Probabilités – 3 IF

TD 5: Lois conditionnelles - cas discret

Rappel de cours

I. Couple de variables aléatoires

DEF

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y sur un espace de probabilité (Ω, \mathbb{P}) .

- La **loi jointe** du couple (X,Y) est définie par $\forall,i,j\in\mathbb{N},\mathbb{P}[X=i\land Y=j]$
- Étant donné $j \in \mathbb{N}$, la **loi conditionnelle** de X sachant que Y=j est définie par $\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X=i \mid Y=j].$

PROP (Formule des probabilités totales)

$$orall i\in\mathbb{N}, \underbrace{\mathbb{P}[X=i]} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[X=i \wedge Y=j]$$
 limate in marginale

DEF

On dit que X et Y sont **indépendantes** ssi :

$$orall i,j\in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X=i\wedge Y=j]=\mathbb{P}[X=i]\cdot \mathbb{P}[Y=j]$$

II. Corrélation

dans ce cas,
$$P[X=i]Y=j]=P[X=i]$$

DEF

On appelle **covariance** du couple (X,Y) la quantité $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, en la normalisant on obtient la **corrélation** de (X,Y):

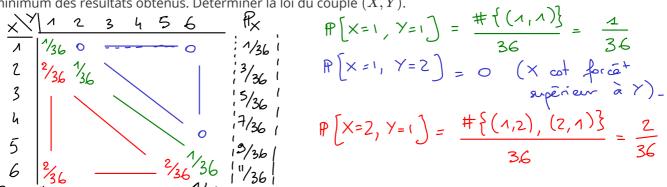
$$\boxed{\rho(X,Y)} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}} \in [-1,1]$$

PROP

- Var(X) = Cov(X, X)
- Si X et Y sont indépendantes, $\rho(X,Y)=0$.
- $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Var}(Y)$

Exercice 1:

On jette deux dés équilibrés. On désigne respectivement par X et par Y le maximum et le minimum des résultats obtenus. Déterminer la loi du couple (X,Y).



définition indépendance
$$\forall i,j \quad P[x=i, Y=j] = P[x=i] P[x-j]$$

Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

$$P_{X}[X=1, Y=2] = 0 \neq P[X=1]P[Y=2]$$

$$P_{X}[X=1] = \frac{1}{36}$$

$$P_{X}[Y=2] = \frac{9}{36}$$
indépendantes -

Exercice 2:

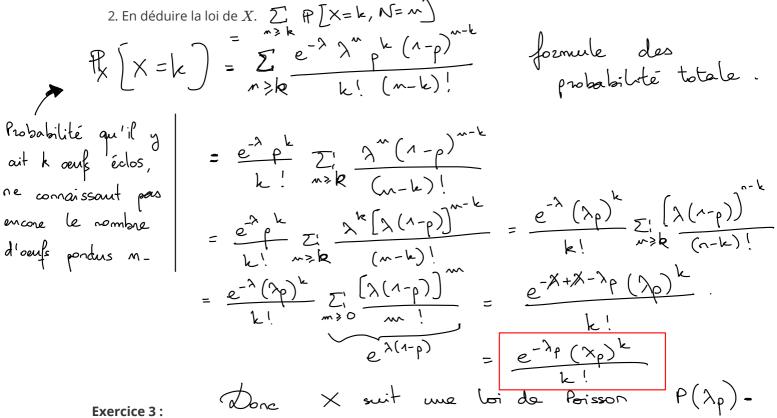
On suppose que le nombre N d'œufs pondus par un batracien suit une loi de Poisson de paramètre λ . De plus, on suppose également que les œufs pondus ont une évolution indépendante les uns des autres, et que chaque œuf a une probabilité p d'arriver à éclosion. On note X le nombre d'œuf éclos.

1. Déterminer la loi du couple aléatoire
$$(X, N)$$
.

$$\mathbb{P}[N=n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n}}{n!} \quad \text{(loi de Poisson } \mathcal{P}(\lambda)) = S'i\mathcal{P}_{\lambda} \quad \text{an oeufs pondus, } \times \text{ suit une to binomiale } \mathcal{B}(M, p)$$

$$\mathbb{P}[X=k \mid N=n] = \binom{n}{k} p^{k} (\lambda-p)^{n-k} \quad \text{pour } k \in [0:n] = \mathbb{P}[X=k \mid N=n] \quad \mathbb{P}[N=n] \quad \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n}}{n!} \binom{n}{k} p^{k} (\lambda-p)^{n-k} \quad \mathbb{P}[X=k] = \mathbb{P}[X=k]$$



Un dé équilibré est lancé n fois de suite. Soient les événements A_i = "on obtient 1 au i-ème lancer", et B_i = "on obtient 2 au i-ème lancer". Soient alors les v.a.r. $X_i=1_{A_i}$ et $Y_i=1_{B_i}$.

1. Quelles sont les lois de X_i et Y_i ?

doi de Bernoulli de paramètre
$$p = \frac{1}{6}$$

(deux possibilités : on obtient un 1 au jeune lancer ou non).

2. Exprimer les v.a. X et Y représentant respectivement le nombre de fois où on a obtenu 1 et le nombre de fois où on a obtenu 2 sur les n lancers, en fonction des v.a.r. X_i et Y_i . En déduire leurs lois.

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
 suit une $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{B}(N, \frac{1}{6})$ nombre de $fors$ $\mathcal{B}(N, \frac{1}{6})$ où on a obtenu 1

3. Calculer $\rho(X,Y)$. Interpréter sa valeur et son signe.

$$P(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Vor(X)Vor(Y)}}$$

$$\forall x = mp.$$

$$\forall x (x) = mp (n-p)$$

$$= \frac{5m}{36}$$

$$\forall x (y) = \frac{5m}{36}$$

$$G_{V}(X,Y) = E[XY] - E[X] E[Y]$$

$$\frac{M^{2}}{36}$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}\mathbf{y}] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{y}_{j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[\mathbf{x}_{i}\mathbf{y}_{j}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{36}$$

$$= \frac{n(n-1)}{36}$$

$$Cov\left(X,Y\right) = \frac{N(N-1)}{36} - \frac{N^2}{36}$$
$$= -\frac{N}{36}$$

$$P(X,Y) = \frac{-m}{36} \times \frac{36}{5m} = \frac{1}{5}$$

Soit
$$i \in [1, N]$$
 $j \in [1, N]$
 $j \in [1, N$

Donc le nombre de 1 que l'on obtient est régativement connête avec le nombre de 2.