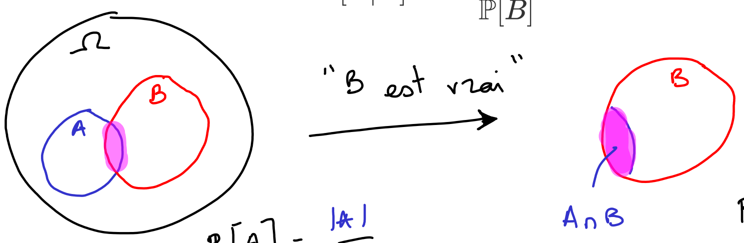
Probabilités – 3 IF

TD 2 : Probabilités conditionnelles

Rappel de cours

Probabilité conditionnelle : Si je sais qu'un événement B est vrai, comment cela influe-t-il sur la probabilité qu'un autre événement A soit vrai ?

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$



$\mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$

Indépendance : On dit que deux événements A et B sont indépendants si le fait de savoir que B est vrai ne nous donne aucune information sur la probabilité que A le soit. Formellement

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B]$$

Rmq: si $\mathbb{P}[B] \neq 0$ et que A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$.

Indépendance mutuelle : on dit que des événements $(A_i)_{i \in [1,n]}$ sont mutuellement indépendants si

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i]$$

Formule de Bayes : Connaissant $\mathbb{P}[A|B]$, peut-on en déduire $\mathbb{P}[B|A]$?

$$\mathbb{P}[A|B] \times \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A] \times \mathbb{P}[A]$$

Exercice 1 :

Une famille a deux enfants (consécutivement). Quelle est la probabilité que ce soient deux garçons, sachant que le premier est un garçon ?

Ω 1e	2e
G	F
F	G
G	G
F	F

A : " le premier enfant est un garçon "

B : " le deuxième ————— ".

C : " les deux enfants sont des garçons ".

→ $B \cap A = C$

$\mathbb{P}[C|A] = \boxed{\frac{1}{2}}$

Quelle est la probabilité que ce soient deux garçons sachant que l'un des deux au moins est un garçon ?

D : " au moins l'un des deux enfants est un garçon ".

$\mathbb{P}[C|D] = \frac{\mathbb{P}[C \cap D]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{\mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{1/4}{3/4} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Exercice 2 :
Soient A, B et C les événements correspondant au lancer de deux pièces équilibrées et distinguables suivants :
— A = "*La première pièce est tombée sur pile*"
— B = "*La deuxième pièce est tombée sur pile*"
— C = "*Les deux pièces sont tombées sur des faces différentes*"
Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants. Sont-ils (mutuellement) indépendants ?

Ω :

1^e	2^e
P	P
P	F
F	P
F	F

$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[\text{"PP"}] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$

$\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[\text{"PF"}] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[C]$

$\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[\text{"FP"}] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C]$

Donc ces événements sont 2-à-2 indépendants.

$\mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C] = \frac{1}{8}$

$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0$

Donc ils ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 3 : (DS 2000)
Un entrepôt est muni d'un dispositif d'alarme. Lorsqu'il y a tentative de cambriolage, le dispositif se déclenche avec une probabilité égale à $0,99$. Lorsqu'il n'y a pas de tentative de cambriolage, le dispositif se déclenche tout de même par erreur au cours d'une journée avec une probabilité égale à $0,01$. En supposant qu'une tentative de cambriolage au cours d'une journée ait lieu avec une probabilité égale à $0,001$, quelle est la probabilité qu'une alarme déclenchée un jour donné le soit par une tentative de cambriolage ? On notera D l'événement "*l'alarme se déclenche*" et T l'événement "*Il y a une tentative de cambriolage*", le tout considéré au cours de la journée donnée.

$\mathbb{P}[D|T] = 0.99$

$\mathbb{P}[D|\bar{T}] = 0.01$

$\mathbb{P}[T] = 0.001$

$$\mathbb{P}[D] = \mathbb{P}[D|T]\,\mathbb{P}[T] + \mathbb{P}[D|\bar{T}]\,\underbrace{\mathbb{P}[\bar{T}]}_{1-\mathbb{P}[T]} = 0.99 \times 0.001 + 0.01 \times 0.999 = \frac{1098}{100\,000}$$

$$\mathbb{P}[T|D] = \frac{\mathbb{P}[D|T]\,\mathbb{P}[T]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{0.99 \times 0.001}{\frac{1098}{100\,000}} \approx \boxed{0.09}$$

Il y a donc 9 % de chance que l'alarme ait été déclenchée par un cambriolage.

