

Optimisation-RO

Clément Royer

Certificat Chef de Projet IA - Université Paris Dauphine-PSL

10 octobre 2023





Clément Royer

- Maître de conférences @ Dauphine-PSL;
- Chaire tremplin en optimisation @ PRAIRIE;
- `clement.royer@lamsade.dauphine.fr`



Florentin Goyens

- Chercheur post-doctorant @ Dauphine-PSL;
- Membre junior optimisation @ PRAIRIE;
- `florentin.goyens@dauphine.psl.eu`

En attendant Moodle/EduSign

<https://github.com/clementwroyer/opt-ro-psl>

- Transparents de cours;
- Matériel illustratif (notebooks Python).

Déroulé de la formation

- Mardi 10/10 après-midi (C. Royer) : Bases de l'optimisation et convexité;
- Mercredi 11/10 matin (C. Royer) : Optimisation non convexe;
- Mercredi 11/10 après-midi (F. Goyens) : Gradient stochastique;
- Jeudi 12/10 matin (C. Royer) : Optimisation sans dérivées;
- Jeudi 12/10 après-midi (F. Goyens) : Optimisation à grande échelle.

Pour la séance de ce matin

- 1 Introduction
- 2 Concepts de base en optimisation
- 3 Optimisation convexe

- 1 Introduction
- 2 Concepts de base en optimisation
- 3 Optimisation convexe

Ce dont tout le monde parle

- Sciences des données (data science);
- Analyse de données (data analysis);
- Fouille de données (data mining);
- Apprentissage machine/profond (machine/deep learning);
- Intelligence artificielle (IA);
- Big Data;
- ...

Ce dont tout le monde parle

- Sciences des données (data science);
- Analyse de données (data analysis);
- Fouille de données (data mining);
- Apprentissage machine/profond (machine/deep learning);
- Intelligence artificielle (IA);
- Big Data;
- ...

Ce dont nous allons parler

- Optimisation pour la science des données en général...
- ...et pour l'IA en particulier (ou vice-versa).

Un ensemble de problèmes basés sur des données

- Extraction d'information à partir de la donnée :
statistiques, attributs principaux, structures;
- Utilisation de cette information pour la **prédiction du comportement de données futures.**

Ce que sera l'IA pour nous

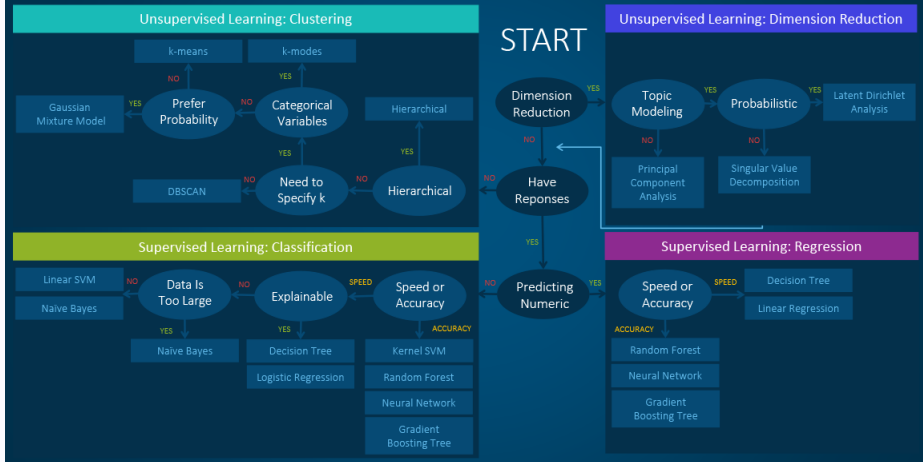
Un ensemble de problèmes basés sur des données

- Extraction d'information à partir de la donnée : *statistiques, attributs principaux, structures*;
- Utilisation de cette information pour la **prédiction du comportement de données futures**.

Composantes de l'IA/de la science des données

- Statistiques;
- Informatique (gestion de la donnée, calcul parallèle, etc);
- **Optimisation** pour la modélisation des problèmes et leur résolution par des algorithmes.

Machine Learning Algorithms Cheat Sheet



Source : <https://blogs.sas.com/content/subconsciousmusings/2017/04/12/machine-learning-algorithm-use/>

Optimisation numérique

- Montée en puissance en 1970-1980;
- Succès des algorithmes en ingénierie (chimique, aéronautique, etc).
- *Pratique standard en calcul scientifique*: utiliser une méthode de points intérieurs (basée sur Newton, développée dans les années 2000s).

Optimisation numérique

- Montée en puissance en 1970-1980;
- Succès des algorithmes en ingénierie (chimique, aéronautique, etc).
- *Pratique standard en calcul scientifique*: utiliser une méthode de points intérieurs (basée sur Newton, développée dans les années 2000s).

Optimisation pour l'IA

- Problèmes basés sur de grands volumes de données;
- Les méthodes standard en optimisation ne sont pas les plus efficaces!

Pratique classique en IA: Utiliser une approche de gradient stochastique avec momentum (1950s + article théorique de 1983).

