CN - Curs 7

Metoda Jacobi relaxată

$Ax = a \iff \underline{x = Bx + b}$ (1)

$x^{(k)} = B x^{(k-1)} + b$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ - arbitrar, $k \geq 1$ (2)

Met. (2) este conv $\iff \rho(B) < 1$

$\rho(B) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|$

$\rho(B) \leq \|B\|$

• Met. Jacobi : $Ax = a \iff -Ax = -a \iff \underset{I_m x}{\overset{\shortparallel}{x}} - Ax = x - a \iff$

$\iff (I_m - A)x = x - a$

$x = \underbrace{(I_m - A)}_{B} x + \underbrace{a}_{b}$

• Met. Jacobi relaxată : $Ax = a \mid \cdot \sigma \Rightarrow -\sigma Ax = -\sigma a \iff$

$\iff x - \sigma Ax = x - \sigma a$

$x = \underbrace{(I_m - \sigma A)}_{B_\sigma} x + \underbrace{\sigma a}_{b_\sigma}$ (3)

Th: A - simetrică, poz. def., $\lambda_m \geq \lambda_{m-1} \geq \ldots \geq \lambda_1 > 0$
atunci met. iterativă (3) este convergentă $\iff \sigma \in \left(0, \frac{2}{\lambda_m}\right)$

Mai mult: $\rho(B_\sigma) = \|B_\sigma\|_A < 1$

$\|v\|_A = \sqrt{\langle Av, v \rangle}$

Notăm prin σ_0 valoarea lui σ pt. care $\|B_\sigma\|_A$ este minimă.

(Numeric metoda it. 3 va converge cel mai rapid pt. acea valoare optimă)
σ_0