Exercice 4 : (DS 2017)

On s'intéresse au report des voix dans le cadre du deuxième tour d'une élection à scrutin majoritaire à deux tours.

Supposons qu'il y avait 4 candidats au premier tour, A, B, C et D. Les scores des candidats au premier tour sont 35% pour A, 25% pour B, 20% pour C et 20% pour D parmi les suffrages exprimés. 23% des votants se sont abstenus. Les candidats C et D ont été éliminés lors du premier tour de l'élection. Parmi l'électorat
de C du premier tour,

— 75% voteront pour A au second tour,
— 20% voteront pour B au second tour,
— 5% s'abstiendront.

Parmi l'électorat de D du premier tour,

— 50% voteront pour A au second tour,
— 15% voteront pour B au second tour,
— 35% s'abtiendront.

On suppose que les personnes ayant voté pour A et pour B au premier tour ne changeront pas d'avis et ne s'abstiendront pas lors du second tour. On suppose également que les personnes s'étant abstenues au premier tour n'iront pas voter au second.

1. Si je prends un bulletin pour A au second tour, quelle est la probabilité qu'il ait été déposé par quelqu'un ayant voté pour C au premier tour ?

ici Ω_1 = " les votants au 1^{er} tour " .

X_i = " le bulletin est pour le candidat X au tour i " . ex. A_2

$$\mathbb{P}[C_1 | A_2] = \frac{\mathbb{P}[A_2|C_1]\,\mathbb{P}[C_1]}{\mathbb{P}[A_2]} = \frac{0.75 \times 0.2}{0.6} = \boxed{0.25}$$

$\mathbb{P}[A_2 | C_1] = 0.75$

$\mathbb{P}[C_1] = 0.2$

$$\mathbb{P}[A_2] = \underbrace{\mathbb{P}[A_2 | A_1]}_{1} \underbrace{\mathbb{P}[A_1]}_{0.35} + \underbrace{\mathbb{P}[A_2 | C_1]}_{0.75} \underbrace{\mathbb{P}[C_1]}_{0.2} + \underbrace{\mathbb{P}[A_2 | D_1]}_{0.5} \underbrace{\mathbb{P}[D_1]}_{0.2} = 0.6$$

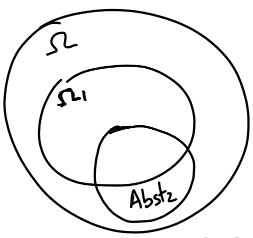
2. Qui va gagner l'élection ?

$\mathbb{P}_{\Omega_1}[Abst_2] \to 0.08$

$\mathbb{P}_{\Omega_1}[A_2] = 0.6$

$$\mathbb{P}_{\Omega_1}[B_2] = \underbrace{\mathbb{P}[B_2 | C_1]}_{0.2} \underbrace{\mathbb{P}[C_1]}_{0.2} + \underbrace{\mathbb{P}[B_2 | D_1]}_{0.15} \underbrace{\mathbb{P}[D_1]}_{0.2} + \underbrace{\mathbb{P}[B_1]}_{0.25} = 0.32$$

Donc c'est A qui remporte l'élection.



3. Quel sera le taux d'abstention au second tour ?

Ω = " l'ensemble des électeurs " .

$$\mathbb{P}_{\Omega}[Abst_2] = \frac{|Abst_2|}{|\Omega|}$$

$$\mathbb{P}_{\Omega_1}[Abst_2] = \frac{|Abst_2|}{|\Omega_1|}$$

$$\mathbb{P}_{\Omega}\left[Abst_2\right] = \underbrace{\mathbb{P}_{\Omega}\left[Abst_2 \mid Abst_1\right]}_{1}\underbrace{\mathbb{P}_{\Omega}\left[Abst_1\right]}_{0.23} + \underbrace{\mathbb{P}_{\Omega}\left[Abst_2 \mid \overline{Abst_1}\right]}_{0.08}\underbrace{\mathbb{P}_{\Omega}\left[\overline{Abst_1}\right]}_{0.77} = \boxed{0.2916}$$