Contexte de données massives/Big Data

- Les calculs usuels (fonction, dérivées) sont très coûteux car ils accèdent à **toute la donnée**.
- La précision souhaitée n'est pas forcément très grande en raison du bruit sur les données.

Contexte de données massives/Big Data

- Les calculs usuels (fonction, dérivées) sont très coûteux car ils accèdent à **toute la donnée**.
- La précision souhaitée n'est pas forcément très grande en raison du bruit sur les données.

Communauté de l'IA

- Le problème d'optimisation est souvent un moyen plus qu'une fin;
- Propriétés statistiques des solutions;
- Théorie et pratique différentes de la communauté d'optimisation "classique".

- 1 Introduction
 - Un exemple : classification binaire
- 2 Concepts de base en optimisation
- 3 Optimisation convexe

Point de départ : Jeu de données $\{(\mathbf{a}_1, b_1), \dots, (\mathbf{a}_n, b_n)\}$.

- \mathbf{a}_i vecteur d'**attributs** à d coordonnées;
- b_i **label** binaire égal à 1 ou -1 .

Point de départ : Jeu de données $\{(\mathbf{a}_1, b_1), \dots, (\mathbf{a}_n, b_n)\}$.

- \mathbf{a}_i vecteur d'**attributs** à d coordonnées;
- b_i **label** binaire égal à 1 ou -1 .

Exemple : classification de documents

Soit un dictionnaire de d mots.

- \mathbf{a}_i représente les mots contenus dans le document i :

$$[\mathbf{a}_i]_j = \begin{cases} 1 & \text{si le mot } j \text{ est dans le document } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- b_i égal à $+1$ si le document traite de l'automobile, à -1 sinon.

Prédiction

- On cherche $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(\mathbf{a}_i) \approx b_i \ \forall i = 1, \dots, n$.
- On choisit h dans un ensemble \mathcal{H} paramétré par un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$:
$$\mathcal{H} = \left\{ h \mid h = h(\cdot; \mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\hat{d}} \right\};$$

Prédiction

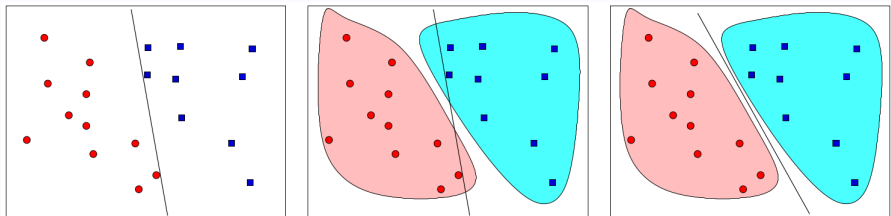
- On cherche $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(\mathbf{a}_i) \approx b_i \forall i = 1, \dots, n$.
- On choisit h dans un ensemble \mathcal{H} paramétré par un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$:
 $\mathcal{H} = \left\{ h \mid h = h(\cdot; \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\};$

Modèle linéaire pour notre exemple

- On cherche un hyperplan de \mathbb{R}^d qui sépare les vecteurs de label $b_i = +1$ de ceux de label $b_i = -1$;
- Cela correspond à trouver un modèle linéaire $h(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$, avec \mathbf{w} tel que

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \begin{cases} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq 1 & \text{si } b_i = +1 \\ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq -1 & \text{si } b_i = -1. \end{cases}$$

Différentes solutions



Source : S. J. Wright and B. Recht, Optimization for Data Analysis, 2022.

- Points : \mathbf{a}_i , rouges/bleus : $b_i = 1/b_i = -1$;
- Nuages rouges/bleus : distribution des documents;
- Deux techniques de classification linéaires;
- Figure de droite : solution à marge maximale (SVM).

Deux points de vue sur le problème

Optimiseur

- Le problème peut être modélisé comme un programme quadratique convexe, et résolu de manière efficace;
- Potentiellement plusieurs solutions.

Deux points de vue sur le problème

Optimiseur

- Le problème peut être modélisé comme un programme quadratique convexe, et résolu de manière efficace;
- Potentiellement plusieurs solutions.

Applicatif

- Le modèle doit s'appliquer à tous les documents de la distribution \Rightarrow généralisation;
- Mieux d'avoir une unique solution bien définie, qui ne varie pas trop par rapport aux données.

Deux points de vue sur le problème

Optimiseur

- Le problème peut être modélisé comme un programme quadratique convexe, et résolu de manière efficace;
- Potentiellement plusieurs solutions.

Applicatif

- Le modèle doit s'appliquer à tous les documents de la distribution \Rightarrow généralisation;
- Mieux d'avoir une unique solution bien définie, qui ne varie pas trop par rapport aux données.

Après discussion (data scientist?)

- Prise en compte de certaines problématiques dans la formulation du problème \Rightarrow Solution unique avec meilleure généralisation.
- Plus de connaissances sur le problème \Rightarrow Meilleure optimisation.

Problématiques d'optimisation

- Possible de définir des problèmes d'optimisation basés sur des données et de les résoudre efficacement;
- Potentiellement décorrélé du but originel : trouver un modèle sur la distribution des données.

