

STAGES À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

CLÉMENT DELL'AIERA

Voici quelques problèmes sur lesquels ont travaillé les élèves cette année.

1. L'ALLUMEUR DE RÉVERBÈRES

Un allumeur de réverbère, ou falotier, était une personne dont le métier consistait à allumer les réverbères au moment de la tombée de la nuit. Ce métier était apparu avec la révolution industrielle, et a disparu avec l'installation de l'éclairage électrique.

Notre falotier parcourt une avenue chaque soir, où sont alignés dix réverbères. Une année, pour s'amuser, il respecte cette règle qu'il invente: si un réverbère est allumé, il change l'état du suivant, c'est-à-dire qu'il l'allume s'il était éteint et inversement. Sinon, il ne fait rien.

Au 1^{er} janvier, le premier réverbère est allumé, les autres sont éteints. Les réverbères seront-ils allumés tous simultanément au cours de l'année?

2. UNE BALLADE OÙ L'ON NE S'ENNUIE PAS

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessous.

Monsieur Leonhard Euler aime se promener dans cette ville. Il aimerait savoir s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts. Est-ce possible?



FIGURE 1. Plan de Königsberg

3. PROBLÈME DU TAQUIN

Le jeu du taquin est un puzzle formé par 15 carrés disposées dans une grille de 4 par 4. La case non occupée permet de bouger les pièces du puzzle les unes par rapport aux autres. Habituellement, une image est mélangée, et il s'agit de la reconstituer.

Supposons que l'image non mélangée est obtenue avec la case vide en bas à droite. Est-il possible d'inverser la position des deux dernières cases?

4. DOMINOS ET ÉCHECS

On enlève deux coins opposés d'un échiquier. Est-il possible de le recouvrir avec des dominos (de taille 2 par 1)?

5. MARCHE ALÉATOIRE

Un marcheur se déplace sur une grille finie unidimensionnelle. À chaque étape, il tire à pile ou face. En cas de pile, il se déplace à gauche, et inversement (si cela est possible, i.e. s'il n'est pas déjà au bord.) Quelle est la probabilité, en fonction de sa position initiale, de toucher le bord droit plutôt que le bord gauche en premier?

6. PROBLÈMES DE PESÉE

Puzzle 1. On dispose de 8 pièces identiques: une contrefaite, plus légère que les autres, et les autres, ayant toutes le même poids.

Trouver la pièce contrefaite en 2 pesées.

Trouver une formule générale pour le nombre maximal de pièces parmi lesquelles il est possible de trouver une pièce contrefaite plus légère en x pesées.

Puzzle 2. On dispose de 8 pièces identiques: une contrefaite, n'ayant pas le même poids que les autres (plus légère ou plus lourde), les autres ont le même poids.

Trouver la pièce contrefaite en 3 pesées.

Quel est le nombre maximal de pièces pour lesquelles il est possible de trouver une pièce contrefaite en 4 pesées? Comment trouverait-on la fausse pièce?

Puzzle 3. (Variation du puzzle 1)

On a 8 pièces identiques: une contrefaite, plus légère que les autres, et les autres, ayant toutes le même poids. Cependant, on dispose cette fois de 3 balances. Deux des balances fonctionnent parfaitement, la troisième donne des résultats aléatoires (elle donne de temps en temps la bonne réponse, et se trompe le reste du temps). On ignore laquelle des balances est défectueuse.

En combien de pesées peut-on trouver la pièce contrefaite?

Puzzle 4. On dispose de 16 pièces: 8 sont lourdes et de même poids, 8 sont légères et de même poids. On ignore lesquelles sont lourdes ou légères. Les pièces sont identiques, exceptée une seule, qui est marquée.

Avec une balance, peut-on déterminer si la pièce marquée est légère ou lourde en 3 pesées?

Quel est le nombre maximal de pièces avec lequel on peut résoudre avec succès ce problème en 4 pesées?

Puzzle 5. Ce puzzle est plus réaliste: on ignore le nombre de pièces contrefaites.

On dispose de n pièces identiques, parmi lesquelles se cachent des pièces contrefaites plus légères que les autres. On ne sait que deux choses: il y a au moins une pièce contrefaite, et le nombre de pièces réglementaires excède celui des contrefaites.

Donner, pour x pesées, le nombre maximal de pièces contrefaites que l'on peut déterminer.