle. Ainsi elle s'entendra plus intuitivement dans des dimensions supérieures.

$\frac{|x_b - x_p|}{|x_b - x_a|}$  est le poids pour  $y_a$  basé sur la distance relative de  $x_p$  à  $x_b$ .  
 $\frac{|x_p - x_a|}{|x_b - x_a|}$  est le poids pour  $y_b$  basé sur la distance relative de  $x_p$  à  $x_a$ .

Ces deux termes sont pondérés de manière à ce que leur somme soit toujours égale à 1, ce qui garantit que l'interpolation est correcte et symétrique par rapport à  $a$  et  $b$ .

**2D** En 2D, nous devons nous baser sur des surfaces, extraites de formes pour pouvoir effectuer cette pondération. En CFD, ces formes sont appelées cellules et leurs sommets noeuds. Dans notre cas, nous considérons que les variables du maillage sont contenues au niveau des noeuds. Il existe 3 principaux types de cellules (formes) en 2D : les triangles, les rectangles des maillages

structurés (dans ce cas, la méthode est dite bilinéaire) et les quadrilatères (non croisés). Certains industriels utilisent de plus en plus des polygones à N arrêtes. Mais pas soucis de simplicité, nous l'interpolation linéaire est limité aux 3 principales formes, les polygones pouvant être décomposés en triangles.

**Triangle : Barycentrique** Pour le triangle, la méthode pour trouver la valeur au point à interpoler  $p$  est celle dite du barycentre (barycentrique). Elle est bien documentée.

Visuellement, il faut faire la somme des valeurs aux points pondérés par la surface opposée et pondérer le tout par la surface du triangle.

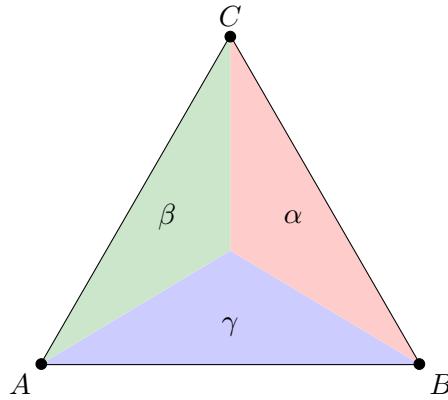


FIGURE 2.12 – Schéma d'interpolation barycentrique

Le calcul est

$$\frac{\alpha f(A) + \beta f(B) + \gamma f(C)}{\alpha + \beta + \gamma} \quad (2.1)$$

Bien sûr, les triangles sont quelconques, mais la formule reste la même.

**Rectangle : bilinéaire** En ce qui concerne l'interpolation bilinéaire sur un rectangle, nous la trouvons aussi facilement dans la littérature. La formule est l'extension de celle pour les triangles :

$$f(x, y) = \frac{(x_2-x)(y_2-y)f_{11} + (x-x_1)(y_2-y)f_{21} + (x_2-x)(y-y_1)f_{12} + (x-x_1)(y-y_1)f_{22}}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \quad (2.2)$$

Nous supposons que le point est bien à l'intérieur du rectangle.

Ici les surfaces sont directement calculées dans  $f(x, y)$ .

Cela correspond à l'addition de deux interpolations linéaires. Nous trouvons souvent dans la littérature une équation analytique où tous les sommets ne jouent pas le même rôle, mais il est plus simple de faire un calcul de poids pour pouvoir ensuite faire une moyenne pondérée. Visuellement nous créons cette fois des traits parallèles au passant par le point d'interpolation et nous additionnons, de manière pondérée, les 4 surfaces multipliées chacune par leur sommet opposé respectif.

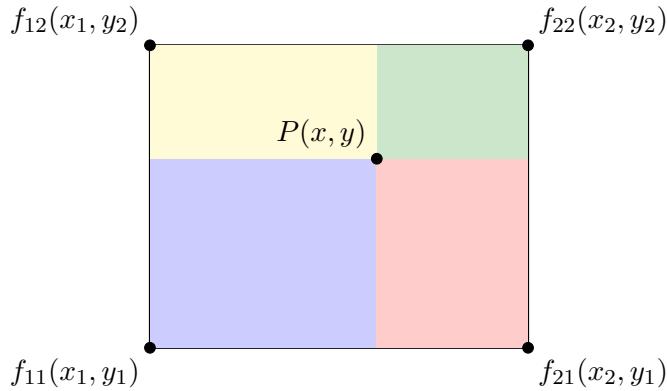


FIGURE 2.13 – Schéma d’interpolation bilinéaire

**Quadrilatère** Regardons maintenant la dernière forme 2D rencontrée dans les solutions traitées par Antares : les quadrilatères. Pour cela je n’ai pas trouvé de méthode satisfaisante dans la littérature.[21] Après plusieurs essais sur papier, je me suis concentré sur le fait que la méthode devait être continue, ce qui implique notamment que la valeur du point à interpoler doit tendre vers la valeur d’un sommet lorsque sa distance à ce dernier tend vers 0. Une première vérification de la linéarité est aussi de vérifier qu’un point au milieu d’une forme 2D a comme valeur la moyenne de ses sommets. Via cette démarche, j’ai imaginé, graphiquement, tracer des traits entre le point à interpoler et les sommets de la forme dans laquelle il se situe (tel que pour l’interpolation Barycentrique). Cela permet de ne créer que quatre sous formes. Ensuite pour déterminer le poids associé au sommet  $s_1$ , il faut multiplier entre elles les deux surfaces qui lui sont opposées, et bien entendu, le pondérer une fois les autres poids calculés. Par opposées j’entends que ces surfaces ne sont composées d’aucune arrête ayant pour l’une de leurs extrémités le point d’interpolation. Ceci est important pour l’extension de l’idée en 3D.