Problématiques d'optimisation

- Possible de définir des problèmes d'optimisation basés sur des données et de les résoudre efficacement;
- Potentiellement décorrélé du but originel : trouver un modèle sur la distribution des données.

Autres problématiques

- Quantité massive d'attributs (*tous les mots du dictionnaire*) ?
- Quantité massive de données (*articles Wikipedia*) ?
- Classification impossible par modèles linéaires ?

Problématiques d'optimisation

- Possible de définir des problèmes d'optimisation basés sur des données et de les résoudre efficacement;
- Potentiellement décorrélé du but originel : trouver un modèle sur la distribution des données.

Autres problématiques

- Quantité massive d'attributs (*tous les mots du dictionnaire*) ?
Réduction de dimension, recherche de parcimonie.
- Quantité massive de données (*articles Wikipedia*) ?
Algorithmes stochastiques.
- Classification impossible par modèles linéaires ?
Optimisation non linéaire.

- Fournir une boîte à outils moderne en optimisation;
- En lien avec la pratique courante en IA et sciences des données.

Procédure

- Présenter des problématiques et des algorithmes associés;
- Les fondements théoriques;
- Des applications.

- 1 Introduction
- 2 Concepts de base en optimisation
 - Notations et algèbre linéaire
 - Un problème d'optimisation
- 3 Optimisation convexe

- 1 Introduction
- 2 Concepts de base en optimisation
 - Notations et algèbre linéaire
 - Un problème d'optimisation
- 3 Optimisation convexe

Cadre restreint

- Optimisation sur des variables réelles;
- En dimension finie;
- On utilisera la structure d'espace classique.

Mes notations pour aujourd'hui

- Scalaires : a, b, c, \dots
- Vecteurs : $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$
- Matrices : $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$
- Ensembles : $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$

- \mathbb{R}^d : ensemble des vecteurs à $d \geq 1$ coordonnées réelles;
- Pour tous $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $i \in \{1, \dots, d\}$, $x_i \in \mathbb{R}$ est la i -ème coordonnée de \mathbf{x} : $\mathbf{x} = [x_i]_{1 \leq i \leq d}$;
- On représente $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ en colonnes : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}$;
- On utilise des vecteurs lignes comme “transposés” de vecteurs colonnes : $\mathbf{x}^T := [x_1 \cdots x_d]$;

Opérations vectorielles

- *Addition dans \mathbb{R}^d : $\mathbf{x} + \mathbf{z} := [x_i + z_i]_{1 \leq i \leq n}$*
- *Multiplication d'un vecteur de \mathbb{R}^d par un réel : $\lambda \mathbf{x} := [\lambda x_i]_{1 \leq i \leq d}$.*

Norme euclidienne sur \mathbb{R}^d

La norme euclidienne (ou norme ℓ_2) d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ est donnée par

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}.$$

Produit scalaire sur \mathbb{R}^d

Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$, défini par

$$\mathbf{x}^T \mathbf{z} := \sum_{i=1}^d x_i z_i.$$

On a ainsi $\mathbf{x}^T \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{x}$ et $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$.

Matrices

- $\mathbb{R}^{n \times d}$: matrices à n lignes et d colonnes;
- $\mathbb{R}^{d \times 1} \simeq \mathbb{R}^d$.

Matrice transposée

Soit $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times d}$. La *matrice transposée* de \mathbf{A} , notée \mathbf{A}^T , est la matrice à d lignes et n colonnes telle que

$$\forall i = 1, \dots, d, \forall j = 1, \dots, n, \quad [\mathbf{A}^T]_{ij} = \mathbf{A}_{ji}.$$

Matrices

- $\mathbb{R}^{n \times d}$: matrices à n lignes et d colonnes;
- $\mathbb{R}^{d \times 1} \simeq \mathbb{R}^d$.

Matrice transposée

Soit $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times d}$. La *matrice transposée* de \mathbf{A} , notée \mathbf{A}^T , est la matrice à d lignes et n colonnes telle que

$$\forall i = 1, \dots, d, \forall j = 1, \dots, n, \quad [\mathbf{A}^T]_{ij} = \mathbf{A}_{ji}.$$

Matrices carrées ($n = d$)

- $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$;
- \mathbf{A} est dite *symétrique* si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Inversion et singularité

- Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est dite *inversible* s'il existe $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}_d$, avec \mathbf{I}_d matrice identité de $\mathbb{R}^{d \times d}$.
Dans ce cas, \mathbf{B} est l'unique matrice vérifiant cette propriété : on l'appelle l'*inverse de la matrice* \mathbf{A} et on la note \mathbf{A}^{-1} .

Inversion et singularité

- Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est dite *inversible* s'il existe $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}_d$, avec \mathbf{I}_d matrice identité de $\mathbb{R}^{d \times d}$.
Dans ce cas, \mathbf{B} est l'unique matrice vérifiant cette propriété : on l'appelle l'*inverse de la matrice A* et on la note \mathbf{A}^{-1} .
- Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ est *singulière* s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
Une matrice non singulière est dite *de rang plein* $\min\{n, d\}$.

