Projet Ingénieur
Calcul et affichage de mosaïques

Adam Ciroux | Clément Sousa

Prep'Isima 2

Mai 2024

Table des matières

1 Introduction

La mosaïque est un art qui consiste à assembler des fragments de pierres, des tuiles ou d'autres matériaux de différentes couleurs dans le but de former des motifs. La mosaïque est un art décoratif notamment utilisé pour tapisser les murs et les sols en représentant souvent des motifs qui se répètent. Il serait intéressant de se demander comment est-ce qu'on pourrait générer de nouveaux motifs. Thorvald Nicolai Thiele, un mathématicien du XIXe siècle, a été le premier à montrer comment l'utilisation de congruences dans l'ensemble des entiers de Gauss permet de construire facilement des mosaïques. L'objectif de ce projet est d'utiliser les résultats de Thiele afin d'écrire un programme permettant de générer des mosaïques.

Pour ce faire, nous utiliserons le langage Python avec la bibliothèque matplotlib qui nous permettra de dessiner le résultat des calculs. Vous trouverez des exemples de mosaïques générées par ce programme à la section 3.

2 Méthodes utilisées

2.1 Résidus quadratiques

2.1.1 Définitions

En se plaçant dans l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$, un résidu quadratique d'un nombre entier a modulo n est un entier x tel que l'équation $x^2 \equiv a(mod\ n)$ a une solution. En d'autres termes, a est un résidu quadratique modulo n si et seulement s'il existe un entier x qui, lorsqu'il est mis au carré, est congrue à a modulo n.

Ici, nous nous intéressons aux résidus quadratiques dans l'ensemble des entiers de Gauss. L'ensemble des entiers de Gauss est l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ muni de ces deux opérations :

$\forall\, a = (a_1,\ a_2), b = (b_1,\ b_2) \in \mathbb{Z}^2$:

$(a_1,\ a_2) + (b_1,\ b_2) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$
$(a_1,\ a_2) \times (b_1,\ b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$

La notion de congruence dans l'ensemble des entiers de Gauss découle de ces deux opérations. Grâce à la notion de congruence, on peut définir celle de résidus quadratiques, qui est définie comme ceci :

Une paire $q = (q_1,\ q_2)$ est un résidu quadratique modulo $p = (p_1,\ p_2)$ s'il existe $x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $q \equiv x^2(mod\ p)$. C'est-à-dire qu'il faut pouvoir trouver des entiers relatifs x_1 et x_2 tels que :

$(q_1,\ q_2) \equiv (x_1^2 - x_2^2,\ 2x_1x_2)(mod\ p)$

2.1.2 Utilisation

Une mosaïque est constituée de tuiles carrées de côté 1, recouvrant une surface plane. On peut donc numéroter les positions des tuiles. Ce qui revient à travailler sur un tableau à 2 dimensions de taille largeur × hauteur.

Pour créer une mosaïque de Thiele, on se fixe un entier de Gauss $p = (p_1,\ p_2)$, puis on colorie les tuiles de la manière suivante : la couleur de la tuile centrée au point $q = (q_1,\ q_2)$ est fixée comme ceci :

Rouge : si $q \equiv 0 (mod\ p)$ (si q est un multiple de p)

Bleue : si q est un résidu quadratique modulo p

Blanche : sinon

Notre programme commence par créer une mosaïque remplie de cases blanches. Puis il parcourt tous les couples $(x_1,\ x_2)$ qui sont soit des résidus quadratiques modulo p soit divisibles par p (p étant un couple d'entiers, qui est un paramètre de la fonction `creer_mosaique()`). Si $(x_1,\ x_2)$ est un résidu quadratique modulo p, le programme colorie cette case en bleu, si $(x_1,\ x_2)$ est divisible par p, le programme colorie cette case en rouge.

2.2 Symbole de Legendre

2.2.1 Définitions

En se plaçant dans $\mathbb{Z}$, si p est premier et a un entier, alors le symbole de Legendre $(\frac{a}{p})$ vaut :

0 : si a est divisible par p

1 : si a est un résidu quadratique modulo p

-1 : sinon

On peut étendre cette définition aux entiers de Gauss sur lesquels nous travaillons ici.

