

TIPE : Quantité d'encre utilisée par une fonte d'écriture

Clément Guidi

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

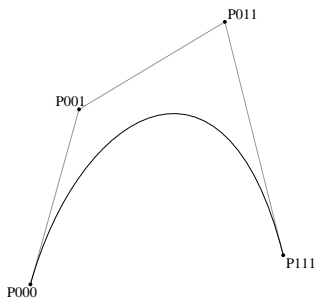
Résultats

Méthode de calcul

Résultats

1. Les cubiques de Bézier

- Courbes définies par des points de contrôle



- Courbes paramétrées

$$P_{000} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad P_{001} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad P_{011} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad P_{111} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0(1-t)^3 + 3x_1(1-t)^2t + 3x_2(1-t)t^2 + x_3t^3 \\ y(t) = y_0(1-t)^3 + 3y_1(1-t)^2t + 3y_2(1-t)t^2 + y_3t^3 \end{cases}$$

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

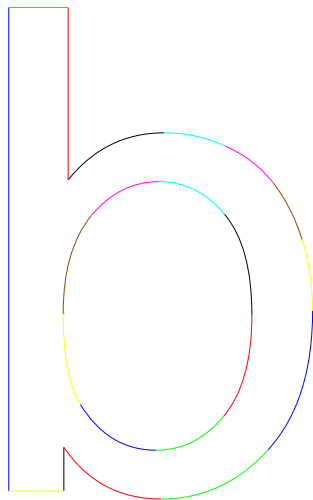
Formule de Green-Riemann

Résultats

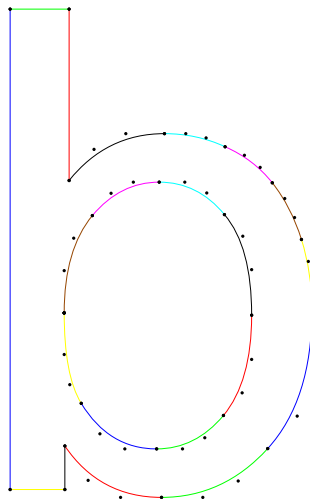
Méthode de calcul

Résultats

- ▶ Une courbe de Bézier est incluse dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle (barycentres à poids positifs)
- ▶ Elle est tangente aux droites passant par les points de contrôle centraux et aux extrémités
- ▶ Pour effectuer une transformation affine sur une courbe de Bézier, il suffit de l'appliquer à ses points de contrôle



Décomposition en sous-courbes



Points de contrôle

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

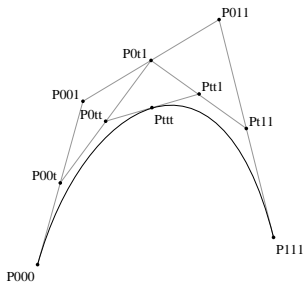
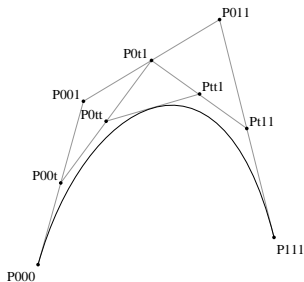
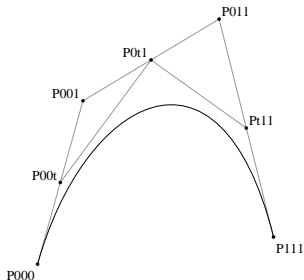
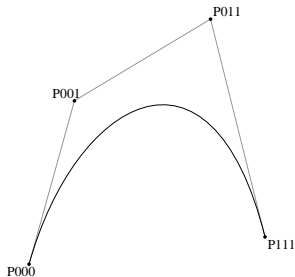
PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats



- ▶ Algorithme récursif, basé sur la méthode « diviser pour régner »
- ▶ Les points de contrôle intermédiaires calculés par l'algorithme de De Casteljau décrivent les deux sous-courbes de part et d'autre du point P_{ttt}
- ▶ À chaque appel, on renvoie deux quadruplets de points de contrôle, construits par calculs successifs de barycentres. La moitié, ceux aux extrémités, sont des points de la courbe. Un appel est réalisé sur chacune des deux sous-courbes

- Montrons que $P_{ttt} \in \mathcal{B}(P_{000}, P_{001}, P_{011}, P_{111})$

$$\begin{aligned}P_{ttt} &= \text{Bar} \begin{pmatrix} P_{0tt} & P_{tt1} \\ t & 1-t \end{pmatrix} \\&= \text{Bar} \begin{pmatrix} P_{00t} & P_{0t1} & P_{t11} \\ t^2 & 2t(1-t) & (1-t)^2 \end{pmatrix} \\&= \text{Bar} \begin{pmatrix} P_{000} & P_{001} & P_{011} & P_{111} \\ t^3 & 3t^2(1-t) & 3t(1-t)^2 & (1-t)^3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Montrons que

$$\mathcal{B}(P_{ttt}, P_{tt1}, P_{t11}, P_{111}) \subset \mathcal{B}(P_{000}, P_{001}, P_{011}, P_{111})$$

Soit $P_{ppp} =$

$$\text{Bar} \begin{pmatrix} P_{000} & P_{00t} & P_{0t1} & P_{ttt} \\ p^3 & 3p^2(1-p) & 3p(1-p)^2 & (1-p)^3 \end{pmatrix}$$