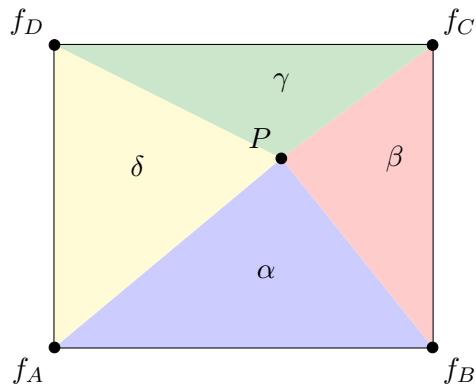


FIGURE 2.14 – Schéma d’interpolation dans un quadrilatère quelconque

Un point qui me perturbait était de faire des multiplications de surfaces, donc ordre 4, dans une méthode linéaire. Mais contrairement à son nom, l’interpolation bilinéaire est en réalité quadratique avec un résultat linéaire. On pourrait imaginer que, par chance, cette méthode soit quadratique. Premièrement j’ai vérifié et ce n’est apparemment pas le cas. Deuxièmement je pense que le quadratique n’englobe pas le linéaire dans le cas où nous nous basons uniquement sur les quatre points d’un quadrilatère. Normalement il faudrait s’appuyer sur plus de points pour le quadratique. Finalement, la démonstration pourrais se construire en montrant la linéarité selon les axes x et y indépendamment (comme pour le bilinéaire). En effet, sur la figure 2.14 ci-dessous, nous remarquons que lors d’un déplacement selon l’horizontal, vers la droite, les surfaces  $\alpha$  et  $\gamma$  ne varient pas tandis que la surface  $\delta$  augmente linéairement et  $\beta$  diminue linéairement aussi.

////// FAIRE LA DÉMO ////

Voici l’équation de la méthode d’interpolation linéaire pour le quadrilatère :

$$f(P) = \frac{f_A \cdot (\beta \times \gamma) + f_B \cdot (\gamma \times \delta) + f_C \cdot (\delta \times \alpha) + f_D \cdot (\alpha \times \beta)}{(\beta \times \gamma) + (\gamma \times \delta) + (\delta \times \alpha) + (\alpha \times \beta)} \quad (2.3)$$

### 3D

**Pavé droit : Trilinéaire** Pour le 3D, si le maillage est non-structuré, alors la forme est le pavé droit. À ce moment, nous sommes dans le cas de l'interpolation dite trilinéaire. Encore une fois la formule se trouve facilement dans la littérature et se retrouve facilement en étendant la formule de l'interpolation sur un rectangle. Nous associons comme poids à un des huit sommets  $s_1$  le volume opposé, construit de la sorte :

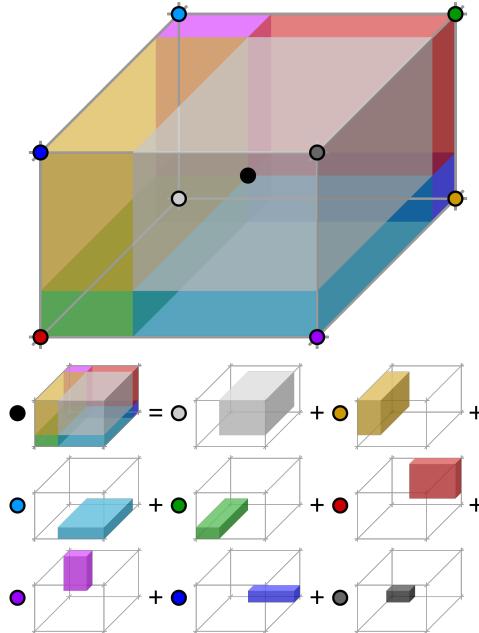


FIGURE 2.15 – Schéma d'interpolation trilinéaire (source : Wikipédia)

L'équation qui en découle est la suivante :

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{ijk} (1 - |x - x_i|)(1 - |y - y_j|)(1 - |z - z_k|) \quad (2.4)$$

**Thetraedre : Barycentrique étendu** Pour le tétraèdre (une pyramide à base triangulaire quelconque), nous trouvons bien un volume opposé à chaque sommet. Opposé dans le sens où le sommet ne partage pas de segment avec le volume. Nous pouvons alors appliquer la même formule que pour le triangle, avec 4 volumes à la place de 3 surfaces.

**Pyramide, hexaèdre, prisme et autres formes** Pour la pyramide (à base quadrilatérale) et l'hexaèdre, une extension de la formule du quadrilatère sera faite. Il pourrait en être de même pour les prismes et autres formes, mais des problèmes d'implémentations apparaissent (voir ref 2.3.1).

Note pour l'ordre supérieur : une utilisation des maillages transfinis pourrais être faite. [5]

## 2.2.5 Résumé des similitudes et différences des différentes méthodes

### 2.3 Implémentation de la méthode linéaire

#### 2.3.1 La structure générale du code TreatmentInterpolation

Le traitement d'interpolation d'Antares ne traite que des maillages ayant des valeurs uniquement au niveau des noeuds des cellules (pas entre).

Il utilise un k-dimensional tree (pour arbre à k-dimensions) (KDTree) pour faire une recherche efficace des N points de la base source les plus proches de ceux de la base target.

Après avoir recensé les différentes méthodes qui seraient applicables, ma seconde mission a été d'implémenter une interpolation linéaire dans Antares. Grâce à Nitrox, j'ai accès au code source de la librairie que je peux modifier. Le code 'interpolation.py' faisait environ 500 lignes. Il est orienté objet.

Il prend comme arguments obligatoires la base source et la base cible et renvoie dans le cas le plus simple la base cible avec les valeurs interpolées.

De manière simplifiée, dans le code, les zones de la base source sont fusionnées puis les instants sont parcourus. Cette fusion permet de faire un KDTree, qui permet concrètement de rechercher de manière efficace quels sont les N points de la base source les plus proches des points de la base cible (et les distances associées, utilisées dans la méthode 'idw').

Ensuite l'interpolation est calculée via une des deux méthode 'principale' qui peut elle-même appeler d'autres fonctions ou méthodes d'Antares.

