Petit résumé des TD de probas

Félix Castillon — 3IF INSA Lyon

avril 2019

Jouons un peu : *alea* en latin et *az zahr* en arabe : le dé.
Romain Bondil

Martin m'a fait remarquer à juste titre qu'on écrivait pas grand chose au tableau sur les corrections des TD de probas. Du coup je fais un petit document avec quelques rappels de cours et la correction de chaque exo.

Il y a très certainement des coquilles qui trainent, n'hésitez pas à m'en faire part pour que je les corrige. Et si vous avez des questions ou des doutes vous pouvez m'envoyer un mail sur mon adresse INSA je vous répondrais au mieux !

1 TD1 - dénombrement et probabilités élémentaires

Exercice 1
On appelle main tout ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.
1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant :
(a) au moins 1 pique ?
(b) au plus 1 pique ?
(c) exactement 1 as et contenant au plus 2 piques ?

On va être amené à utiliser les coefficients binomiaux (vous savez les k parmi n là) du coup petit rappel :
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$, on définit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}$, ce qui correspond au nombre de manières de choisir k éléments parmi un ensemble qui en contient n.
2-3 formules utiles : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (penser au triangle de Pascal), $\binom{n}{0} = 1$ et pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} = n$. Maintenant attaquons l'exo !

1. Pour former une main, on doit choisir 13 cartes parmi les 52 disponibles, donc il existe $\binom{52}{13}$ mains (pour les curieux(ses) ça fait 635013559600, aka 6,3...$\times 10^{12}$).

2. (a) Là il vaut mieux réfléchir sur l'événement contraire. Avoir au moins un pique c'est exactement le contraire de avoir aucun pique. Donc on peut prendre toutes les mains possibles et soustraire celles qui n'ont aucun pique.
Pour n'avoir aucun pique, on doit choisir les 13 cartes parmi les 39 non piques, donc on a un total de $\binom{52}{13}-\binom{39}{13}$ mains possibles. (et cette fois ça fait $626891134156 = 6,\ldots\times 10^{11}$)

(b) On a deux possibilités pour avoir au plus un pique : en avoir un ou en avoir zéro. Pour en avoir zéro, on choisit 13 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des piques et pour en avoir un, on doit choisir un pique parmi les 13 disponibles et 12 non piques parmi les 39 non piques.
Donc au total on a $\binom{39}{13}+\binom{13}{1}\times\binom{39}{12} = 58962792112 = 5,\ldots\times 10^{11}$
Vous pouvez écrire 13 à la place de $\binom{13}{1}$, je l'ai juste fait pour rendre la correction plus claire.

(c) Bon celui là il est chiant on est d'accord.
Le truc tordu c'est qu'il faut penser à distinguer le cas où l'as est un pique et le cas où ça n'en est pas un.
Du coup, si l'as est l'as de pique, on doit choisir 0 ou 1 autre pique parmi les 12 piques restants, et 12 ou 11 cartes parmi les 39 cartes non piques, ce qui donne $\binom{12}{0}\times\binom{39}{12}$ et $\binom{12}{1}\times\binom{39}{11}$ possibilités, c'est à dire $\binom{39}{12}$ et $12\times\binom{39}{11}$ possibilités.
Donc on a finalement $\binom{39}{12}+12\times\binom{39}{11}$ mains avec l'as de pique et au plus deux piques.
Si maintenant l'as est d'une autre couleur, il faut choisir cette couleur (trois chois), puis on doit choisir 0, 1 ou 2 piques parmi les 13 disponibles, et 12, 11 ou 10 cartes parmi les 38 non pique restants.
Ca donne donc $\binom{13}{0}\times\binom{38}{12}$, $\binom{13}{1}\times\binom{38}{11}$ et $\binom{13}{2}\times\binom{38}{10}$ possibilités, c'est à dire $\binom{38}{12}$, $13\times\binom{38}{11}$ et $\binom{13}{2}\times\binom{38}{10}$ possibilités.
Donc au total, on a $3\left[\binom{38}{12}+13\times\binom{38}{11}+\binom{13}{2}\times\binom{38}{10}\right]$ mains contenant un as non pique et au plus deux piques (pour rappel le 3 vient du fait qu'on a trois chois pour cet as : cœur, trèfle et carreau).
Donc finalement, il existe $\binom{39}{12}+12\times\binom{39}{11}+3\left[\binom{38}{12}+13\times\binom{38}{11}+\binom{13}{2}\times\binom{38}{10}\right]$ mains contenant exactement un as et au plus trois piques.

Mais au fait Jamy, c'est quoi un espace probabilisé ?

Un espace probabilisé c'est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ω est l'ensemble des possibles, l'ensemble de toutes les *configurations* qui peuvent apparaitre.
Si par exemple je l'intéresse au résultat d'un dé à 20 faces, $\Omega = [\![1, 20]\!]$. Si je m'intéresse au score d'un match de foot sans tirs au but, $\Omega = \mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples d'entiers naturels.