On montre que $P_{ppp} =$

$$\text{Bar} \begin{pmatrix} P_{000} & P_{001} & P_{011} & P_{111} \\ \lambda^3 & 3\lambda^2(1-\lambda) & 3\lambda(1-\lambda)^2 & (1-\lambda)^3 \end{pmatrix}$$

où $\lambda = pt$

- De même pour $\mathcal{B}(P_{000}, P_{00t}, P_{0t1}, P_{ttt})$, avec μ tel que $1 - \mu = (1 - t)(1 - p)$

2. PostScript Type 1

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

- ▶ Un fichier de fonte au format *pf**b* est converti au format *asm*. On isole manuellement les descriptions des glyphes pour les lire avec Caml Light
- ▶ Format vectoriel : présence d'instructions de tracé plutôt que d'un bitmap
- ▶ Les fontes de Type 1 sont décrites dans le langage PostScript. La syntaxe est postfixée

```
/b {  
  134 1139 hsbw  
  167 hmoveto  
  133 vlineto  
  71 -105 99 -52 125 0 rrcurveto  
  126 0 108 50 90 99 rrcurveto  
  ...  
  closepath  
  endchar  
} ND
```

Extrait de la description du glyphe de *b* en Arial

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

3. Formule de Green-Riemann

Soit \mathcal{C} un contour fermé du plan,
décrit par une courbe paramétrée (x, y) .

Alors l'aire de la portion de plan enclose par \mathcal{C} est :

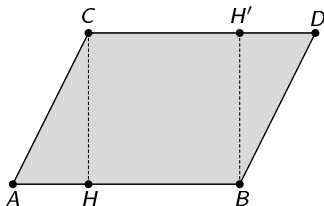
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} (x dy - y dx)$$

Démonstration

Lemme

Soit $ABDC$ un parallélogramme. Alors

$$\mathcal{A}_{ABDC} = \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \quad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{AC})$$



TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

Démonstration

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

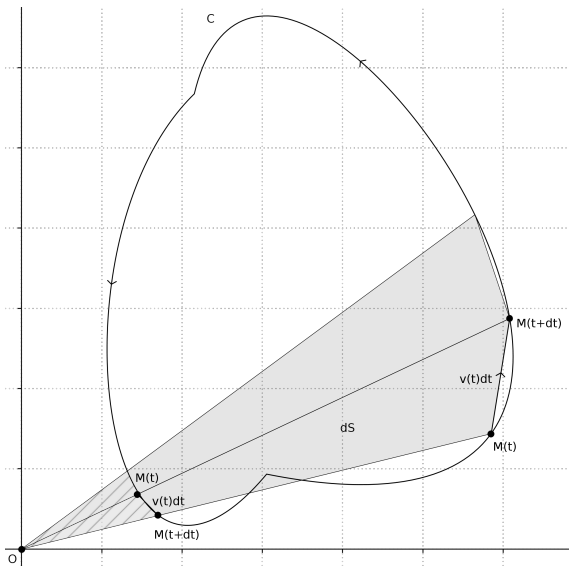
PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats



Démonstration de la formule de Green-Riemann

On a $dx = \dot{x}(t)dt$ et $dy = \dot{y}(t)dt$, donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx) &= \frac{1}{2} \int_C (x \dot{y} - y \dot{x}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_C \begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_C \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}) dt \\ &= \int_C \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v} dt) \\ &= \int_C dS \\ &= \mathcal{A}\end{aligned}$$

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

4. Résultats

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

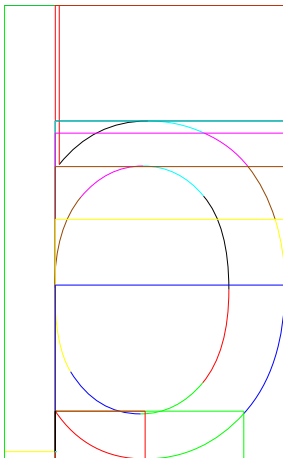
Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

- Calcul des hauteurs des glyphes des caractères par construction de la bounding box



- Les aires des sections du glyphes sont sommées au fur et à mesure du parcours de ce dernier

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

Fréquences d'apparition

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

Lettre \ Œuvre	La Bête Humaine	Thèse L. de Broglie
e	15.9 %	16.2 %
a	8.68 %	6.26 %
i	7.08 %	6.37 %
t	7.04 %	6.93 %
s	6.98 %	7.32 %
r	6.23 %	5.92 %
o	4.55 %	6.03 %

Aires pondérées relatives

TIPE : Quantité d'encre
utilisée par une fonte
d'écriture

Clément Guidi

Hauteur d'x	Œuvre		L.B.H.	Thèse
	Fonte			
1062	Arial		0.377	0.399
1120	DejaVu Sans		0.364	0.385
916	Times		0.363	0.386
409	Garamond		0.356	0.370
1149	Comic Sans MS		0.351	0.374
866	Courier New		0.320	0.330

Les cubiques de Bézier

Définitions et propriétés

Algorithme de De Casteljau

PostScript Type 1

Formule de Green-Riemann

Résultats

Méthode de calcul

Résultats

- ▶ La fréquence d'apparition des caractères diffère significativement d'un document à l'autre, d'un type de document à un autre
- ▶ La fonte Garamond ne se démarque pas particulièrement des autres fontes en terme d'économies d'encre. Il vaut mieux privilégier l'esthétique, et surtout la lisibilité
- ▶ D'autres paramètres sont à prendre en compte, comme la consommation de papier ou l'entretien d'une imprimante, et rendent moindres les bénéfices liés à un choix de fonte particulier