2.2.2 Utilisation

Dans notre programme, nous utilisons le symbole de Legendre afin de caractériser la couleur des cases dans le tableau 2d représentant la mosaïque. C'est-à-dire que toutes les cases blanches valent -1 (car ni divisible ni résidu quadratique modulo p), les cases rouges valent 0 (car divisible par p) et enfin les cases bleues sont celles ayant pour valeur 1 (car résidu quadratique modulo p). Ces valeurs suivent la définition du symbole de Legendre.

3 Exemples

Généralement, les mosaïques les plus belles sont celles pour lesquelles $p = (p_1, p_2)$ est un nombre premier de Gauss. C'est-à-dire que l'on a pour tout $a, b \in \mathbb{Z}^2$:

— $b \equiv 0 \mod p$,

— ou $a \times b \equiv (0,0) \mod p \implies a \equiv 0 \mod p$

Nous allons donc montrer dans cette section des exemples de mosaïques :

— que nous trouvons personnellement belles (avec et sans être un nombre premier de Gauss) ;

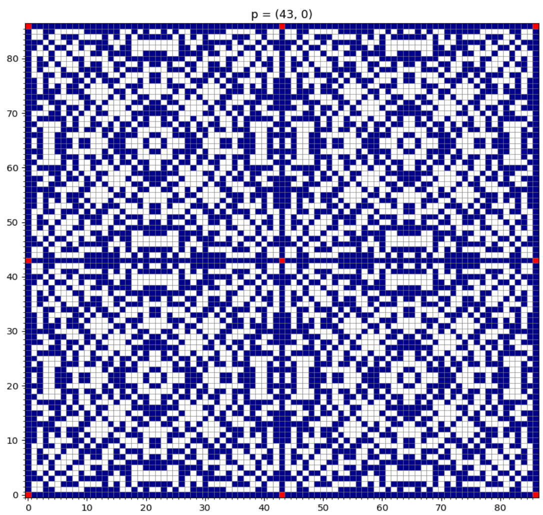
— que nous trouvons personnellement moins esthétiques (avec et sans être un nombre premier de Gauss) ;

— qui ont des motifs différents (moins droit).

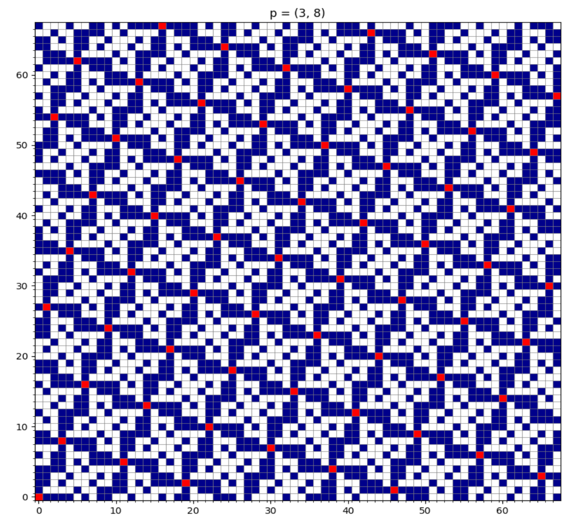
Toutes les mosaïques sont disponibles en annexe de ce rapport, avec des exemples supplémentaires.

3.1 Avec des nombres premiers de Gauss

3.1.1 Mosaïques que nous trouvons personnellement belles



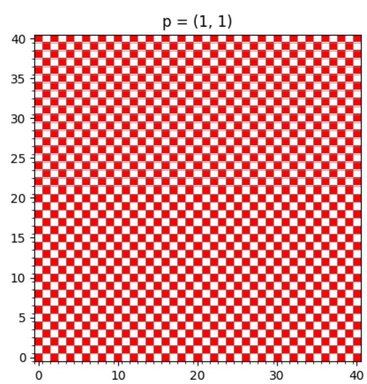
p = (43,0)