Maintenant on va s'intéresser aux parties de Ω (aux sous ensembles de Ω si vous préférez). Les parties de Ω représentent les *événements*, à ne pas confondre avec les *configurations*.
Un événement est donc un *ensemble* de configurations qui satisfont une certaine propriété.
Par exemple je peux considérer l'événement A : "le résultat de mon dé vaut 4", ou l'événement B : "le match de foot est un match nul". On a alors $A = \{4\}$ et $B = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tq $i = j\}$. Attention A vaut bien $\{4\}$ et non pas 4. A est un *ensemble*.
Cool maintenant que j'ai les événement, je peux calculer leur probabilité !
Non.
En fait non. Quand on commence à flirter avec l'infini, on peut pas toujours attribuer une probabilité à tout le monde.

On doit se contenter de probabiliser seulement certains événements que l'on rassemble dans une *tribu* $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ représente donc l'ensemble des événements auxquels je vais pouvoir attribuer une probabilité, c'est donc une partie de l'ensemble des parties de Ω.

Mais alors Jamy, comment je fais pour choisir les événements que je mets dans $\mathcal{A}$?

Déjà je veux quand même donner une probabilité à Ω l'événement certain et au vide l'événement impossible. Donc
(1) : $\Omega \in \mathcal{A}$ et $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Ensuite, quand je m'intéresse à un événement A, j'ai aussi envie de pouvoir envisager son événement contraire $\Omega \setminus A$, qu'on note aussi A^c ou encore $\overline{A}$. Donc
(2) : $\forall A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.

Et enfin quand j'ai une famille dénombrable d'événements $(A_n)_{n \in N}$, j'ai envie de pouvoir envisager leur union. Donc

(3) : Pour toute famille $(A_n)_{n \in N}$ de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Définition : Une tribu sur Ω est une partie des parties de Ω qui vérifie (1) (2) et (3).

C'est clair ? Cool maintenant vous pouvez oublier cette définition, vu que de toute façon elle sert à rien.

Non mais plus sérieusement, retenez juste que $\mathcal{A}$ c'est l'ensemble dans lequel on range tous les événement auxquels on peut donner une probabilité, et que quand Ω est infini, on a pas toujours tout le monde.
Après je vous rassure, les événement qu'on peut pas probabiliser, c'est à ma connaissance des cas dégénérés qu'on construit avec des histoires sordides d'axiome du choix [1], alors vous pouvez considérer que à l'INSA, tous les événements que vous serez amené à manipuler auront une probabilité.

Mais du coup Jamy, c'est quoi exactement une probabilité ?

Une fois qu'on a un espace Ω muni d'une tribu $\mathcal{A}$, on peut le probabiliser en posant dessus une probabilité P.
P est une application de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ qui à chaque événement que j'ai décidé de probabiliser associe sa probabilité.
P doit quand même vérifier deux choses :
(1) : $P(\Omega) = 1$
(2) : Pour toute famille $(A_n)_{n\in N}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles [2],
$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Exemple : l'équiprobabilité sur un ensemble fini Ω définie par $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

1. Ceux(celles) que ça intéresse, je vous recommande chaleureusement d'aller regarder la vidéo youtube de El Jj sur le théorème de Banach-Tarski. Et plus généralement toutes les vidéos de cette chaine.
2. C'est à dire $\forall i, j \in \mathbb{N}$ tq $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

On a bien $P(\Omega) = \dfrac{card(\Omega)}{card(\Omega)} = 1$.
Pour la condition (2), on a un nombre fini d'événements, donc on peut considérer une famille finie d'événements. Or si $A_1, A_2 ... A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles, alors $card\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} card(A_i)$. Donc on a bien $P\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i)$.

Quand la probabilité n'est pas précisée, ça veut dire implicitement qu'on considère la probabilité uniforme.

Exercice 2
Jacques dit à Paul : "si j'ai une chance sur six d'obtenir un six en lançant un d'é, alors je double mes chances en le lançant deux fois". Jacques a t-il raison ? Pourquoi ? (Construire un modèle probabiliste et traduire la question posée en termes de calcul de la probabilité d'un événement.)

On a une chance sur six d'obtenir six avec un dé cubique équilibré, quelle est la probabilité d'en obtenir (au moins) un en en lançant deux ? Construisons un modèle probabiliste comme demandé dans l'énoncé.
L'univers Ω est l'ensemble de tous les résultats qu'on peut obtenir en lançant deux dés, c'est à dire $[\![1, 6]\!]^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3) ..., (6,5), (6,6)\}$ de cardinal 36. et P est l'équiprobabilité.
On considère l'événement A : "au moins un des deux dés fait 6". On a $A = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$, donc A contient 11 élément. Donc $P(A) = \dfrac{11}{36} < \dfrac{1}{3}$. Donc Jacques a tort.