Inversion et singularité

- Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est dite *inversible* s'il existe $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}_d$, avec \mathbf{I}_d matrice identité de $\mathbb{R}^{d \times d}$.
Dans ce cas, \mathbf{B} est l'unique matrice vérifiant cette propriété : on l'appelle l'*inverse de la matrice A* et on la note \mathbf{A}^{-1} .
- Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ est *singulière* s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
Une matrice non singulière est dite *de rang plein* $\min\{n, d\}$.

Caractère (semi)-défini positif

Une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est dite *semi-définie positive* si

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \geq 0.$$

Elle est *définie positive* lorsque $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} > 0$ pour tout vecteur \mathbf{v} non nul.

- 1 Introduction
- 2 Concepts de base en optimisation
 - Notations et algèbre linéaire
 - Un problème d'optimisation
- 3 Optimisation convexe

Optimisation ?

- Recherche opérationnelle;
- Prise de décision;
- Sciences de la décision;
- Programmation mathématique;
- Optimisation mathématique.

⇒ Tous ces concepts peuvent correspondre à de l'optimisation.

Optimisation ?

- Recherche opérationnelle;
- Prise de décision;
- Sciences de la décision;
- Programmation mathématique;
- Optimisation mathématique.

⇒ Tous ces concepts peuvent correspondre à de l'optimisation.

Ma définition

Le but de l'optimisation est de prendre la meilleure décision parmi un ensemble de possibilités.

Langages typiques des optimiseurs

- C/C++/Fortran (calcul à hautes performances)
- Matlab, Python, Julia (interprétés).

Langages typiques des optimiseurs

- C/C++/Fortran (calcul à hautes performances)
- Matlab, Python, Julia (interprétés).

Langages de modélisation

- GAMS, AMPL, CVX, Pyomo sont génériques;
- MATPOWER, PyTorch sont spécifiques à un domaine;
- La plupart peuvent être interfacés avec les langages ci-dessus.

Un **problème** de minimisation sur d paramètres réels s'écrit sous la forme :

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} f(\mathbf{x}) \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

Un **problème** de minimisation sur d paramètres réels s'écrit sous la forme :

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} f(\mathbf{x}) \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

- \mathbf{x} représente les **variables de décision**, supposées continues;
- d est la dimension du problème (on prendra toujours $d \geq 1$);
- $f(\cdot)$ est la fonction **objectif/de coût/de perte**;
- \mathcal{X} est l'ensemble réalisable/admissible regroupant les contraintes sur les variables de décision.

Un **problème** de minimisation sur d paramètres réels s'écrit sous la forme :

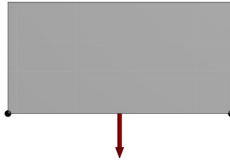
$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} f(\mathbf{x}) \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

- \mathbf{x} représente les **variables de décision**, supposées continues;
- d est la dimension du problème (on prendra toujours $d \geq 1$);
- $f(\cdot)$ est la fonction **objectif/de coût/de perte**;
- \mathcal{X} est l'ensemble réalisable/admissible regroupant les contraintes sur les variables de décision.

Maximiser f revient à minimiser $-f$.

Example : Optimisation de charpente (Stolpe, 2017)

(a) Design domain with dimensions 2×1 , boundary conditions, and external load.



(b) Optimal design for the wheel problem for a ground structure with 61×31 nodes and 1,786,995 potential bars.

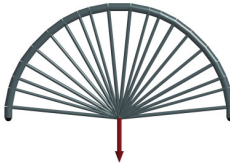


Figure 2.4. Optimal design of (half) a wheel.

Table 2.2. Numerical results obtained by the primal simplex method in IBM ILOG CPLEX for the single-load truss topology design problems listed in Table 2.1.

Problem	Number of nodes	Itn.	CPU (s)	Objective
Cantilever	41×11	71,823	10.6	22.5593
Cantilever	81×21	719,298	496.6	22.4726
Michell	31×21	199,292	48.9	9.0244
Michell	61×41	1,917,377	2335.6	9.0066
Wheel	21×11	38,906	3.9	3.1708
Wheel	41×21	700,623	230.2	3.1565
Wheel	61×31	3,097,263	2755.5	3.1499

Example : Optimisation multidisciplinaire (Martins, 2017)

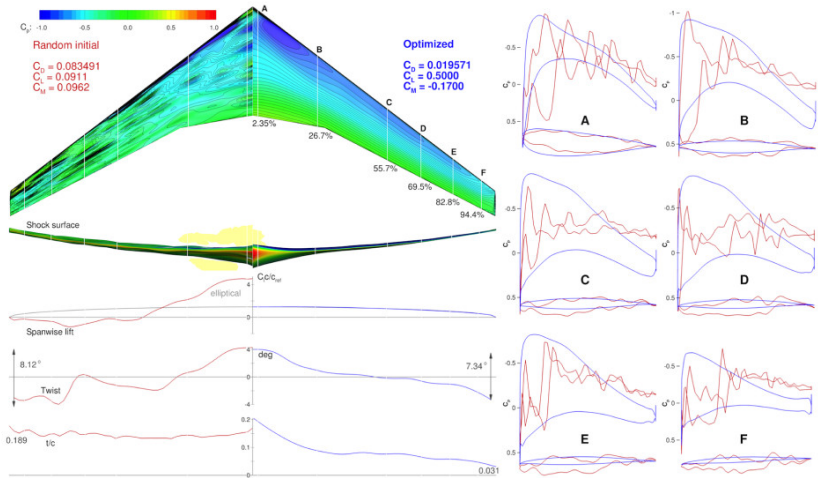


Figure 19.1. The optimization starts from a random geometry (left/red) and converges to an optimal wing (right/blue). Originally appeared in [1245] and [1053].