Nom	Val. défaut	Description
<b>Arguments présent initialement</b>		
source	N/A	Base source
target	N/A	Base cible
coordinates	None	Le nom des variables de coordonnées spatiales
variables	None	Nom des variables à interpoler (toutes pas défaut)
tolerance	1e-10	Seuil de proximité pour utiliser la valeur du point le plus proche
duplicated_tolerance	None	Nbr de décimales d'arrondi pour la détection de points dupliqués (exact par défaut)
invdist_power	1	Paramètre de puissance p de la méthode IDW
nb_points	None	Paramètre de nombre de points N de la méthode IDW
with_boundaries	False	Utiliser ou non les données des limites
<b>Arguments ajoutés</b>		
tolerance_edge	1e-10	Tolérance 'point dans la cellule ?' (ref 2.3.1)
method	'idw'	Méthode d'interpolation ('idw' ou 'linear')
data	None	Mettre les données pré-calculées
get_data	None	True pour récupérer des données

TABLEAU 2.1 – Arguments pour la méthode d'interpolation dans Antares

Tolérance relative entre la somme des sous-surfaces créées par le point p et la surface totale de la cellule pour déterminer si un point est dans une cellule ou non

**L'interpolation IDW** Cette distance est définie à 1e-10 dans le traitement et peut être modifiée par l'utilisateur en ajustant l'argument 'tolerance' en ajoutant la ligne :

```
1 myt['tolerance'] = valeur
```

entre la ligne 2 et 5 de l'exemple présenté dans la partie '2.1 La librairie Antares'. Il en est de même pour les paramètres N et p avec pour argument respectivement 'nb\_points' et 'invdist\_power'.

Par défaut, dans le code, p est égal à '1' et N est égale aux nombre de sommets de la première cellule de la liste de types de cellules de la base cible. Il y aurait peut-être une modification

mineure à faire sur ce point. La structure de la base cible importe peu comparée à celle de la base source, pour l'interpolation. Mais par soucis de rétrocompatibilité, aucune modification ne doit changer l'utilisation qui a déjà été faite de ce traitement.

Nous remarquons que pour  $N = 1$ , nous retrouvons la méthode du voisin le plus proche, pour tout  $p$ . Et pour  $N = 2$  et  $p = 1$ , toujours en 1D, nous retrouvons la méthode linéaire.

Une de mes missions était de chercher s'il y avait des paramètres plus optimisés que  $N$  et  $p$  pour cette méthode. Je n'ai pas trouvé la réponse dans les différents articles[8] et thèses que j'ai lus. C'est pour cela que je présenterai plus tard comment j'ai trouvé des paramètres optimaux en faisant des tests.

**L'interpolation linéaire** La méthode ne fonctionne pas pour des prismes constitués de triangles non parallèles entre eux dans l'espace et/ou de surface différentes. De plus, l'ordre des sommets dans la connectivité est différentes en fonction du solveur dont est issue la base. Cela rend donc impossible (ou très difficile) le calcul des volumes tel que la méthode a été implémentée. Nous avons effectivement besoin de savoir à quelle sommet correspond quel indice. La connectivité prismaque ne sera donc finalement par traité. Il en est de même pour les formes plus complexes à  $N$  faces toute autre connectivité qui viendrait à apparaître.

Cependant, il est simple de palier ce problème. Il suffit de "tétraèdriser" la base source afin de créer des tétraèdres avant d'utiliser le traitement d'interpolation. Il en est de même pour de potentiels cas 2D non traités.

Voici comment réaliser cela :

```

1  import antares
2  from copy import deepcopy
3  # deepcopy est utilisé pour ne pas "tetrahedralize" la 'source_base'
4
5  copy_source_base = deepcopy(source_base)
6
7  t = antares.Treatment('tetrahedralize')
8  t['base'] = copy_source_base
9  copy_source_base = t.execute()
10
11 myt = antares.Treatment('interpolation')
12 myt['source'] = copy_source_base
13 myt['target'] = target_base
14 result2 = myt.execute()
```

Code 2.2 – Tetrahedralize pour interpoler linéairement tous types de cellules

### 2.3.2 Le Pseudo-algorithme

Voici le pseudo-algorithme simplifié donnant l'architecture de la fonction linéaire du traitement interpolation.

#### Initialisation :

- Créer le KD-tree
- Créer une liste de listes `node_to_elements` qui permet de récupérer l'indice des éléments constitués par un certain point.
- Définir les points à interpoler

#### Parcours des points à interpoler :

- Pour chaque point :
  - ◊ Si la distance au point le plus proche est inférieure à `tolerance` :
    - Le poids associé au point `cible` prend la valeur 1
    - Le sommet associé au point `cible` prend la valeur du point `source` le plus proche
  - ◊ Sinon :

- Récupérer les indices des éléments des points les plus proches
  - Pour chaque élément pertinent :
    - Récupérer les coordonnées des sommets (points) de l'élément
      - ◊ Si le point est à l'intérieur de la forme de l'élément :
        - Calculer les poids 'barycentriques'
        - Récupérer les indices des sommets (points) de la base source
      - ◊ Si le point n'est dans aucune cellule proche :
    - Le poids associé prend la valeur `numpy.nan` (cette valeur sera changée avant la mise à jour d'octobre)

Dans le cas où le maillage est le même entre tous les instants, ou que l'utilisateur a déjà récupéré les poids (et autres valeurs utiles) nous ne recalculons pas tous les paramètres, ce qui permet une diminution significative du temps de calcul.

#### Mise à jour de la base cible :

- Pour chaque variable à interpoler :
  - La variable de chaque nouveau point prend la valeur des poids calculés multiplié par la variable aux sommets (points) respectifs de la base source

### 2.3.3 Optimisation du temps de calcul

Plusieurs axes ont été exploités afin de diminuer le temps de calcul du traitement d'interpolation.

