

Ejercicio n°1:

$$\cdot X = \{A, T, G, C\}^N$$

$$P : (x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \mapsto \sum_{(t_1, t_2, t_3) \in \{A, T, G, C\}^N} \left( \sum_{k=0}^{N-3} \prod_{l=0}^k (x_{k+l+1} = t_1, \dots) \right) \\ (\text{"" con "y"}).$$

$$\text{Alas } P : (x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \mapsto \sum_{\substack{(t_1, t_2, t_3) \\ \in \{A, T, G, C\}^N}} \phi_{t_1, t_2, t_3}(x) \times \phi_{t_1, t_2, t_3}(y)$$

$$= \langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{on } \phi(z) = \begin{pmatrix} \phi_{A,A,A}(z) \\ \phi_{A,A,T}(z) \\ \vdots \\ \phi_{c,c,c}(z) \end{pmatrix}.$$

$X = \mathbb{R}$ ,  $\forall x, y \in X, K(x, y) = \cos(x - y)$

$$\begin{aligned} \forall x, y, \cos(x - y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc le noyau est symétrique positif.

•  $X = \mathbb{R}$ ,  $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui est symétrique.

C'est faux en général.

par exemple  $K: \begin{cases} 0,0 \mapsto 0 \\ 1,1 \mapsto 0 \\ 0,1 \mapsto 1 \\ 1,0 \mapsto 1 \end{cases}$

Alors  $\begin{pmatrix} K(0,0) & K(0,1) \\ K(1,0) & K(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

dont le déterminant vaut  $-1$ . Cette matrice symétrique a donc au moins une valeur propre négative. Elle n'est donc pas positive.

•  $X = \mathbb{R}_{\geq 0}^2 (-1,1)$ ,  $\forall x, y \in X$ ,  $K(x, y) = 1 / (1 - xy)$

$$\forall x, y \in (-1, 1), K(x, y) = \frac{1}{1 - xy} = \sum_{n=0}^{+\infty} (xy)^n$$

Gr,  $x, y \mapsto xy = \langle x, y \rangle_m$  est symétrique positif.

donc  $x, y \mapsto (xy)^n$  est symétrique positif  $\forall n \geq 1$  par opérations de produit

et aussi,  $x, y \mapsto \frac{1}{1 - xy}$  est symétrique positif (immédiat)

done, par passage à la limite simple,

$$x, y \mapsto \sum_{i=1}^n (\lambda_i x)^{\alpha_i} \text{ est symétrique positif.}$$

done  $\kappa$  est symétrique positif.

$X = \Gamma, \forall A, B \in X, \kappa(A, B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$

Sait  $A_1, \dots, A_n \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \kappa(A_i, A_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j (P(A_i \cap A_j) - P(A_i)P(A_j))$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j (E(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_j}) - E(\mathbb{1}_{A_i}) E(\mathbb{1}_{A_j}))$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j E(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_j}) - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j E(\mathbb{1}_{A_i}) E(\mathbb{1}_{A_j})$$

$$= E\left(\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_j}\right) - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j E(\mathbb{1}_{A_i}) E(\mathbb{1}_{A_j})$$

$$= E\left(\left(\sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}\right)^2\right) - \left(E\left(\sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}\right)\right)^2$$

$$= \text{Var}\left(\sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}\right)$$

$$\geq 0.$$

Done  $\kappa$  est symétrique positif.

$X = \mathbb{M}_+$ ,  $\forall x, y \in X, K(x, y) = \min(x, y)$

$$\forall x, y \in \mathbb{M}_+, \min(x, y) = \int_{\mathbb{M}_+} \mathbb{1}_{[0, x]} \mathbb{1}_{[0, y]}$$

$$= \left\langle \frac{\mathbb{1}_{[0, x]}}{\|\mathbb{1}_{[0, x]}\|}, \frac{\mathbb{1}_{[0, y]}}{\|\mathbb{1}_{[0, y]}\|} \right\rangle_{L^2(\mathbb{M}_+)}$$

$X = \mathbb{N}_+, \forall x, y \in X, K(x, y) = \text{pgcd}(x, y)$

Soit  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  l'ensemble des nombres premiers énuméré par ordre croissant.