Certains pensent parfois que A a 12 éléments en en comptant 6 avec un 6 sur le premier dé et 6 avec un 6 sur le second dé, mais en faisant comme ça on compte deux fois la configuration $(6,6)$, on a donc bien seulement 11 éléments dans A.

Exercice 3
Le prince de Toscane demande un jour à Galilée : pourquoi lorsqu'on jette 2 dés obtient-on plus souvent la somme 7 que la somme 6, bien que ces deux sommes soient obtenues de trois façons différentes ? [3]
(Même indication.)

En reprenant le même modèle probabiliste que ci dessus, pour obtenir 7, on a six façons différentes : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) et (6, 1) ; mais seulement cinq pour obtenir 6 : (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) et (5, 1).
On a en effet trois façons d'écrire 6 et 7 comme une somme de deux entiers supérieurs à 1, mais contrairement aux autres, l'écriture $6 = 3 + 3$ ne peut s'obtenir que d'une manière

3. On connait ce problème sous le nom de paradoxe du prince de Toscane. La version de base considère trois dés et la probabilité d'obtenir 9 ou 10.

aux dés.

Exercice 4

Dans un groupe de n personnes, quelle est la probabilité pour que les anniversaires de deux au moins d'entre elles tombent le même jour ? A partir de combien de personnes cette probabilité dépasse-t-elle $\frac{1}{2}$? (On ne tient pas compte des années bissextiles.)

Déjà commençons par définir le modèle probabiliste. Ω est l'ensemble des dates d'anniversaire possibles pour les n personnes, donc $\Omega = [\![1, 365]\!]^n$ et $card(\Omega) = 365^n$.
Avant de compter quoi que ce soit, on voit que si $n > 365$ il est impossible d'avoir n anniversaires tous différents. Dans la suite on va donc supposer $n \leq 365$.
Ensuite, comme pour l'exo 1.2.(a) on va raisonner sur l'événement contraire et on va compter les configurations où les n personnes sont toutes nées des jours différents. Pour construire un groupe de n personnes avec des anniversaires tous différents, j'ai 365 chois possibles pour la première personne, puis seulement 364 pour la suivante, puis 363 pour la suivante etc... Donc au final, on a un nombre de configurations égal à $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(365 - i)$.
Donc la probabilité d'avoir n anniversaires différents vaut $\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(365-i)}{365^n}$.
Donc la probabilité d'avoir au moins deux personnes nées le même jour vaut $1 - \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(365-i)}{365^n}$ si $n \leq 365$ et 1 sinon.
Ensuite on donne tout ça manger à son langage de programmation préféré (Caml light perso) et on se rend compte que la probabilité dépasse 50% à partir de $n = 23$, et pour les curieux(ses), elle dépasse 75% à partir de 32 ; 90% à partir de 41 et 99% à partir de 57. Et pourtant 57 c'est quand même assez peu comparé à 365...

Exercice 5

Dans un paquet de papillotes, il y a 50 papillotes, dont 20 sont des pâtes de fruit, 20 sont au chocolat noir et 10 au chocolat au lait. Je pioche au hasard 4 papillotes. Quelle est la probabilité d'avoir 2 papillotes au chocolat au lait ? Combien en moyenne vais-je piocher de chocolat au lait ?

L'énoncé est un peu ambigu, on sait pas trop si "avoir 2 papillotes au chocolat au lait" veut dire "au moins 2" ou "exactement 2". En maths on interprétera plutôt ça comme "au moins 2".
Cet exo est en fait la même chose que le premier en plus simple.
Déjà regardons l'univers : on a quatre tirages sans remise, donc un total de $\binom{50}{4} = 230300$ tirages possibles.
Pour avoir au moins deux papillotes au chocolat au lait, on doit choisir 2 papillotes au chocolat au lait parmi les 10, et 2 papillotes parmi les 40 autres, ou 3 papillotes au chocolat au lait parmi les 10 et 1 parmi les 40 autres ou 4 papillotes au chocolat au lait parmi

les 10 et 0 parmi les 40 autres.
Donc le nombre total de possibilités vaut $\binom{10}{2} \times \binom{40}{2} + \binom{10}{3} \times \binom{40}{1} + \binom{10}{4} \times \binom{40}{0} = 40110$.
Donc la probabilité d'avoir au moins deux papillotes au chocolat au lait vaut $\frac{40110}{230300} = 0,174$ environ.
Et pour calculer le nombre de chocolat au lait qu'on a en moyenne, il suffit d'appliquer la formule de l'espérance pour une variable aléatoire discrète, c'est à dire la somme des valeurs possibles multipliées par leur probabilité d'apparition. (Vous inquiétez pas on aura l'occasion d'en reparler dans quelques TD.)

