Probabilités – 3 IF

TD 3 : Variables aléatoires discrètes.

16h

Rappel de cours

On considère un univers Ω discret avec une distribution de probabilité $\mathbb{P}$. Une **variable aléatoire discrète** X sur Ω est une fonction

$$\begin{aligned} X : \Omega \to & \mathbb{N} \text{ "entiere"} \\ & \mathbb{R} \text{ "reelle"} \\ & E \text{ "qualitative"} \end{aligned}$$

Elle permet d'écrire plus efficacement des événements, on note "$X = k$" l'événement

$$X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$$

L'espérance d'une variable aléatoire X correspond à la valeur moyenne obtenue pour un grand nombre de tirages indépendants. On la calcule en pondérant les valeurs possibles de X par leur probabilité :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k \mathbb{P}[X = k] \cdot k$$

La variance de X est l'écart moyen à l'espérance pour un grand nombre de tirages indépendants. On la calcule comme un espérance :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\ &= \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X^2] \end{aligned}$$

16h10

Exercice 1 :

Un minibus-navette peut recevoir jusqu'à 5 passagers par voyage. La compagnie de transport accepte au maximum 6 réservations par voyage, chaque passager devant avoir une réservation. L'expérience antérieure a permis d'évaluer que 25 % des personnes effectuant une réservation ne se présentent pas au départ du voyage. Tous les passagers sont supposés agir indépendamment les uns des autres.

On suppose que 6 réservations ont été faites.

16h20

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un passager ayant réservé ne se présente pas au départ ? (10')

Pour chaque passager, deux possibilités : $\{P, A\}$, $\mathbb{P}[P] = 0.75$.

→ expérience de Bernoulli, de paramètres $p = 0.75$.

$\Omega = \{P, A\}^6$, on note X le nombre de passagers présents au départ. 6 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre 0.75

X suit une loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(6, 0.75)$.

$\mathbb{P}[X < 6] = 1 - \mathbb{P}[X = 6] = 1 - 0.75^6 = \underline{0.82}$

16h30

2. Quel est le nombre moyen de passagers se présentant au départ ? (1')

$X \sim \mathcal{B}(6, 0.75)$ donc $\mathbb{E}[X] = 6 \times 0.75 = \underline{4,5}$

16h35 3. Quel est le nombre moyen de personnes transportées ? (5')

On note Y le nombre de personnes transportées.

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq 5 \\ 5 & \text{si } X = 6 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \mathbb{P}[Y=k] = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \mathbb{P}[X=k] + 5 \cdot \mathbb{P}[X=6]$$

$$= \mathbb{E}[X] - \mathbb{P}[X=6]$$

$$= 4.5 - 0.18$$

$$= 4.32$$

16h45 **Exercice 2 :**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $P(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, c'est-à-dire telle que

$$\mathbb{P}[X = k] = C(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

Cette loi est utilisée notamment pour modéliser les phénomènes de files d'attentes, par exemple X est le nombre de requêtes sur un serveur informatique par minutes.

16h50 1. Expliciter $C(\lambda)$ en fonction de λ.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[X=k] = 1 \quad \text{donc} \quad C(\lambda) \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^\lambda} = 1$$

$$\text{et} \quad C(\lambda) = e^{-\lambda}.$$

16h55 2. Calculer la fonction génératrice de X, $G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right]$. (5')

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}[X=k]\, s^k$$

$$= \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k s^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \times \underbrace{\sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda s)^k}{k!}}_{= e^{\lambda s}}$$

$$= e^{\lambda(s-1)}$$

17h 3. En remarquant que $G'_X(1) = \mathbb{E}[X]$ et que $G''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)]$, en déduire $\mathbb{E}[X]$ puis $\mathrm{Var}[X]$.

$$G'_X(s) = \lambda e^{\lambda s} \times e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda(s-1)} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X] = \lambda$$

$$G''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = \lambda^2$$

donc $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$= (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2$

$= \lambda$

17^h05 **Exercice 3 :**

On cherche à analyser le résultat d'un problème d'optimisation. Le programme de résolution a un probabilité p de converger vers la valeur cherchée. On note X le nombre d'essais nécessaires pour obtenir m succès. On suppose que les essais sont indépendants.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ déterminer la probabilité que $X = k$. Quel est le nombre moyen d'essais à effectuer pour obtenir m succès ?

17^h10 Pour $k < m$: $\mathbb{P}[X = k] = 0$.

$k \geq m$:

	S	E	E	S	S	....	E	S
tent.	1.	2.	3.	4.	5.	...	k-1.	k
succès	1.			2.	3.	...		m.

→ proba : $\underbrace{\mathbb{P}[E]}_{(1-p)}^{k-m} \times \underbrace{\mathbb{P}[S]}_{p}^{m}$

nombre de séquence : $\binom{k-1}{m-1}$ (la dernière tentative est forcément un succès).

d'où $\mathbb{P}[X = k] = \binom{k-1}{m-1}(1-p)^{k-m} p^m$.

X suit une loi de Pascal de paramètres (m, p).

$\mathbb{E}[X] = \dfrac{m(1-p)}{p}$.

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que $\mathbb{P}[X = -1] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{6}$. Proposer un algorithme de simulation de X. On supposera qu'on sait simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Soit $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Posons $f : [0;1] \to \{-1, 0, 1\}$ et $X = f \circ Y$.

$$y \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } y \in [0; \frac{1}{3}[\\ 0 & \text{si } y \in [\frac{1}{3}, \frac{5}{6}[\\ 1 & \text{si } y \in [\frac{5}{6}; 1] \end{cases}$$

Alors $\mathbb{P}[X = -1] = \mathbb{P}[Y \in [0; \frac{1}{3}[] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{6}$.

D'où :

1. $y \leftarrow$ rand $([0;1])$.
2. si $y < 1/3$: $x \leftarrow -1$
3. si $\frac{1}{3} \leq y < \frac{5}{6}$: $x \leftarrow 0$
4. si $\frac{5}{6} \leq y \leq 1$: $x \leftarrow 1$
5. return x.