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} f(\mathbf{x}) \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} f(\mathbf{x}) \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ est dit **admissible** ou **réalisable** si $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.
- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^d$ est une **solution du problème** si

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

L'ensemble des solutions du problème est noté

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}.$$

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} f(\mathbf{x}) \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ est dit **admissible** ou **réalisable** si $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.
- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^d$ est une **solution du problème** si

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

L'ensemble des solutions du problème est noté

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}.$$

- La **valeur optimale du problème** est notée

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}.$$

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} f(\mathbf{x}) \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

- Le problème est dit **irréalisable** si l'ensemble des contraintes est vide : $\mathcal{X} = \emptyset$. Dans ce cas, on a par convention

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} = +\infty.$$

Si \mathcal{X} n'est pas vide, le problème est dit réalisable.

Premières définitions (2)

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} f(\mathbf{x}) \quad \text{s. c. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

- Le problème est dit **irréalisable** si l'ensemble des contraintes est vide : $\mathcal{X} = \emptyset$. Dans ce cas, on a par convention

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} = +\infty.$$

Si \mathcal{X} n'est pas vide, le problème est dit réalisable.

- Le problème est dit **non borné** lorsque \mathcal{X} est non vide mais que f n'a pas de minimum sur \mathcal{X} . Dans ce cas, on note

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} = -\infty.$$

Pour un problème de minimisation (resp. de maximisation), on parlera de problème non minoré (resp. non majoré).

1 Introduction

2 Concepts de base en optimisation

3 Optimisation convexe

- Classes principales de problèmes
- Résolution de programmes convexes
- Application : Approximation et programmation convexe

Pour une classe de problèmes donnés, jusqu'à quelles dimensions suis-je prêt à vous parier qu'un solveur du marché résout votre problème ?

Pour une classe de problèmes donnés, jusqu'à quelles dimensions suis-je prêt à vous parier qu'un solveur du marché résout votre problème ?

Classe de problème	Nb. variables
Programme linéaire	5×10^7
Programme quadratique convexe	5×10^5
Programme conique	5×10^4
Programme quadratique non convexe	300
Problème non convexe	100.

Pour une classe de problèmes donnés, jusqu'à quelles dimensions suis-je prêt à vous parier qu'un solveur du marché résout votre problème ?

Classe de problème	Nb. variables
Programme linéaire	5×10^7
Programme quadratique convexe	5×10^5
Programme conique	5×10^4
Programme quadratique non convexe	300
Problème non convexe	100.

La **convexité** est une notion essentielle en optimisation !

Quels modèles d'optimisation ?

Idée principale : Les modèles les plus utilisés sont ceux dont on sait calculer des solutions **de manière efficace**.

Idée principale : Les modèles les plus utilisés sont ceux dont on sait calculer des solutions **de manière efficace**.

Cas fondamental : Programmation convexe

- Minimiser une fonction f convexe :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^d)^2, \forall \alpha \in [0, 1], \quad f(\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) f(\mathbf{y})$$

- Sous contraintes convexes :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{X}^2, \forall \alpha \in [0, 1], \quad \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

En général, possible de calculer efficacement des solutions, potentiellement pour des millions de variables !

- 1 Introduction
- 2 Concepts de base en optimisation
- 3 **Optimisation convexe**
 - **Classes principales de problèmes**
 - Résolution de programmes convexes
 - Application : Approximation et programmation convexe

Forme de base

$$\begin{cases} \text{minimiser}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. c.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, \ell, \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $g_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexe pour tout i et $h_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ affine pour tout i .

$$\begin{array}{ll}\text{minimiser}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. c.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0,\end{array}$$

avec $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Problème canonique en optimisation;
- Possible de résoudre des problèmes avec des millions/milliards de variables.

Exemple : Programmes quadratiques (QP)

$$\begin{array}{ll}\text{minimiser}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. c.} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0,\end{array}$$

avec $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Extension du cas sans contraintes avec contraintes linéaires;
- Peut avoir une solution même si $\mathbf{H} \succeq 0$!