En clair, si j'appelle A_k l'événement "avoir exactement k papillotes au chocolat au lait" pour k variant de 0 à 4 (attention à pas oublier 0, même si ça changera pas le résultat), la moyenne ici vaut

$$0 \times P(A_0) + 1 \times P(A_1) + 2 \times P(A_2) + 3 \times P(A_3) + 4 \times P(A_4)$$

$$= P(A_1) + 2 \times P(A_2) + 3 \times P(A_3) + 4 \times P(A_4)$$

$$= \frac{1}{\binom{50}{4}} \left[\binom{10}{1} \times \binom{40}{3} + 2 \times \binom{10}{2} \times \binom{40}{2} + 3 \times \binom{10}{3} \times \binom{40}{1} + 4 \times \binom{10}{4} \times \binom{40}{0} \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{50}{4}} \left[10 \times \binom{40}{3} + 2 \times \binom{10}{2} \times \binom{40}{2} + 3 \times \binom{10}{3} \times 40 + 4 \times \binom{10}{4} \right]$$

$$= \frac{184240}{230300}$$

$$= \frac{4}{5} = 0,8.$$

2 TD2 - probabilités conditionnelles

Exercice 1
Une famille a deux enfants (consécutivement). Quelle est la probabilité que ce soient deux garçons, sachant que le premier est un garçon ? Quelle est la probabilité que ce soient deux garçons sachant que l'un des deux au moins est un garçon ?

Petit rappel : si A et B sont deux événements avec $P(B) > 0$, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Si le premier enfant est un garçon, pour avoir deux garçons il faut et il suffit que le deuxième soit un garçon, on a donc une probabilité $\dfrac{1}{2}$.
Si on fait ça avec la formule du dessus, soient A : "les enfants sont deux garçons" et B : "le premier enfant est un garçon". $A \cap B$ est donc "les enfants sont deux garçons et le premier est un garçon" c'est à dire "les enfants sont deux garçons" [4] On a donc
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$.

Deuxième situation : On sait que l'un des deux enfants est un garçon, *mais on ne sait pas lequel* (toute la subtilité de l'exo est là dedans).
A ne change pas, mais cette fois B est "l'un des deux enfants est un garçon", donc $A \cap B$ reste "les enfants sont deux garçons".
D'autre part, B revient à "ne pas avoir deux filles" donc $P(B) = \dfrac{3}{4}$. On a donc
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2
Soient A, B et C les événements correspondant au lancer de deux pièces équilibrées et distinguables suivants :
A : "La première pièce est tombée sur pile",
B : "La deuxième pièce est tombée sur pile",
C : "Les deux pièces sont tombées sur des faces différentes".
Montrer que A, B et C sont deux a deux indépendants. Sont-ils (mutuellement) indépendants ?

Rappel : Deux événement d'un même espace probabilisé A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, et n événements d'un même espace probabilisé $A_1, A_2, ...A_n$ sont (mutuellement) indépendants ssi pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$
En plus clair : si je prends certains A_i parmi les n que j'ai à ma disposition (par exemple A_2, A_4 et A_9), la probabilité de leur intersection vaut toujours le produit de leurs probabilités.
Conséquence : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. La réci-

4. En effet, si les deux enfants sont des garçons, le premier est forcément un garçon

proque est en revanche fausse (et l'exo en est un contre exemple).

Calculons toutes les probabilités dont on va avoir besoin.
Pour un lancé de deux pièces, on notera deux lettres à la suite : P pour pile et F pour face. par exemple on notera PF pour "la première pièce fait pile et la deuxième face".
$P(A) = \frac{1}{2}$
$P(B) = \frac{1}{2}$
$P(C) = \frac{1}{2}$ on a deux configurations : PF et FP sur les quatre possibles.
$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ la seule configuration est PP
$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$ la seule configuration est PF
$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ la seule configuration est FP
$P(A \cap B \cap C) = 0$ il est impossible d'avoir des faces différentes et d'avoir PP

Donc on a bien $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ et $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, donc A, B et C sont deux à deux indépendants.
En revanche, $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$ donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 3 (DS 2000)
Un entrepôt est muni d'un dispositif d'alarme. Lorsqu'il y a tentative de cambriolage, le dispositif se déclenche avec une probabilité égale à $0,99$. Lorsqu'il n'y a pas de tentative de cambriolage, le dispositif se déclenche tout de même par erreur au cours d'une journée avec une probabilité égale à $0,01$. En supposant qu'une tentative de cambriolage au cours d'une journée ait lieu avec une probabilité égale à $0,001$, quelle est la probabilité qu'une alarme déclenchée un jour donné le soit par une tentative de cambriolage ?
On notera D l'événement "l'alarme se déclenche" et T l'événement "il y a une tentative de cambriolage", le tout considéré au cours de la journée donnée.

L'énoncé demande ici de calculer la probabilité qu'il y ait un cambriolage sachant que l'alarme s'est déclenchée, i.e. $P(T|D)$. On va utiliser la formule de Bayes.