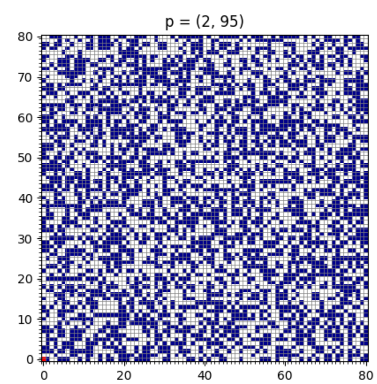
p = (3,8)

3.1.2 Mosaïques que nous trouvons moins esthétiques

Nous remarquons qu'utiliser un couple premier de Gauss ne permet pas forcément d'obtenir une belle mosaïque.



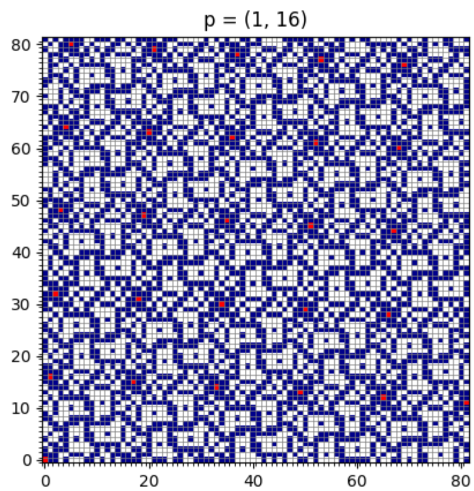
p = (1,1)



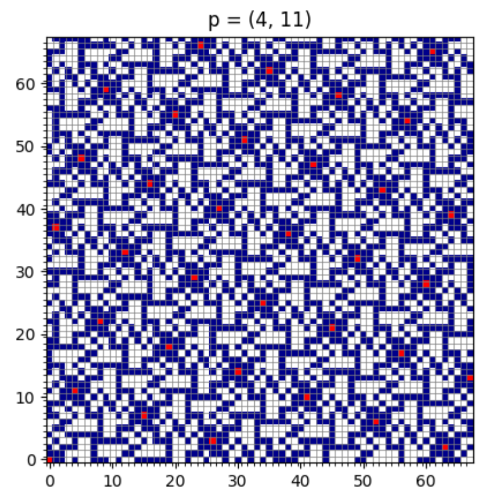
p = (2,95)

3.1.3 Mosaïques plus originales

Ces mosaïques possèdent une organisation plus originale avec des motifs assez rectangulaires.



p = (1,16)

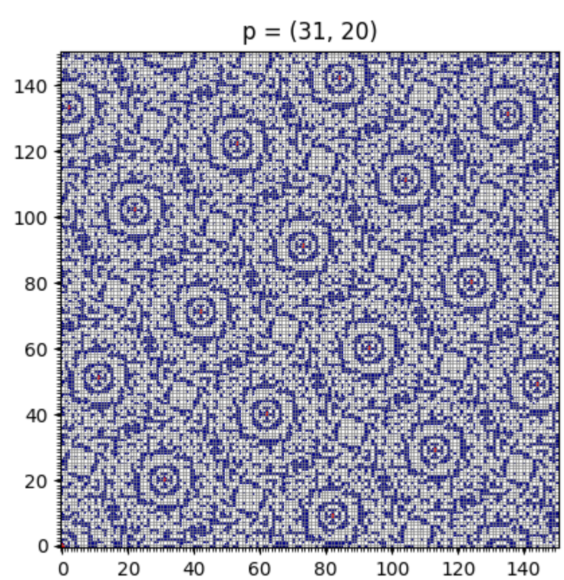


p = (4,11)

Nous venons donc de voir qu'utiliser les nombres premiers de Gauss permet généralement d'obtenir de bons résultats, mais pas constamment. Nous allons maintenant voir qu'utiliser un nombre premier de Gauss n'est pas obligatoire pour obtenir de bons résultats.

