PROBABILITÉS - 3IF

TD 6: Lois conditionnelles - cas continu

Rappel de cours

I. Loi jointe, marginale, indépendance.

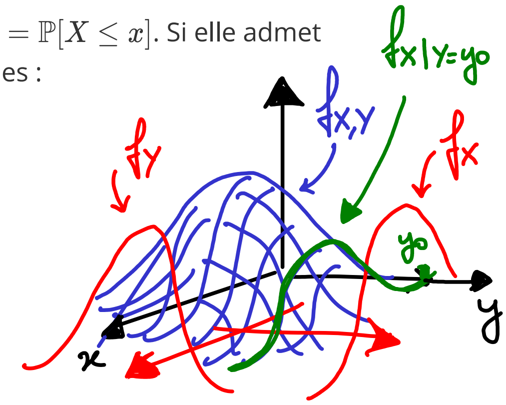
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles. La **fonction de répartition jointe** de (X,Y) est donnée par:

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}[(X \leq x) \wedge (Y \leq y)]$$

On dit que ce couple admet une **densité** s'il existe $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\boxed{\forall x, y, F_{X,Y} = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}$$

La **loi marginale** de X est donnée par sa fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$. Si elle admet une densité, on peut la calculer grâce à la formule des probabilités totales :



$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

On dit que X et Y sont **indépendantes** ssi :

$$\forall x, y, f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

II. Loi conditionnelle

Soit y tel que $f_Y(y) \neq 0$, on définit la **densité conditionnelle** de X sachant que $Y = y$ par:

$$\boxed{\forall x, f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes

$$\forall x, y, f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$$

Exercice 1

On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) de densité $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{x} e^{-x} 1_{0<y<x}$.

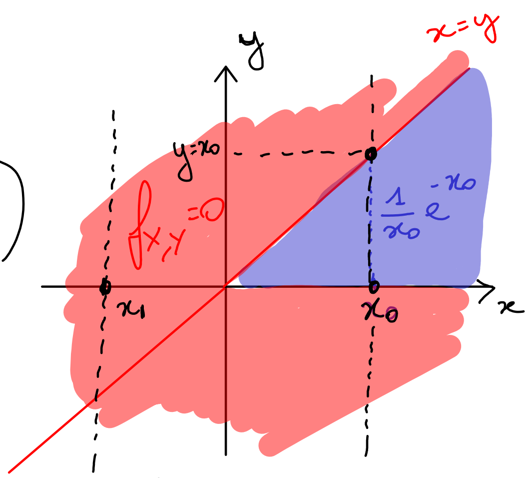
1. Déterminer la loi marginale de X puis la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,.\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}_{0<y<x}\,dy \quad \text{si } x \geq 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{sinon} \\ f_X(x) = 0\end{array}\right)$$

$$= \int_0^x \frac{1}{x} e^{-x}\,.\,dy$$

$$= \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \rightarrow \text{loi exponentielle } \mathcal{E}(1)$$



$$f_X(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x_1,y)\,.\,dy$$

soit $x \geq 0$, $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{\frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}_{0<y<x}}{e^{-x}} = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{0<y<x}$

Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,x])$

2. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes~?

Si on suppose que X et Y sont indépendantes, on aurait $\forall x$, $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$. En particulier, $f_{Y|X=x}$ ne dépend pas de x.
Or d'après la question précédente, $f_{Y|X=x}$ dépend de x. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Quelle est la loi de $U = e^{-X}$? En déduire une méthode de simulation du couple (X, Y).

$f_U(u)$

$F_U(u) = \mathbb{P}[U \leq u] = \cancel{\int_{-\infty}^{u} f_U(t).dt}$ -

$= \mathbb{P}[e^{-X} \leq u]$

$= \mathbb{P}[-X \leq \ln(u)]$ si $u > 0$ (sinon 0)

$= \mathbb{P}[X \geq -\ln(u)]$

$= 1 - \mathbb{P}[X < -\ln(u)]$

$= 1 - F_X(-\ln(u))$ or $X \sim \mathcal{E}(1)$: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= e^{\ln(u)}$ si $-\ln(u) \geq 0 \iff u \leq 1$ (sinon 1)

$= \begin{cases} u & \text{si } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$

Donc $U \sim \mathcal{U}([0;1])$

$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$F_X(x) = \int_0^x f_X(t).dt$

$= \int_0^x e^{-t}.dt$

$= -[e^{-t}]_0^x$

$= -e^{-x} + 1$

- On peut donc simuler (X,Y) par :

1. $u \leftarrow \text{rand}(0,1)$
2. $x \leftarrow -\ln(u)$
3. $y \leftarrow \text{rand}(0,x)$
4. return (x,y)

Exercice 2

Un système électronique utilise N composants, avec $N \geq 1$. Chacun de ces composants a une durée de vie T_i avec T_i de loi exponentielle de paramètre λ. Rappelons qu'alors nous avons : $P(T_i \geq t) = e^{-\lambda t}$. Les durées de vie de chaque composant sont supposées indépendantes. Si l'un des composants tombe en panne, le système s'arrête. Notons X la durée de vie du système.

1. Exprimer $X|\{N=n\}$ en fonction de $T_1, \ldots, T_n$. Déterminer pour t donné la probabilité $P(X > t \,|\, N = n)$. En déduire la loi de $X|\{N=n\}$.

- $X|\{N=n\} = \min(T_1, \ldots, T_n)$ -
- $\mathbb{P}[X > t \,|\, N=n] = \mathbb{P}[\min(T_1, \ldots, T_n) > t]$

$= \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} T_i > t\right]$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[T_i > t] \quad \text{car les } T_i \text{ sont indépendants}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda n t}$$

Donc $X | \{N = n\}$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda n)$.

2. La variable aléatoire réelle N vérifie $P[N = n] = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$. Donner $P[X > t]$.

Indication : On rappelle que pour tout $0 < a < 1$*, on a* $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} - 1$.

$$\mathbb{P}[X > t] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X > t, N = n] \quad \text{d'après la formule des probabilités totales.}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X > t | N = n] \mathbb{P}[N = n]$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda n t} \times \frac{1}{2^n} \quad (\text{pour } t \geq 0)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda t}}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{-\lambda t}}{2}} - 1 = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda t}}{2 - e^{-\lambda t}} & (\text{pour } t \geq 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Déduire de la question précédente la fonction de répartition de X puis la densité de X.

$$F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$$

$$= 1 - \mathbb{P}[X > t]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\lambda t}}{2 - e^{-\lambda t}}$$

$$f_X(t) = F_X'(t)$$

$$= -\frac{-\lambda e^{-\lambda t}(2 - e^{-\lambda t}) - e^{-\lambda t} \times \lambda e^{-\lambda t}}{(2 - e^{-\lambda t})^2}$$

$$= -\frac{-2\lambda e^{-\lambda t} + \cancel{\lambda e^{-2\lambda t}} - \cancel{\lambda e^{-2\lambda t}}}{(2 - e^{-\lambda t})^2}$$

$$= \boxed{\frac{2\lambda e^{-\lambda t}}{(2 - e^{-\lambda t})^2}}$$