Le premier a été énoncé dans le pseudo-algorithme section précédente. Il s'agit de ne calculer qu'une seule fois le couple (poids, indices des points source) et autres paramètres puis de les enregistrer. Cela est utile dans deux cas :

- Entre les instants si la structure des deux bases restent inchangées. C'est par exemple dans le cas des bases issues de solutions aéroacoustique. Dans mon cas test, la solution contient 200 instants, le temps de calcul est alors presque divisé par 200.

Dans le code, un test est fait pour savoir si tous les instants sont partagés (voir 2.1). Si oui, alors les poids et autres données nécessaires sont calculés (grâce à la variable `computation`), mais pas le premier instant. Ensuite tous les instants seront calculés avec les données. Cela permet d'éviter d'enregistrer les coordonnées une seule fois et ainsi réduire le coût de mémoire. Cet optimisation est faite automatiquement dans le traitement.

- Si le calcul sur la base source est réalisé plusieurs fois sans que sa structure ne soit changée, qu'elle ait un instant ou plusieurs instant partagée. //////////Attention, dans le cas où la structure du maillage est différent entre deux instants, cette dernière ne peut pas être utilisée/////////. Ceci arrive régulièrement, notamment lors de tests. Dans ce cas, il faut légèrement changer l'appel à la fonction, voici un exemple :

```
1 import antares
2 from copy import deepcopy
3 # deepcopy est utilise pour s'assurer que la 'target_base' ne soit pas calculee
4           par le traitement
5
6 myt = antares.Treatment('interpolation')
7 myt['source'] = source_base
8 myt['target'] = deepcopy(target_base)
9 myt['get_data'] = True
10 result1, data = myt.execute()
11
12 # 'data' peut etre enregistre sur votre ordinateur par exemple, pour pouvoir
13           etre appele plus tard
14
15 myt = antares.Treatment('interpolation')
```

```

14 myt['source'] = source_base
15 myt['target'] = target_base
16 myt['data'] = data
17 result2 = myt.execute()

```

Code 2.3 – Exemple de réutilisation des données

Ici, `result2` aura été calculé beaucoup plus rapidement que `result1`. De plus ce changement est aussi appliqué à la méthode IDW sans poser de problème de rétrocompatibilité, car les résultats sont inchangés.

La méthode linéaire était initialement 200 à 500 fois plus lente que IDW. J'ai donc fait du 'profiling' pour savoir quelles lignes de code étaient les plus coûteuses. J'ai remplacé des listes par des arrays, ce qui augmente la rapidité d'accès aux éléments de ce dernier en mémoire. J'ai aussi optimisé le test de localisation d'un point dans une cellule et de calcul des poids. Je calcule d'abord les surfaces créées par le point cible avec les sommets puis, je calcule le volume de la cellule. Si ces volumes sont égaux à une erreur numérique près, alors le point est dans la cellule et j'ai les poids. Sinon je sais qu'il faut chercher ailleurs.

Une autre idée a été testée pour réduire le temps de calcul. Elle reste linéaire, mais ne donne pas forcément le même résultat (lorsque la variable à interpoler est non-linaire, sinon le résultat reste la solution analytique). Cette idée est décrite uniquement pour le cas 2D par soucis de simplicité de visualisation, mais est similaire pour le 3D.

Le principe est de ne pas calculer tout ce qui touche à la connectivité, car c'est ce qui augmente significativement le temps de calcul. Nous allons alors chercher les 3 points les plus proches (4 en 3D). En reliant les sommets, cela donnera une forme dite non croisée. Ensuite, nous faisons le calcul des barycentres et appliquons la même méthode qu'au-dessus. La différence ici est que le point cible n'est pas forcément dans la forme décrite par les 3 points les plus proches.

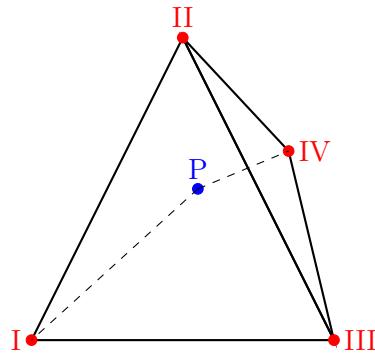


FIGURE 2.16 – Schéma de sélection du deuxième point le plus proche

Alors nous pourrions avoir une ou des surfaces formées par le point cible qui sortent du triangle initial (et la somme des surfaces ne serait pas égale à la surface du triangle initial). Mais pour respecter la linéarité, il suffit de faire le même calcul en prenant en compte le fait que la ou les deux surface(s) entièrement extérieures à la forme sont négatives. La figure ci-dessous est un zoom sur le schéma 2.16.

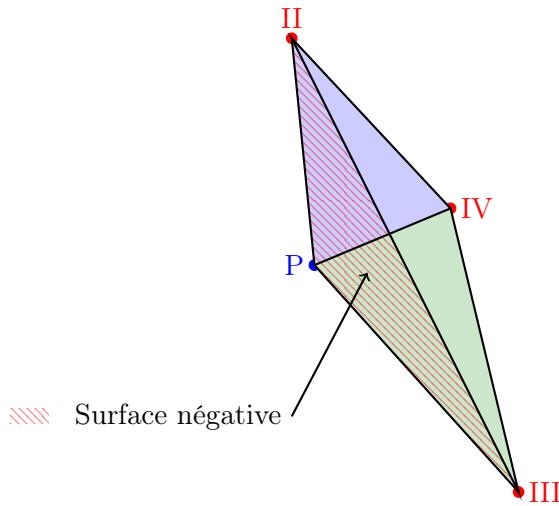


FIGURE 2.17 – Illustration de la surface négative avec le point P

N’ayant pas trouvé une façon simple de savoir si la surface était négative, par manque de temps et crainte de l’ajout de complexité (ce qui augmente le temps de calcul), cette méthode n’a pas été implémentée. Cela permet aussi une extrapolation linéaire sans créer d’erreur.

## 2.4 Tests

A présent, le but est de savoir quelle est la meilleure méthode, notamment dans le cas de l’interpolation pour l’application au traitement FWH. Pour cela il faut tester si la méthode linéaire fonctionne correctement, et tester les meilleurs paramètres  $N$  et  $p$  de la méthode IDW.