Exemples : Programmes semi-définis positifs (SDP)

$$\begin{array}{ll}\text{minimiser}_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times d}} & \text{trace}(\mathbf{C}^T \mathbf{X}) \\ \text{s. c.} & \text{trace}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}) = b_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \succeq 0,\end{array}$$

avec $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et $\mathbf{b} = [b_i] \in \mathbb{R}^n$.^a

$$^a \text{trace}(\mathbf{UV}) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d U_{ij} V_{ij}.$$

- Généralisent LP et QP;
- Possible de les résoudre en temps polynomial, mais les calculs algébriques peuvent être coûteux;
- Problèmes souvent de grandes tailles (relaxations de problèmes continus ou combinatoires).

$$\begin{array}{ll}\text{minimiser}_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times d}} & \text{trace}(\mathbf{C}^T \mathbf{X}) \\ \text{s. c.} & \text{trace}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}) = b_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & \mathbf{X} \in \mathcal{K},\end{array}$$

où $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{b} = [b_i] \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ll}\text{minimiser}_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times d}} & \text{trace}(\mathbf{C}^T \mathbf{X}) \\ \text{s. c.} & \text{trace}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}) = b_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & \mathbf{X} \in \mathcal{K},\end{array}$$

où $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{b} = [b_i] \in \mathbb{R}^n$.

L'ensemble \mathcal{K} est un cône pointé de $\mathbb{R}^{d \times d}$:

- $\lambda \mathbf{X} \in \mathcal{K}$ pour tous $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$, $\lambda > 0$;
- $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}$.

$$\begin{array}{ll}\text{minimiser}_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times d}} & \text{trace}(\mathbf{C}^T \mathbf{X}) \\ \text{s. c.} & \text{trace}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}) = b_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & \mathbf{X} \in \mathcal{K},\end{array}$$

où $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{b} = [b_i] \in \mathbb{R}^n$.

L'ensemble \mathcal{K} est un cône pointé de $\mathbb{R}^{d \times d}$:

- $\lambda \mathbf{X} \in \mathcal{K}$ pour tous $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$, $\lambda > 0$;
- $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}$.

- Généralise tout ce qui précède !
- Formulation utilisée par des bibliothèques spécialisées (cvxpy) et des solveurs commerciaux (MOSEK).

- 1 Introduction
- 2 Concepts de base en optimisation
- 3 **Optimisation convexe**
 - Classes principales de problèmes
 - **Résolution de programmes convexes**
 - Application : Approximation et programmation convexe

Pour les classes majeures

- LP, QP, SDP, SOCP;
- D'autres classes non traitées ici.

Dans la suite

- On illustre les notions dans le cadre des programmes linéaires;
- On donne l'idée derrière les méthodes dites de points intérieurs.

Problème de base (dit primal)

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{s. c.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0,$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Problème de base (dit primal)

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{s. c.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0,$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Problème dual (aussi LP !)

$$\underset{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d}{\text{maximiser}} \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad \text{s. c.} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \mathbf{s} \geq 0.$$

Problème de base (dit primal)

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{s. c.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0,$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Problème dual (aussi LP !)

$$\underset{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d}{\text{maximiser}} \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad \text{s. c.} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \mathbf{s} \geq 0.$$

Conditions de KKT

Si $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^d$ est une solution, il existe $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{s}^* \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}^* &= \mathbf{b}, & \mathbf{x}^* &\geq 0, \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y}^* + \mathbf{s}^* &= \mathbf{c}, & \mathbf{s}^* &\geq 0, \\ x_i^* s_i^* &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Théorème

Pour tout programme linéaire,

- i) Soit ce problème et son dual ont chacun une solution, et l'ensemble vérifie les conditions de KKT;
- ii) Soit un des deux problèmes est non borné et l'ensemble réalisable de l'autre est vide (problème irréalisable);
- iii) Soit les deux problèmes sont irréalisables.

Théorème

Pour tout programme linéaire,

- i) Soit ce problème et son dual ont chacun une solution, et l'ensemble vérifie les conditions de KKT;
- ii) Soit un des deux problèmes est non borné et l'ensemble réalisable de l'autre est vide (problème irréalisable);
- iii) Soit les deux problèmes sont irréalisables.

Conséquences

- Trouver une solution revient à trouver un triplet vérifiant les contraintes de chaque problème !
- C'est ce que font les approches de points intérieurs, de manière primale-duale ou duale.

Principe

- Partir d'un triplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s})$ réalisable pour le problème et son dual avec $\mathbf{x} > 0$ et $\mathbf{s} > 0$.
- Appliquer la méthode de Newton au système de KKT

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ x_i s_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, d. \end{cases}$$

- Obtenir un nouveau point "intérieur" $(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}^+, \mathbf{s}^+)$ avec une valeur $[\mathbf{x}^+]^T [\mathbf{s}^+]$ réduite (via la méthode de Newton).

Principe

- Partir d'un triplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s})$ réalisable pour le problème et son dual avec $\mathbf{x} > 0$ et $\mathbf{s} > 0$.
- Appliquer la méthode de Newton au système de KKT

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\ x_i s_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, d. \end{cases}$$

- Obtenir un nouveau point "intérieur" $(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}^+, \mathbf{s}^+)$ avec une valeur $[\mathbf{x}^+]^T [\mathbf{s}^+]$ réduite (via la méthode de Newton).

Ça marche !

- Vitesses de convergence en théorie;
- Très bonnes performances en pratique;
- Implémentations très sophistiquées.