Alors,  $\forall x, y, \text{pgcd}(x, y) = \cancel{\min(v_{p_1}(x), v_{p_1}(y))} \times \cancel{\min(v_{p_2}(x), v_{p_2}(y))} \times \dots$

$$= p_1 \times p_2 \times \dots$$

d'après la question précédente et par composition à gauche,

$x, y \mapsto \min(v_p(x), v_p(y))$  est symétrique

par rapport pour tout nombre premier  $p$ .

donc, par passage à l'exponentielle (cf cours)

$$\min(v_p(x), v_p(y))$$

$x, y \mapsto p$   
est nombre premier  $p$ .

et symétrique positif pour

donc,  $\forall N$ ,  $x, y \mapsto \prod_{i=1}^N \min(p_i(x), v_{p_i}(y))$  est symétrique positif (par produit).

donc par passage à la limite simple,

$x, y \mapsto \text{pgcd}(x, y)$  est symétrique positif.

$\bullet X = N^*$ ,  $\forall x, y \in X$ ,  $K(x, y) = \frac{1}{\text{ppcm}(x, y)}$

$\forall x, y \in X$ ,  $\text{pgcd}(x, y) \text{ppcm}(x, y) = xy$ .

Alors  $\forall x, y \in X$ ,  $\text{ppcm}(x, y) = \frac{\text{pgcd}(x, y)}{xy}$ .

or  $x, y \mapsto \text{pgcd}(x, y)$  est symétrique positif  
d'après la question précédente.

Si nous prouvons que  $x, y \mapsto \frac{1}{xy}$  est

symétrique positif, nous aurons gagné.

or,  $\forall x, y \in X$ ,  $\frac{1}{xy} = \left\langle \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\rangle_M$

ce qui conclut la preuve.

Exercice 2:

1) Soit  $n \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_n \in X$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j P(x_i, x_j) &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle \quad (\text{par définition}) \\ &= \left\langle \sum_i \alpha_i \phi(x_i), \sum_j \alpha_j \phi(x_j) \right\rangle \quad (\text{bilinearité}) \\ &= \left\| \sum_i \alpha_i \phi(x_i) \right\|^2 \quad (\text{définition de } P \text{ norme}) \\ &\geq 0 \quad (\text{car carré toujours positif}). \end{aligned}$$