Rappel : Dans un espace probabilisé (Ω, P), une famille d'événements $(A_1, A_2, ...A_n)$ est une partition de Ω (on dit aussi système complet d'événements) si $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Formule de Bayes : Pour $(A_1, A_2, ...A_n)$ une partition de Ω, B un événement de probabilité non nulle et $k \in [\![1,n]\!]$, on a $P(A_k|B) = \dfrac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$ [5]

Retour à l'exo : T et $\overline{T}$ forment une partition de Ω, donc $P(T|D) = \dfrac{P(T)P(D|T)}{P(T)P(D|T)+P(\overline{T})P(D|\overline{T})}$
Ca tombe bien l'exo nous donne $P(D|T) = 0,99$, $P(D|\overline{T}) = 0,01$ et $P(T) = 0,001$ et on en déduit $P(\overline{T}) = 0,999$.
Donc $P(T|D) = \dfrac{0,001 \times 0,99}{0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,01} = 0,0902$ environ.

Exercice 4 (DS 2017)
On s'intéresse au report des voix dans le cadre du deuxième tour d'une élection à scrutin majoritaire à deux tours. Supposons qu'il y avait 4 candidats au premier tour, A, B, C et D. Les scores des candidats au premier tour sont 35% pour A, 25% pour B, 20% pour C et 20% pour D parmi les suffrages exprimés. 23% des votants se sont abstenus. Les candidats C et D ont été éliminés lors du premier tour de l'élection. Parmi l'électorat de C du premier tour,
— 75% voteront pour A au second tour,
— 20% voteront pour B au second tour,
— 5% s'abstiendront.
Parmi l'électorat de D du premier tour,
— 50% voteront pour A au second tour,
— 15% voteront pour B au second tour,
— 35% s'abstiendront.

On suppose que les personnes ayant voté pour A et pour B au premier tour ne changeront pas d'avis et ne s'abstiendront pas lors du second tour. On suppose également que les personnes s'étant abstenues au premier tour n'iront pas voter au second.

1. Si je prends un bulletin pour A au second tour, quelle est la probabilité qu'il ait été déposé par quelqu'un ayant voté pour C au premier tour ?
2. Qui va gagner l'élection ?
3. Quel sera le taux d'abstention au second tour ?

Tout l'exo est une histoire de calcul de proportions. Notons n le nombre d'électeurs qui ne se sont pas abstenu au premier tour.

1. le nombre de voies pour A au premier tour est $0,35 \times n$. Au second tour, on rajoute $0,2 \times 0,75 \times n$ voies venant des électeurs de C et $0,2 \times 0,5 \times n$ voies venant des électeurs de D.
Donc la probabilité qu'un bulletin pour A au second tour vienne d'un électeur de C au premier tour vaut

5. La formule reste vraie si on affaiblit les hypothèses en considérant $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable avec $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$ et pour $i,j \in I, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = 0$

$$\frac{0,2 \times 0,75 \times n}{0,35 \times n + 0,2 \times 0,75 \times n + 0,2 \times 0,5 \times n} = \frac{0,2 \times 0,75}{0,35 + 0,2 \times 0,75 + 0,2 \times 0,5} = 0,25$$

2. On a vu que au second tour, on a $0,35\times n+0,2\times 0,75\times n+0,2\times 0,5\times n = 0,6\times n$ voies pour A. Avec le même raisonnement, on détermine $0,2\times n+0,2\times 0,2\times n+0,2\times 0,15\times n = 0,27 \times n$ voies pour B. C'est donc A qui remporte l'élection (et même assez largement).

3. Notons N le nombre total d'électeurs. On a alors $n = 0,77 \times N$
Au premier tour, $0,23\times N$ personnes s'abstiennent. Au second tour, $0,77\times 0,2\times 0,05\times N$ personnes qui avaient voté pour C au premier tour s'abstiennent, et $0,77\times 0,2\times 0,35\times N$ personnes qui avaient voté pour D au premier tour s'abstiennent.
Donc le taux d'abstention au second tour vaut $0,23+0,77\times 0,2\times 0,05+0,77\times 0,2\times 0,35$ $= 0,29$ environ.

3 TD 3 - Variables aléatoires discrètes

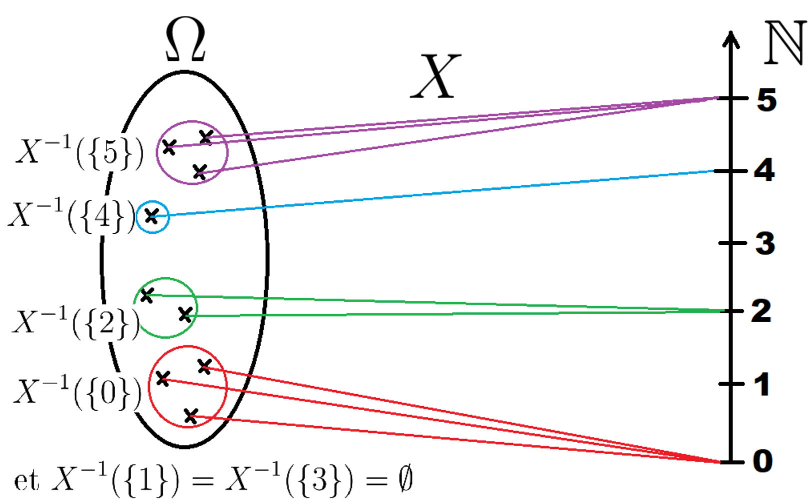
Mais dis moi Jamy, c'est quoi une variable aléatoire ?