Programmation conique

$$\begin{array}{ll}\text{minimiser } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times d} & \text{trace}(\mathbf{C}^T \mathbf{X}) \\ \text{s. c.} & \text{trace}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{X} \in \mathcal{K},\end{array}$$

où $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{b} = [b_i] \in \mathbb{R}^m$, et \mathcal{K} est un cône pointé.

Points intérieurs pour CP

- Partir des conditions de KKT;
- Rester dans l'intérieur du cône \mathcal{K} ;
- Se rapprocher progressivement de la frontière;
- Implémentations efficaces (SeduMi, SDP3).

- 1 Introduction
- 2 Concepts de base en optimisation
- 3 **Optimisation convexe**
 - Classes principales de problèmes
 - Résolution de programmes convexes
 - **Application : Approximation et programmation convexe**

Données

- Jeu de données à n éléments (individus, échantillons, etc);
- Chaque élément i est caractérisé par un vecteur $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d$ d'attributs ainsi qu'un label $b_i \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \text{Matrice } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d} \text{ et vecteur } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Données

- Jeu de données à n éléments (individus, échantillons, etc);
- Chaque élément i est caractérisé par un vecteur $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d$ d'attributs ainsi qu'un label $b_i \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \text{Matrice } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d} \text{ et vecteur } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

But

On cherche un modèle linéaire $h : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ qui prédise correctement les b_i d'après les \mathbf{a}_i .

- Les modèles linéaires (dans le bon espace) sont souvent une bonne approximation;
- Utilisation d'algèbre linéaire (intérêt à la fois théorique et numérique).

Prédiction idéale

- Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$ pour tout i ;
- Ces n equations peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire:
 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Prédiction idéale

- Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$ pour tout i ;
- Ces n equations peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire:
 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Résoudre des systèmes d'équations linéaires

- Une histoire d'algèbre linéaire;
- L'existence de solutions ne dépend que de \mathbf{A} et \mathbf{b} .

Un mauvais jeu de données

- $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{a}_n = 1$ ($d = 1$);
- b_1, \dots, b_n sont distincts (typique de mesures bruitées).

Juste de l'algèbre linéaire ?

Un mauvais jeu de données

- $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{a}_n = 1$ ($d = 1$);
- b_1, \dots, b_n sont distincts (typique de mesures bruitées).

Expliquer les données par un modèle linéaire

- On cherche $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = a_i x = b_i \forall i$;
- Système linéaire :

$$\begin{cases} x = b_1 \\ x = b_2 \\ \vdots \\ x = b_n \end{cases}$$

Juste de l'algèbre linéaire ?

Un mauvais jeu de données

- $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{a}_n = 1$ ($d = 1$);
- b_1, \dots, b_n sont distincts (typique de mesures bruitées).

Expliquer les données par un modèle linéaire

- On cherche $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = a_i x = b_i \forall i$;
- Système linéaire :

$$\begin{cases} x = b_1 \\ x = b_2 \\ \vdots \\ x = b_n \end{cases}$$

- Ce système n'a pas de solution !
- En revanche, il existe une solution au problème de “coller aux données” (“data fitting”).

Trois problèmes d'approximation

Pb 1) Approximation de Chebyshev

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i|.$$

Pb 2) Approximation robuste/en norme ℓ_1

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i|.$$

Pb 3) Moindres carrés linéaires

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 := \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i|^2.$$

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i|.$$

Reformulation en programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ t \in \mathbb{R}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{2n}}}{\text{minimiser}} & t \\ \text{s. c.} & \\ & -t - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & -t + \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i + s_{n+i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & t \geq 0 \\ & s_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 2n. \end{array}$$

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i|.$$

Reformulation en programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ t \in \mathbb{R}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{2n}}}{\text{minimiser}} & t \\ \text{s. c.} & \\ & -t - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & -t + \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i + s_{n+i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & t \geq 0 \\ & s_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 2n. \end{array}$$

- Programme linéaire à $d + 2n + 1$ variables;
- Résolution aisée via les points intérieurs;
- Donne la solution et la valeur optimale du problème d'origine !

Pb 2) Approximation en norme ℓ_1

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i|.$$

Pb 2) Approximation en norme ℓ_1

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i|.$$

Reformulation en programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ t^+, t^- \in \mathbb{R}^n}}{\text{minimiser}} & \sum_{i=1}^n (t_i^+ + t_i^-) \\ \text{s. c.} & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i - t_i^+ + t_i^- = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & t_i^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & t_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{array}$$

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i|.$$

Reformulation en programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ t^+, t^- \in \mathbb{R}^n}}{\text{minimiser}} & \sum_{i=1}^n (t_i^+ + t_i^-) \\ \text{s. c.} & \begin{array}{ll} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i - t_i^+ + t_i^- & = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ t_i^+ & \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \\ t_i^- & \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{array} \end{array}$$

- Programme linéaire à $d + 2n$ variables;
- Résolution aisée via les points intérieurs;
- Donne la solution et la valeur optimale du problème d'origine !