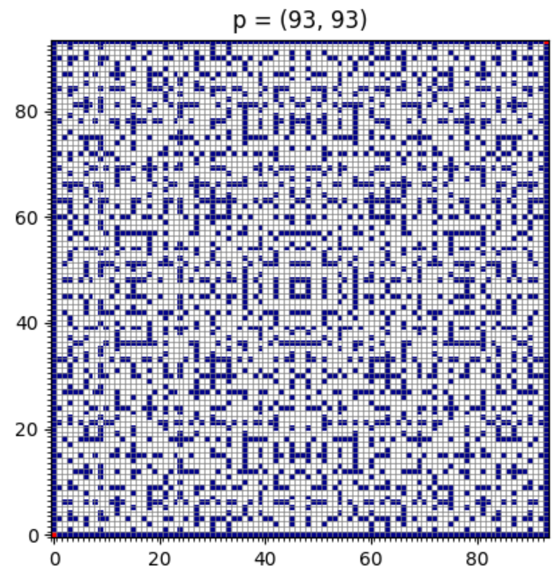
3.1.4 Mosaïque de grande taille

Généralement, les mosaïques de grande taille sont, selon nous, moins esthétiques, du fait que pour une certaine taille d'affichage la mosaïque paraît plus écrasée et est donc moins belle. Mais il existe bien sûr des exceptions comme celle ci-dessous que nous trouvons plutôt belle malgré qu'elle soit d'assez grande taille (ici elle est environ 2 fois plus grande que toutes les mosaïques précédentes) :



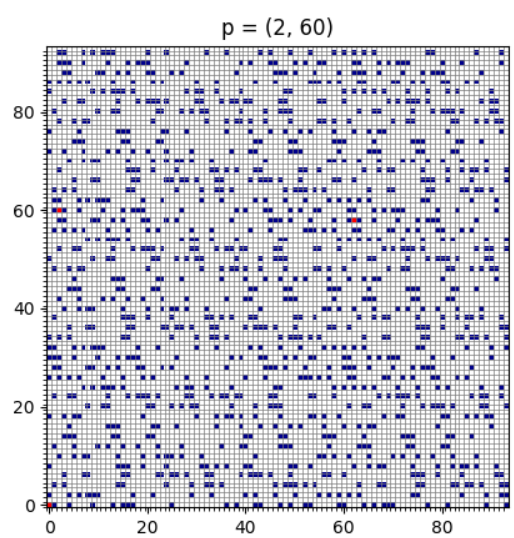
3.2 Sans utiliser de nombres premiers de Gauss

3.2.1 Mosaïque que nous trouvons personnellement belle

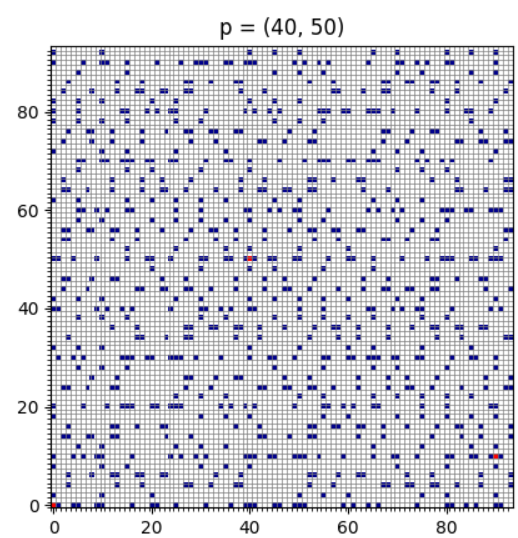


3.2.2 Mosaïques sans réel motif

Ces mosaïques n'ont pas de motif esthétique, elles possèdent peu de cases bleues qui sont très dispersées.



p = (2,60)



p = (40,50)

4 Conclusion

Pour conclure, notre projet a exploré la génération de mosaïques à l'aide des résidus quadratiques et du symbole de Legendre. Ces deux méthodes nous ont permis de déterminer la couleur des tuiles (bleue, blanche ou rouge). Les différents exemples présentés permettent de se rendre compte de la diversité de mosaïques qui peuvent être créées, notamment en utilisant des nombres premiers de Gauss qui permettent souvent un meilleur résultat.