### 2.4.1 Tests unitaires sur la méthode linéaire

Pour l’instant, je n’ai démontré que par l’expérimentation que la méthode implémentée était linéaire.

Le premier test, créé en même temps que l’implémentation dans l’objectif de tester si la méthode fonctionne dans un cas simple, est de créer une variable linéaire et de faire une interpolation sur un second maillage. L’idée est de créer une base source avec une variable linéaire et une base cible avec des points décalés. Ensuite on teste l’interpolation retourne bien la valeur analytique espérée sur tous les types de cellules. Ce test est effectué très simplement avec une commande ‘pytest’ dans le terminal. En comparant la valeur analytique et numérique, l’erreur observée est nulle. Ce test est par ailleurs implémenté (pour la connectivité linéaire, triangulaire, quadrilatérale, tétraédrique et hexaédrique) dans les tests unitaires d’Antares, qui permettent de savoir que la librairie fonctionne correctement, notamment lors d’un git push vers Nitrox.

Ensuite j’ai essayé de tracer le log de l’erreur au sens des moindres carrés en fonction du raffinement du maillage source. Cela a étonnamment montré une convergence d’ordre quatre pour tous types de cellules (alors que nous nous attendions à une convergence d’ordre un pour le 1D) ////Tests avec un coefficient (puissance) 2 pour 2D, etc. Et légende log2 à améliorer////

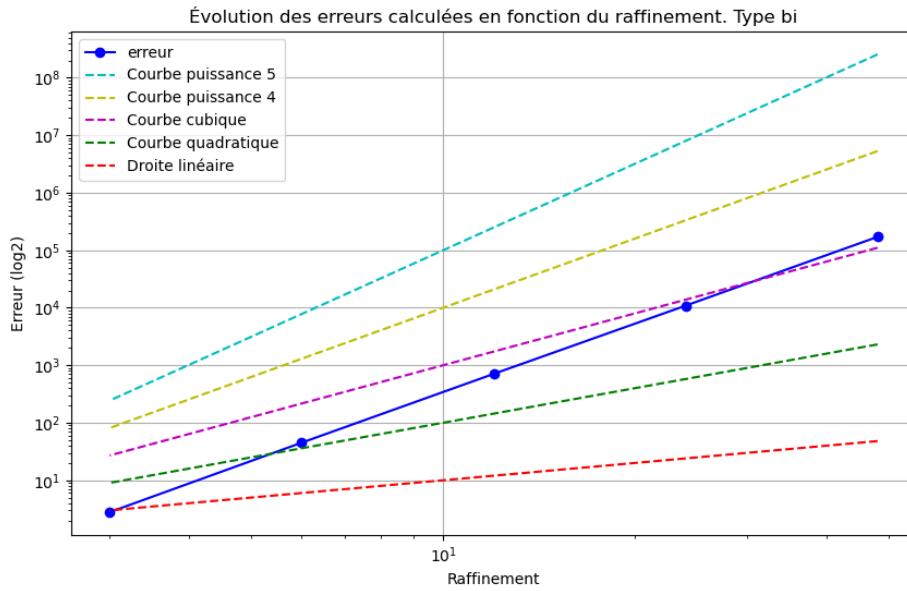


FIGURE 2.18 – Log de l'erreur en fonction du log du raffinement

#### 2.4.2 Tests sur des cas industriels

Pour tester la robustesse du traitement (notamment dans les cas multi-zones, multi-connectivité et multi-instants), son application à des tests industriels a été testée.

Voici une image comparant l'interpolation IDW et linéaire sur un maillage 3D solution d'une flamme dans une chambre de combustion en base source et un plan en base cible.

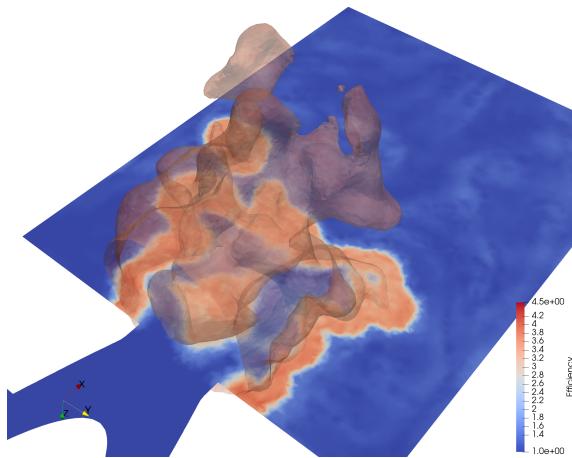


FIGURE 2.19 – Interpolation IDW sur une coupe d'une chambre de combustion avec iso-surface de la flamme

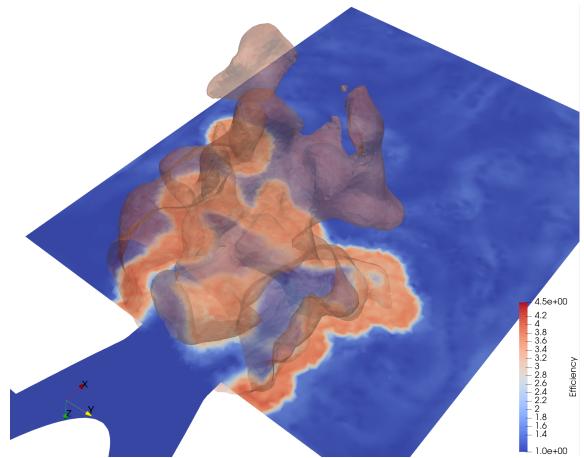


FIGURE 2.20 – Interpolation linéaire sur une coupe d'une chambre de combustion avec iso-surface de la flamme

Nous observons bien que les résultats sont similaires dans les deux cas (pas exactement les mêmes non plus, et heureusement).