Formulation du problème

Étant donné $\{(\mathbf{a}_i, b_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ avec $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d$, on considère le problème d'optimisation :

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \frac{1}{2n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{2n} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}),$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Formulation du problème

Étant donné $\{(\mathbf{a}_i, b_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ avec $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d$, on considère le problème d'optimisation :

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \frac{1}{2n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{2n} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}),$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Propriété

- Programme quadratique **sans contraintes**;
- Peut être résolu sans points intérieurs.

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \frac{1}{2n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2.$$

Outil : Décomposition en valeurs singulières

La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ peut s'écrire

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right] \mathbf{V}^T,$$

où $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ sont des matrices orthogonales, et $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ sont les valeurs singulières (non nulles) de \mathbf{A} .

Théorème (Inverse de Moore-Penrose)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ et sa décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots 0 & \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right] \mathbf{V}^T,$$

avec $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Alors, la **pseudo-inverse de \mathbf{A}** est définie par

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots 0 & \frac{1}{\sigma_r} & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right] \mathbf{U}^T.$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème

Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}$ est la solution du problème aux moindres carrés

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \frac{1}{2n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2.$$

de norme minimale. Pour tout $\hat{\mathbf{x}} \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$, on a :

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème

Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}$ est la solution du problème aux moindres carrés

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimiser}} \frac{1}{2n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2.$$

de norme minimale. Pour tout $\hat{\mathbf{x}} \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$, on a :

- $\|\mathbf{AA}^\dagger \mathbf{b} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|^2$;
- $\|\mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}\| \leq \|\hat{\mathbf{x}}\|$.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Une solution

- Le problème minimiser $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ $\frac{1}{2n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$ possède une infinité de solutions;
- Parmi celles-ci $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}$ est de norme minimale;
- Cette solution est la moyenne $\mathbf{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{1}$!

Qualité de la solution des moindres carrés

- Meilleure approximation possible en termes d'erreurs;
- Solution déterministe quand $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_i$ fixés.

Qualité de la solution des moindres carrés

- Meilleure approximation possible en termes d'erreurs;
- Solution déterministe quand $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_i$ fixés.

En présence de données bruitées

- Approche statistique : supposer que $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w}^* + \epsilon$ avec ϵ vecteur aléatoire de loi connue;
- Calculer l'estimateur du **maximum de vraisemblance** en résolvant un problème d'optimisation;
- Équivalent aux moindres carrés pour ϵ suivant une loi gaussienne/normale;
- Équivalent à la régression ℓ_1 pour ϵ suivant une loi de Laplace.

Optimisation (en IA et au-delà)

- Outil de modélisation;
- Outil de résolution de problèmes;
- Outil numérique!

Optimisation convexe

- Outil de prédilection;
- Large spectre de modélisation;
- Capacité de résolution à grande échelle.

Les grands classiques

- Programmation linéaire;
- Moindres carrés linéaires.

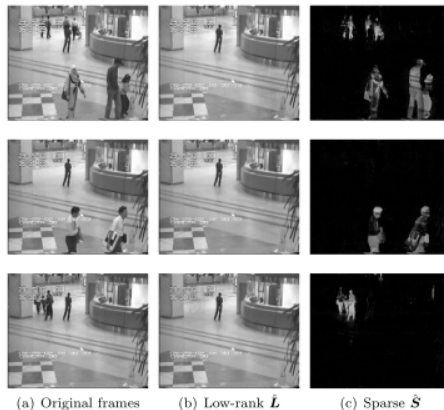


Figure 5.3 Background modeling from video. Three frames from a 200 frame video sequence taken in an airport [LHGT04]. (a) Frames of original video \mathbf{Y} . (b)-(c) Low-rank $\hat{\mathbf{L}}$ and sparse components $\hat{\mathbf{S}}$ obtained by PCP.

Source : J. Wright et Y. Ma, *High-Dimensional Data Analysis with Low-Dimensional Models*, 2022.

- T. Terlaky, M. F. Anjos, S. Ahmed (Eds.), *Advances and Trends in Optimization with Engineering Applications*. MOS-SIAM Series on Optimization, 2017.
- S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2009.
- S. Boyd and L. Vandenberghe, *Introduction to Applied Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.
- J. Wright and Y. Ma, *High-Dimensional Data Analysis with Low-Dimensional Models*. Cambridge University Press, 2022.

- SciPy/NumPy : bibliothèque de base en calcul scientifique pour Python.
- CVX, CVXPY : logiciels académiques pour l'optimisation convexe (+IPOPT pour le cas non convexe).
- Gurobi, CPLEX, MOSEK : logiciels commerciaux pour les programmes linéaires (en variables continues et discrètes) et au-delà (programmes coniques).

Aujourd'hui

- Outils d'optimisation existants, problèmes que l'on peut résoudre;
- Focus : programmation convexe.

Demain

- Matin : Optimisation non convexe.
- Après-midi : Optimisation stochastique.

Aujourd'hui

- Outils d'optimisation existants, problèmes que l'on peut résoudre;
- Focus : programmation convexe.

Demain

- Matin : Optimisation non convexe.
- Après-midi : Optimisation stochastique.

Merci beaucoup !