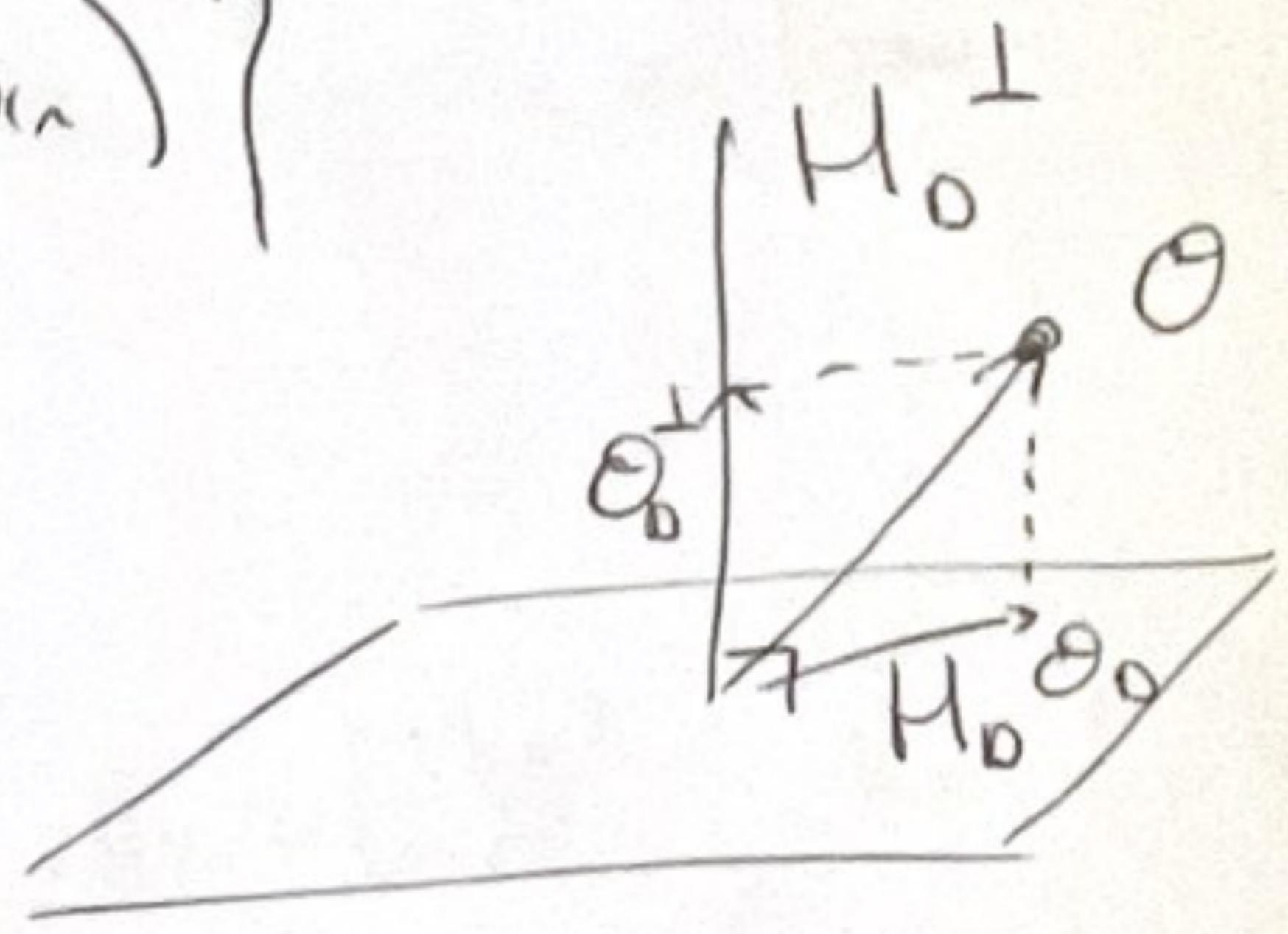
2) D'après le théorème d'Aronszajn, si  $P$  est un noyau symétrique positif, alors il existe un espace de Hilbert et  $\phi: X \rightarrow H$  tel que

$$\forall x_1, x_2 \in X, P(x_1, x_2) = \langle \phi(x_1), \phi(x_2) \rangle.$$

Donc  $P$  est un noyau pas un produit scalaire et une fonction  $\phi$  n'est pas restreinte, il y a équivalence entre les deux.

3) Notons  $H_0 = \text{Vect}\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\}$

Sat  $\theta \in H$ ,  $\theta = \theta_0 + \theta_0^\perp$   
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 $H_0 \quad H_0^\perp$



$$\text{Notons } M_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{1 - \gamma_n(\theta, \phi(x_i))}{1 + e^{-\gamma_n(\theta, \phi(x_i))}} \right) + \|\theta\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } M_n(\theta) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{1 - \gamma_n(\theta_0 + \theta_0^\perp, \phi(x_i))}{1 + e^{-\gamma_n(\theta_0 + \theta_0^\perp, \phi(x_i))}} \right) + \|\theta_0 + \theta_0^\perp\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\log \left( \frac{1 - \gamma_n(\theta_0, \phi(x_i)) - \gamma_n(\theta_0^\perp, \phi(x_i))}{1 + e^{-(\gamma_n(\theta_0, \phi(x_i)) + \gamma_n(\theta_0^\perp, \phi(x_i)))}} \right)}_{\text{par Pythagore}} + \underbrace{\|\theta_0\|^2 + \|\theta_0^\perp\|^2}_{\text{par Pythagore}}. \end{aligned}$$