#### 2.4.3 Tests sur les paramètres de la méthode IDW

La méthode IDW contient deux paramètres ( $N$  et  $p$ ) dans son équation présentée plus haut.(ref 2.3.1)

Bien AFFICHER QUE LES Paramètres optimaux sont n=10 - p=10

À droit n=10, p=10. Rapports d'amplitude : idw : 101.88

Le résultat acoustique sont les petites variations de pression, impliquant du son (à différentes fréquences et amplitudes). En pratique, pour les utilisateurs d'Antares, cette surface est définie dans un maillage 'solution' où nous avons le résultat de la pression en différents points et différents instants.

#### 2.4.4 Tests sur des cas d'aéroacoustique

[23]

Une amélioration possible de l'interpolation pour le cas de l'aéroacoustique serait d'utiliser la méthode d'interpolation par partie décrite dans des articles de l'ONERA[6][7]

# Conclusion

Ce stage au CERFACS m'a vraiment plu. Il m'a permis de développer et renforcer beaucoup de connaissances dans le milieu de l'informatique, mais aussi sur le plan humain. J'ai pu découvrir comment se déroulais la vie en laboratoire de recherche.

L'un des principaux résultats de ce stage a été l'implémentation globalement réussie de la méthode d'interpolation linéaire, qui s'est avérée généralement précise que la méthode de Pondération Inverse à la Distance (IDW) précédemment codée. Coder l'interpolation linéaire jusqu'en 3D n'a pas été très difficile ou chronophage, mais bien l'intégrer au code déjà existant et faire les tests l'étais plus. Heureusement que j'avais le support de mon maître de stage pour tout cela. Ce travail aussi amélioré les performances du code. Il pourrait aussi aider à l'intégration de méthodes d'ordre supérieur par l'état de l'art présent dans ce rapport et certaines fonctions réutilisables. J'ai ressenti tout au long de mon stage l'importance de faire un travail qui puisse être continué plus tard par un autre chercheur.

Au-delà des aspects techniques, ce stage m'a offert un bel aperçu du travail de chercheur.

Enfin, ce stage a été une expérience enrichissante qui a conforté mon intérêt pour les méthodes numériques appliquées et la recherche en calcul scientifique. Je suis reconnaissant pour l'accompagnement que j'ai reçu tout au long de cette expérience et pour les opportunités de développement personnel et professionnel qu'elle m'a offert.

## Annexes

Les principaux postes d'émissions identifiés	Quelques objectifs et actions
Missions	- Prévention sur le sujet sur le site Carbon Footprint du Cerfacs et affiches présentes dans les locaux.
Chauffage	- Rénovation du circuit d'alimentation en eau glacée des ventilo-convection de l'ancien bâtiment (Actions 2023 et 2024) - Traitement de l'étanchéité et de l'isolation de l'ancien bâtiment (analyse réalisée, actions en cours réparties sur plusieurs années pour cause de coût global).
Calculateurs internes et usage	- Un calculateur a été arrêté en février 2023 et remplacé seulement en 2024. - Une sensibilisation à l'optimisation de l'usage des calculateurs
Calculateurs internes et fabrication	
Électricité hors clusters	- Automatisation de l'éclairage des circulations de l'ancien bâtiment (abandon de l'éclairage manuel).
Trajet domicile-travail	- Participation à des initiatives en faveur du vélo ("Deux Pieds Deux Roues - 2P2R", "Objectif Employeur Pro Vélo") - Mise en place du Forfait Mobilité Durable pour le vélo. - Mise à disposition de deux vélos pour le personnel du Cerfacs
Fuites de fluides	
Calculateurs externes et usage	- Une sensibilisation à l'optimisation de l'usage des calculateurs
Calculateurs externes et fabrication	
Matériel informatique	Les postes de travail sont globalement à jour et ont un bon niveau de technologie (77% publiés en 2023).

TABLEAU 2.2 – Axes de travail et exemples d'actions pour limiter l'empreinte carbone du CERFACS

Axes de travail	Exemples d'actions
Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau global	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Organisation d'une réunion générale du Cerfacs par la direction 2 fois par an</li> <li>- Valorisation de la bibliothèque (réaménagement de l'espace)</li> <li>- Amélioration de la communication interne (journal de la QVT disponible sur l'intranet, newsletter interne mensuelle) et externe (nomination d'un référent Communication)</li> </ul>
Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau de l'équipe	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proposer une formation à l'organisation et à la tenue de réunions efficaces</li> </ul>
Optimiser l'organisation et gestion du travail au niveau personnel	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Information/sensibilisation au burn-out (par la médecine du travail)</li> </ul>
Assurer un meilleur accueil et support des non permanents	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mise en place d'un groupe de travail pour optimiser l'encadrement des non-permanents (doctorants, post-doctorants...)</li> <li>- Rédaction d'une charte QVT</li> </ul>
Favoriser la vie sociale	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Organisation d'événements sociaux en dehors du temps de travail</li> <li>- Aménagement d'une salle de repos</li> <li>- Organisation de pauses café collectives mensuelles</li> </ul>
Améliorer le confort matériel	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nouvelle machine à café à grain mise à disposition pour tous (avec l'achat de café par le Cerfacs)</li> <li>- Gourdes métalliques offertes à l'ensemble du personnel</li> <li>- Achat et installation de nouveaux arceaux pour augmenter la capacité d'accueil des vélos</li> <li>- Sensibilisation à l'ergonomie sur le poste de travail (par la médecine du travail)</li> </ul>

TABLEAU 2.3 – Axes de travail et exemples d'actions pour la Qualité de Vie au Travail au CERFACS