Formellement pour deux espaces probabilisables $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$, une variable aléatoire X est une application (une fonction si vous préférez) de Ω dans Ω' telle que $\forall E \in \mathcal{A}', X^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Je sais c'est pas du tout intuitif dit comme ça, mais c'est la définition du poly. On va tacher de la clarifier.

Déjà pour l'instant on est sur des variables discrètes, c'est à dire que Ω' est fini ou dénombrable, et dans environ 100% des cas $\Omega' = \mathbb{N}$ et $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (aka l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$).

Du coup disons qu'une variable aléatoire discrète c'est une application X de Ω dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{A}$. Petit rappel : $\mathcal{A}$ c'est l'ensemble des événements auxquels je peux donner une probabilité.

Du coup une variable aléatoire discrète, c'est une application de Ω dans $\mathbb{N}$ qui est telle que si je prends un n dans $\mathbb{N}$, je peux donner une probabilité à l'ensemble des ω de Ω qui s'envoient sur n. Ok avec un dessin ce sera plus parlant [6].



Ici par exemple si X est une variable aléatoire discrète, on peut donner une probabilité aux événements rouges, verts, bleu et violets (et au passage je peux aussi donner une probabilité au vide, mais ça c'est toujours le cas). A partir de maintenant, on va juste noter vad pour variable aléatoire discrète.

6. Ce truc immonde a été réalisé sur paint par quelqu'un qui ne connait que ça et LibreOffice en terme de logiciel de dessin. Si l'un(e) d'entre vous touche à Photoshop, Illustrator ou autre et veut apporter sa pierre à l'édifice, je suis pas contre une image qui représente la même chose mais en bien fait.

Par commodité, on note $(X = n)$ pour $X^{-1}(\{n\})$. $(X = n)$ correspond donc à l'événement "Le ω que j'ai pris dans Ω vérifie $X(\omega) = n$". Comme X est une variable aléatoire, on peut s'intéresser à $P(X = n)$.

On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X. Par exemple ici $X(\Omega) = \{0, 2, 4, 5\}$.

On appelle loi de X l'ensemble des $P(X = n)$ pour $n \in X(\Omega)$. Quand une question vous dit "déterminer la loi de X", vous devez déterminer toutes les valeurs que peut prendre X, puis la probabilité que X prenne chacune de ces valeurs.

Par exemple ici, la loi de X est :
$X(\Omega) = \{0, 2, 4, 5\}$
$P(X = 0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
$P(X = 2) = \frac{2}{9}$
$P(X = 4) = \frac{1}{9}$
$P(X = 5) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

On a quelques lois de référence qui apparaissent souvent. Comme par exemple la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ notée $\mathcal{U}_n$. On dit que X suit une loi, et on note $X \sim$ loi (par exemple $X \sim \mathcal{U}_n$ pour "X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$").

Vous avez un catalogue de ces lois à la fin du poly. Le plus dur est de comprendre dans quelle situation on utilise laquelle. Je vous fais un récap des cinq principales, mais la dernière est moins importante.

Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ $\mathcal{U}_n$
C'est juste l'équiprobabilité sur $[\![1, n]\!]$, $\mathcal{U}_{52}$ représente par exemple un tirage au hasard dans un jeu de cartes.

Loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0, 1[$ $\mathcal{B}(p)$
On appelle épreuve de Bernouilli de paramètre p une expérience qui réussi avec probabilité p et échoue avec probabilité $1 - p$. Par exemple faire 1 avec un dé est une épreuve de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{6}$.
La loi de Bernouilli modélise une épreuve de Bernouilli et vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$ $\mathcal{B}(n, p)$
Elle modélise le nombre de réussites au cours de n épreuves de Bernouilli indépendantes de même paramètre p.
Si par exemple je lance 10 fois un dé, le nombre de 6 que j'obtiens en tout suit une loi

binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{6}$.

Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ $\mathcal{G}(p)$
Elle modélise le nombre de tentatives nécessaires pour réussir une épreuve de Bernouilli de même paramètre p.
Si par exemple je lance un dé jusqu'à obtenir 6, le nombre de lancés que je vais faire suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ $\mathcal{P}(\lambda)$
Celle là est un peu particulière, je pense qu'on vous demandera jamais de la reconnaitre.
Si on observe un phénomène physique et qu'en moyenne, ce phénomène se produit λ fois en T secondes, le nombre de fois qu'il va se produire sur un intervalle de temps donné de longueur T suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Si par exemple je sais que chaque jour, en moyenne 10 000 personnes naissent en France, alors le nombre de naissances un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 10 000.
Selon mon prof de maths de l'année dernière, le seul phénomène que cette loi modélise bien c'est la désintégration d'un atome radioactif.

Mais Jamy entre nous, si elle est juste là pour donner un autre nom à des événements, elle sert pas à grand chose ta variable aléatoire...

C'est vrai ce serait triste que ça serve qu'à ça, c'est pour ça qu'on s'intéresse aussi à l'espérance et à la variance d'une vad.

L'espérance représente la valeur moyenne d'une variable aléatoire. On la définit par $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$.

Par exemple sur l'exemple de ce paragraphe, on a
$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{23}{9}$.

Propriété :
l'espérance est linéaire, c'est à dire que pour X et Y des vad et a et b des réels, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (et c'est plus compliqué à montrer que ce que ça en a l'air).

Théorème de transfert :
Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et une vad X, $E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k)$
Par exemple, $E(4^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} 4^k P(X = k)$ Vous verrez ça va être utile dans pas longtemps.

La variance d'une variable aléatoire représente l'écart moyen entre les différentes valeurs prises par la vad. On la définit par $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
Sous cette forme c'est un peu compliqué à utiliser. Heureusement on a la formule de

Koening-Huygens qui dit $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, tout de suite plus abordable.

Sur notre exemple ça donne ça :
$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + 5^2 \times \frac{1}{3}$ (Merci le théorème de transfert)
$= \frac{99}{9} = 11$
Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 11 - \frac{23^2}{9^2} = \frac{362}{81}$

Propriété :
pour X une vad et a et b des réels, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

L'espérance et la variance d'une vad ne dépend que de sa loi. C'est à dire que deux vad qui suivent la même loi ont la même espérance et la même variance. Vous trouverez à la fin du poly un récap des espérances et variances des lois de référence.

Exercice 1
Un minibus-navette peut recevoir jusqu'à 5 passagers par voyage. La compagnie de transport accepte au maximum 6 réservations par voyage, chaque passager devant avoir une réservation.
L'expérience antérieure a permis d'évaluer que 25% des personnes effectuant une réservation ne se présentent pas au départ du voyage. Tous les passagers sont supposés agir indépendamment les uns des autres. On suppose que 6 réservations ont été faites.
1. Quelle est la probabilité qu'au moins un passager ayant réservé ne se présente pas au départ ?
2. Quel est le nombre moyen de passagers se présentant au départ ?
3. Quel est le nombre moyen de personnes transportées ?

1. On va s'intéresser à la probabilité que les six passagers se présentent au départ. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers qui se présentent. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(6, 0.75)$.
Donc $P(X = 6) = \binom{6}{6} \times 0,75^6 \times 0,25^0 = 0,75^6$.
Donc la probabilité d'avoir au moins un absent est $1 - 0,75^6 = 0,82$.
Bon ici c'est un peu overkill d'aller chercher une variable aléatoire on s'en sort très bien sans.

2. Le nombre moyen de passagers correspond à l'espérance de X. Or l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ vaut np, donc ici $E(X) = 6 \times 0,75 = 4,5$.
Donc en moyenne, $4,5$ passagers se présentent au départ.

3. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes transportées.
Y suit presque la même loi que X. Si six personnes se présentent, seulement cinq sont transportées.

Donc formellement, pour $i \in [\![0,4]\!]$, $(Y=i)=(X=i)$ et $(Y=5)=(X=5)\cup(X=6)$.
De plus $(X=5)\cap(X=6)=\emptyset$ donc $P(Y=5)=P(X=5)+P(X=6)$.
Donc $E(Y)=P(Y=1)+2P(Y=2)+3P(Y=3)+4P(Y=4)+5P(Y=5)$
$=P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)+5P(X=5)+5P(X=6)$
$=E(X)-P(X=6)$
$=4,5-0,75^6$
$=4,32$
Donc en moyenne, le bus transporte 3,68 passagers.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda>0$,c'est-à-dire telle que

$$P(X=k)=C(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

Cette loi est utilisée notamment pour modéliser les phénomènes de files d'attentes, par exemple X est le nombre de requêtes sur un serveur informatique par minutes. [7]
1. Expliciter $C(\lambda)$ en fonction de λ.
2. Calculer la fonction génératrice de X, $G_X(s)=E(s^X)$.
3. En remarquant que $G'_X(1)=E(X)$ et que $G''_X(1)=E(X(X-1))$, en déduire $E(X)$ puis $V(X)$.

