Probabilités – 3 IF

TD 5 : Lois conditionnelles - cas discret

Rappel de cours

I. Couple de variables aléatoires

DEF

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.

- La **loi jointe** du couple (X, Y) est définie par $\forall, i, j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X = i \wedge Y = j]$
- Étant donné $j \in \mathbb{N}$, la **loi conditionnelle** de X sachant que $Y = j$ est définie par $\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X = i \mid Y = j]$.

PROP (Formule des probabilités totales)

$$\forall i \in \mathbb{N}, \underbrace{\mathbb{P}[X = i]}_{\text{loi marginale}} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[X = i \wedge Y = j]$$

DEF

On dit que X et Y sont **indépendantes** ssi :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X = i \wedge Y = j] = \mathbb{P}[X = i] \cdot \mathbb{P}[Y = j]$$

dans ce cas, $\mathbb{P}[X=i \mid Y=j] = \mathbb{P}[X=i]$.

II. Corrélation

DEF

On appelle **covariance** du couple (X, Y) la quantité $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, en la normalisant on obtient la **corrélation** de (X, Y):

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}} \in [-1, 1]$$

PROP

- Var(X) = $\mathrm{Cov}(X, X)$
- Si X et Y sont indépendantes, $\rho(X, Y) = 0$.
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y)$

Exercice 1 :

On jette deux dés équilibrés. On désigne respectivement par X et par Y le maximum et le minimum des résultats obtenus. Déterminer la loi du couple (X, Y).

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	$\mathbb{P}_X$
1	1/36	0				0	1/36
2	2/36	1/36					3/36
3							5/36
4							7/36
5						0	9/36
6	2/36				2/36	1/36	11/36
$\mathbb{P}_Y$	11/36					1/36	

$\mathbb{P}[X=1, Y=1] = \frac{\#\{(1,1)\}}{36} = \frac{1}{36}$

$\mathbb{P}[X=1, Y=2] = 0$ (X est forcé supérieur à Y).

$\mathbb{P}[X=2, Y=1] = \frac{\#\{(1,2), (2,1)\}}{36} = \frac{2}{36}$

définition indépendance

$$\forall i,j \quad \mathbb{P}[X=i, Y=j] = \mathbb{P}[X=i]\,\mathbb{P}[Y=j].$$

Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

$$\mathbb{P}[X=1, Y=2] = 0 \neq \mathbb{P}[X=1]\,\mathbb{P}[Y=2]$$

$$\mathbb{P}_X[X=1] = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}_Y[Y=2] = \frac{9}{36}$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2 :

On suppose que le nombre N d'œufs pondus par un batracien suit une loi de Poisson de paramètre λ. De plus, on suppose également que les œufs pondus ont une évolution indépendante les uns des autres, et que chaque œuf a une probabilité p d'arriver à éclosion. On note X le nombre d'œuf éclos.

1. Déterminer la loi du couple aléatoire (X, N).

- $\mathbb{P}[N=n] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ (loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$).

S'il y a n oeufs pondus, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

- $\mathbb{P}[X=k \mid N=n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in [0;n]$.

$$\mathbb{P}[X=k, N=n] = \mathbb{P}[X=k \mid N=n]\,\mathbb{P}[N=n]$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\boxed{= \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}}$$

$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A \mid B]\,\mathbb{P}[B]$

A : " $X=k$ "

B : " $N=n$ ".

2. En déduire la loi de X. $\sum_{n \geq k} \mathbb{P}[X=k, N=n]$

$$\mathbb{P}_X[X=k] = \sum_{n \geq k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k! \, (n-k)!}$$

formule des probabilité totale.

Probabilité qu'il y ait k oeufs éclos, ne connaissant pas encore le nombre d'oeufs pondus n.

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{\lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{\lambda^k [\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \underbrace{\sum_{m \geq 0} \frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}}_{e^{\lambda(1-p)}} = \frac{e^{-\cancel{\lambda}+\cancel{\lambda}-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}.$$

$$= \boxed{\frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}}$$

Donc X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 3 :

Un dé équilibré est lancé n fois de suite. Soient les événements A_i = "*on obtient 1 au i-ème lancer*", et B_i = "*on obtient 2 au i-ème lancer*". Soient alors les v.a.r. $X_i = 1_{A_i}$ et $Y_i = 1_{B_i}$.

1. Quelles sont les lois de X_i et Y_i ?

Loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$

(deux possibilités : on obtient un 1 au ième lancer ou non).

2. Exprimer les v.a. X et Y représentant respectivement le nombre de fois où on a obtenu 1 et le nombre de fois où on a obtenu 2 sur les n lancers, en fonction des v.a.r. X_i et Y_i. En déduire leurs lois.

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$

nombre de fois où on a obtenu 1

$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$

3. Calculer $\rho(X,Y)$. Interpréter sa valeur et son signe.

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}$$

$$\mathbb{E}[X] = np.$$

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = \frac{5n}{36}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{5n}{36}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \underbrace{\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]}_{\frac{n^2}{36}}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_i Y_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{36}$$

$$= \frac{n(n-1)}{36}$$

Soit $i \in [1, n]$

$j \in [1, n]$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on a obtenu 1 au } i^e \text{ lancer} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{——— 2 au } j^e \text{ lancer} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X_i Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si on a obtenu 1 au } i^e \text{ lancer et 2 au } j^e \text{ lancer} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X_i Y_j = 1] = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X_i Y_j = 0] = \begin{cases} \frac{35}{36} & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X_i Y_j] = \begin{cases} 1 \times \frac{1}{36} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{n(n-1)}{36} - \frac{n^2}{36}$$

$$= -\frac{n}{36}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{-n}{36} \times \frac{36}{5n} = -\frac{1}{5}$$

Donc le nombre de 1 que l'on obtient est négativement corrélé avec le nombre de 2.