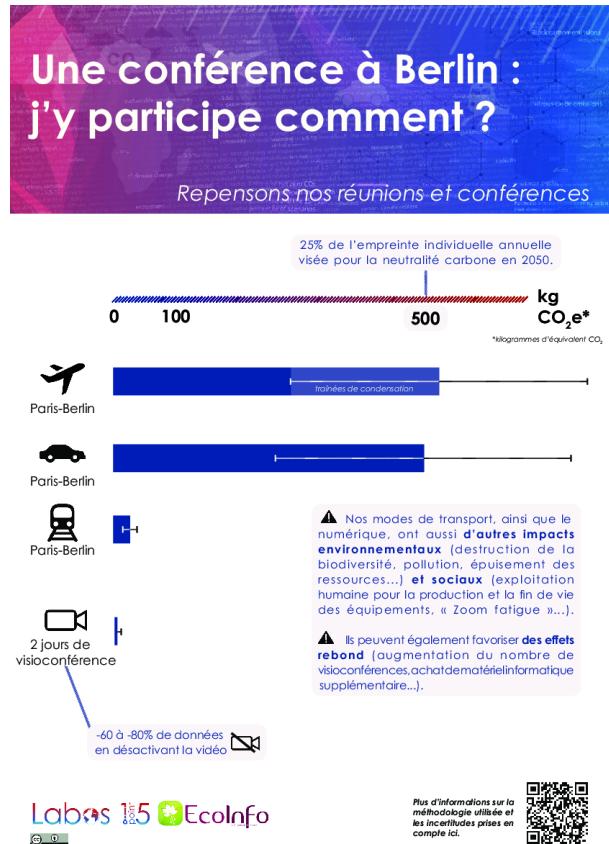


FIGURE 2.21 – Empreinte carbone s'une conférence à Berlin

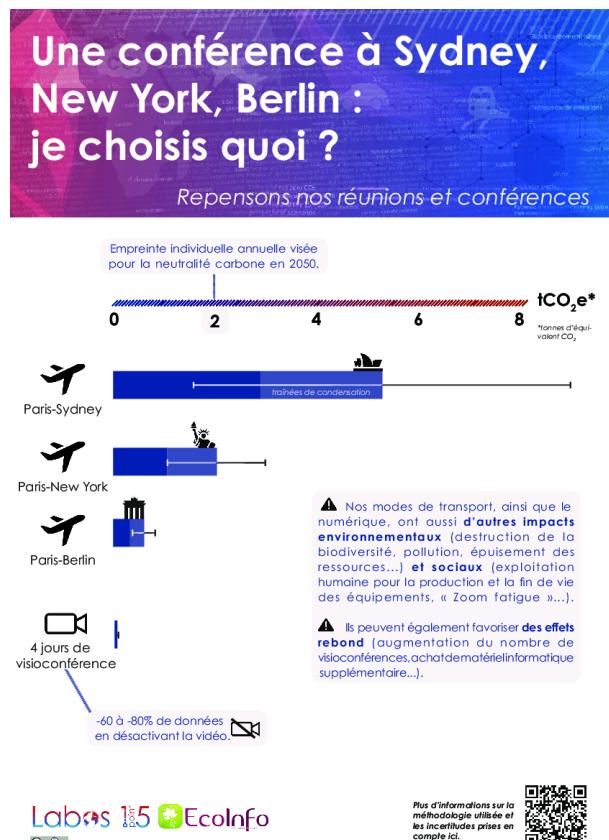


FIGURE 2.22 – Empreinte carbone s'une conférence à Sydney

# Bibliographie

- [1] ANTARES DEVELOPMENT TEAM. *Antares Documentation Release 2.2.0*. Avr. 2024. URL : <https://cerfacs.fr/antares/>.
- [2] Chandrajit BAJAJ. *Multi-dimensional Hermite Interpolation and Approximation for Modelling and Visualization*. 2001.
- [3] C BENOIT et al. *Cassiopee : a CFD pre-and post-processing tool*. 2015. DOI : [10.1016/j.ast.2015.05.023](https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.05.023).
- [4] BITBUCKET. *RBF and Kernel Interpolationl*. Accédé : 2024-08-22. 2021. URL : <https://bitbucket.org/joelrosenfeld/rbf-and-kernel-interpolation/src/master/>.
- [5] Ricardo CAMARERO. *MEC6212 : Génération de maillages transfinis*. 2024.
- [6] Guilherme CUNHA et Stephane REDONNET. *An Innovative Interpolation Technique for Aeroacoustic Hybrid Methods*. 2011. DOI : [10.2514/6.2011-2754](https://doi.org/10.2514/6.2011-2754).
- [7] Guilherme CUNHA et Stephane REDONNET. « Development of optimized interpolation schemes with spurious modes minimization ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* (2016). DOI : [10.1002/fld.4079](https://doi.org/10.1002/fld.4079).
- [8] ESRI. *How IDW (Inverse Distance Weighted) Interpolation Works*. Accédé : 2024-08-13. 2024. URL : <https://pro.arcgis.com/en/pro-app/latest/tool-reference/3d-analyst/how-idw-works.htm>.
- [9] FERRITE. *interpolation.jl*. Accédé : 2024-08-22. 2024. URL : <https://github.com/Ferrite-FEM/Ferrite.jl/blob/master/src/interpolations.jl>.
- [10] FL FLUIDSSENGINEER, FL MARCELLILIE et FL PAULLSCHALLHORN. *Interpolation Method Needed for Numerical Uncertainty Analysis of Computational Fluid Dynamics*. 2014. DOI : [10.2514/6.2014-1433](https://doi.org/10.2514/6.2014-1433).
- [11] GETFEM. *Finite element method list*. Accédé : 2024-08-22. URL : <https://getfem.readthedocs.io/en/latest/userdoc/appendixA.html>.
- [12] William J GORDONT. *Blending-Function Methods of Bivariate and Multivariate Interpolation and Approximation*. 1971. DOI : [10.1137/0708019](https://doi.org/10.1137/0708019).
- [13] William J GORDONT. *Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation*. 1971.
- [14] Curtis GROVES, Marcel ILIE et Paul SCHALLHORN. *Interpolation Methodneeded for Numerical Uncertainty Analysisof Computational FluidDynamics*. 2012. URL : <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20140011325/downloads/20140011325.pdf>.
- [15] Soohyeon KIM, Sooahm RHEE et Taejung KIM. « Digital surface model interpolation based on 3D mesh models ». In : *Remote Sensing* (2019). DOI : [10.3390/rs11010024](https://doi.org/10.3390/rs11010024).
- [16] J. de LABORDERIE et al. « Numerical analysis of a high-order unstructured overset grid method for compressible LES of turbomachinery ». In : *Journal of Computational Physics* (2018). DOI : [10.1016/j.jcp.2018.02.045](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.02.045).
- [17] David LEVIN. *Mesh-Independent Surface Interpolation*. 2004. DOI : [10.1007/978-3-662-07443-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-07443-5_3).