1. P est une probabilité, donc $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)=1$.
Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)=1$.
Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}=1$.
Donc $\displaystyle C(\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1$.
Donc $C(\lambda)\ e^{\lambda}=1$.
Donc $C(\lambda)=e^{-\lambda}$.

2. En cours on a définit la fonction génératrice d'une vad X par $\displaystyle G_X(s)=E(s^X)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)s^k$. Au passage, la deuxième égalité vient du théorème de transfert.

7. L'énoncé oublie de le préciser, pour une loi de Poisson, $X(\Omega)=\mathbb{N}$

Donc ici $G_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$.

3. Dans le cas général, G_X est ce qu'on appelle une fonction développable en série entière.
Je vais passer la théorie sous le tapi, mais sous certaines hypothèses qui sont vérifiées dans le cas des fonctions génératrices, on peut dériver cette fonction en dérivant simplement les termes de la somme[8].

Donc pour une vad X, on a
$G'_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)s^{k-1}$ et $G''_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(X = k)s^{k-2}$
Donc $G'_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)1^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = E(X)$.
Et $G''_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(X = k)1^{k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(X = k)$
Donc par théorème de transfert, $G''_X(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$.
Donc $E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$.
Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Retour à l'exo, si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$, donc $G'_X(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$ et $G''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$.
Donc $E(X) = G'_X(1) = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda$.
Et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 e^{\lambda(1-1)} + \lambda e^{\lambda(1-1)} - (\lambda e^{\lambda(1-1)})^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.
Donc $E(X) = V(X) = \lambda$. Amusant non ?

Exercice 3

On cherche à analyser le résultat d'un problème d'optimisation. Le programme de résolution a un probabilité p de converger vers la valeur cherchée.
On note X le nombre d'essais nécessaires pour obtenir m succès. On suppose que les essais sont indépendants.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ déterminer la probabilité que $X = k$. Quel est le nombre moyen d'essais à effectuer pour obtenir m succès ?

Si on a besoin de k tentatives pour réussir m expériences, on a fait m succès et $k - m$ échecs. Ensuite, la dernière expérience est forcément un succès puisqu'on s'arrête après avoir fait m succès. Reste donc à répartir les $m - 1$ autres succès parmi les $k - 1$ autres expériences, on a donc $\binom{k-1}{m-1}$ possibilités.

8. Pour ceux(celles) qui se demandent pourquoi c'est pas évident, ce qui pose problème c'est que la somme est infinie, mais ne rentrons pas dans les détails.

Donc finalement $P(X=k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$.

Pour le nombre moyen d'essais, on calcule $E(X)$.
Pour faire m succès, il faut au moins m tentatives, et le nombre de tentatives nécessaire peut être arbitrairement grand. Donc $X(\Omega) = [\![m, +\infty]\!]$, donc la somme dans l'espérance va aller de m à $+\infty$.
$E(X) = \sum_{k=m}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=m}^{+\infty} k \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$

Mais ici on peut s'en sortir sans avoir à calculer cette somme immonde, en remarquant que X, c'est "m lois géométriques qui se suivent".

Imaginons qu'on lance notre programme une infinité de fois consécutives et qu'on note X_n la variable aléatoire qui donne le rang du n-eme succès. la vad X définie par l'énoncé est donc X_m.

L'intérêt de considérer ces X_n c'est que pour $k \geq 2$, $X_k - X_{k-1}$ suit une loi géométrique de paramètre p, en effet, $X_k - X_{k-1}$ est le nombre de tentatives nécessaires pour avoir un nouveau succès [9]. Et d'autre part, X_1 elle aussi suit une loi géométrique de paramètre p.

Et le trick c'est que $X_m = X_m - X_{m-1} + X_{m-1} - X_{m-2} + X_{m-2} - ... - X_2 + X_2 - X_1 + X_1$ c'est à dire $X_m = X_1 + \sum_{k=2}^{m} X_k - X_{k-1}$
Donc X_m est la somme de m vad qui suivent toutes la même loi géométrique de paramètre p. Or l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p c'est $\frac{1}{p}$, donc par additivité de l'espérance, $E(X_m) = m \times \frac{1}{p} = \frac{m}{p}$.

Cette loi est la loi de Pascal, elle est avec les autres à la fin du poly.

Exercice 4
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1; 0; 1\}$ telle que $P(X=-1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, et $P(X=1) = \frac{1}{6}$. Proposer un algorithme de simulation de X. On supposera qu'on sait simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1]$.

Il suffit de découper $[0,1]$ en trois intervalles de longueurs $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$, et faire trois cas. Voici un algorithme en pseudo code :

```
1. Tirer un flottant aléatoire f entre 0 et 1
2. Si f < 1 / 3, renvoyer -1
```

9. On pourrait montrer ça proprement mais c'est pas la peine

```
3. Si f < 1 / 3 + 1 / 2, renvoyer 0
4. Sinon renvoyer 1
```

Les inégalités peuvent être larges ou strictes ça n'a pas d'importance.