- [18] MAPSCAPING. *Understanding Inverse Distance Weighting*. Accédé : 2024-08-13. 2023. URL : <https://mapscaping.com/understanding-inverse-distance-weighting/>.
- [19] Jens-Dominik MÜLLER. *A user's guide to hip*. 2020.
- [20] Grant E PALMER. *Construction of CFD Solutions Using Interpolation Rather than Computation with the ADSI Code*. 2009. DOI : 10.2514/6.2009-141.
- [21] Alain PERRONNET. *Interpolation transfinie SW le triangle, le tétraèdre et le pentahèdre. Application à la création de maillages et à la condition de Dirichlet*. 1998. DOI : 10.1016/S0764-4442(97)82723-1.
- [22] Les PIEGL et Wayne TILLER. *The NURBS Book*. 1995. DOI : 10.1007/978-3-642-97385-7.
- [23] Stefan J. SCHODER et al. « Conservative source term interpolation for hybrid aeroacoustic computations ». In : *25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2019*. 2019. DOI : 10.2514/6.2019-2538.
- [24] SCIENCEDIRECT. *Kriging*. Accédé : 2024-08-22. URL : <https://www.sciencedirect.com/topics/agricultural-and-biological-sciences/kriging>.
- [25] Nobuatsu TANAKA, Toshiteru YAMASAKI et Takaya TAGUCHI. *Accurate and Robust Fluid Analysis Using Cubic Interpolation with Volume/Area Coordinates (CIVA) Method on Unstructured Grids* \*. 2004. DOI : 10.1299/jsmeb.47.672.

# Liste des acronymes

**1D** une Dimension

**AAM** Advanced Aerodynamics and Multiphysics (pour Aérodynamique avancée et multi-physique)

**ALGO-COOP** parallels ALGORithmes & sCientifics sOftware Operational Performances (pour Algorithmes parallèles et logiciels scientifiques performances opérationnelles)

**CAO** Conception assistée par Ordinateur

**CERFACS** Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique

**CSE** Comité Social et Économique

**CSG** Computer Service General (pour Équipe informatique et support utilisateur)

**ES** Energy and Safety (pour Énergie et sécurité)

**FWH** Ffowcs Williams-Hawkins

**GIP** Groupement d'Intérêt Public

**GLOBE** modelling climate and GLOBal Change (pour Modélisation du climat et de son changement global)

**HPC** High Performance Computing

**IDW** Inverse Distance Weighting

**KDTree** k-dimensional tree (pour arbre à k-dimensions)

**MISCOG** Multi-Instance Solver Coupled trough Overlapping Grids (pour Solveur multi-instances couplé à travers des grilles superposées)

**MLS** Moving least squares (pour Moindres carrés mobiles)

**Mo** mégaoctets

**NURBS** Non Uniform Rational Basis Splines (pour B-splines rationnelles non uniformes)

**OTP** One-Time-Password

**QVT** Qualité de Vie au Travail

**RBF** Radial Basis Function (pour fonction de base radiale)

**RGPD** Règlement Général sur la Protection des Données

**RSE** Responsabilité Sociétale des Entreprises

**Résumé** L'objectif de ce stage était d'implémenter une méthode d'**interpolation linéaire** dans **Antares** puis de comparer sa précision avec la **méthode IDW** dans le cas de propagation acoustique avec l'analogie FWH, tout en optimisant la vitesse d'exécution du code. Premièrement, une recherche documentaire sur les méthodes d'interpolation implémentables dans notre cas a été menée. Ensuite, la méthode linéaire a été implémentée en utilisant une méthode particulière pour les cellules non triangulaires ou rectangulaires. L'efficacité a été augmentée dans les cas multi-instants partagés en évitant le recalcule des coefficients d'interpolation à chaque itération. Ces mêmes coefficients peuvent être récupérés par l'utilisateur qui voudrait appeler deux fois le traitement pour une base ayant une même structure. Le code est près de  $n$  fois plus rapide pour une base ayant  $n$  instants partagés. La méthode linéaire a été testé sur des cas simples et industriels. Elle fonctionne correctement sur tous les types de cellules, sauf dans certains cas très complexes comme des prismes ayant des faces opposées de tailles différentes et/ou non parallèles. Dans le cas de l'aéroacoustique, la méthode linéaire est plus précise que IDW dans tous les cas testés. Cependant, des résultats expérimentaux ont montré que des coefficients ( $N, p$ ) autour de (10, 10) donnaient de très bons résultats. Dans ce cas, IDW peut s'avérer plus précis que la méthode linéaire.

**Abstract** The objective of this internship was to implement a **linear interpolation** method in **Antares** and then to compare its accuracy with the **IDW method** in the case of acoustic propagation using the FWH analogy, while optimizing the code execution speed. First, a literature review on interpolation methods applicable to our case was conducted. Secondly, the linear method was implemented using a special method for non-triangular or rectangular cells. Efficiency was increased in shared multi-instant cases by avoiding the recalculation of interpolation coefficients at each iteration. These same coefficients can be reused by a user who wants to run the process twice on a base with the same structure. The code is almost  $n$  times faster for a database with  $n$  shared instants. The linear method has been tested on simple and industrial cases. It works correctly on all cell types, except in some very complex cases, such as prisms with non-parallel and/or differently sized opposing faces. In the case of aeroacoustics, the linear method is more accurate than IDW in all tested scenarios. However, experimental results have shown that coefficients ( $N, p$ ) around (10, 10) produce very good results. In such cases, IDW may prove to be more accurate than the linear method.