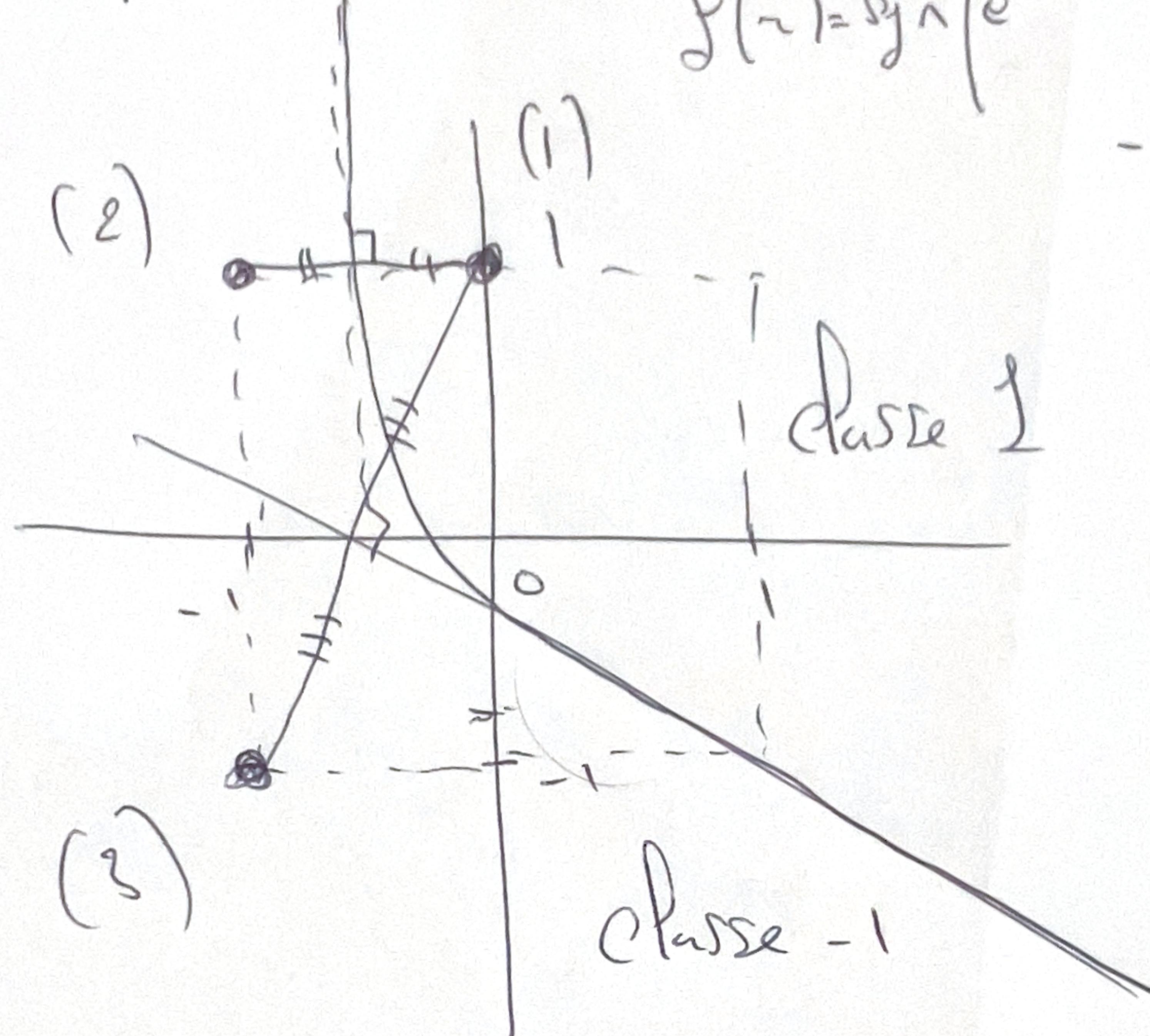
$$\text{or, } \forall i, \langle \theta_0^\perp, \phi(x_i) \rangle = 0 \text{ car } \theta_0^\perp \in \text{Vect}\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\}^\perp.$$

$$\text{donc } \boxed{M_n(\theta) = M_n(\theta_0) + \|\theta_0^\perp\|^2}$$

Une solution optimale (si elle existe) a donc une composante dans l'orthogonal de  $H_0$  nulle. On peut se restreindre à chercher dans  $H_0$ .

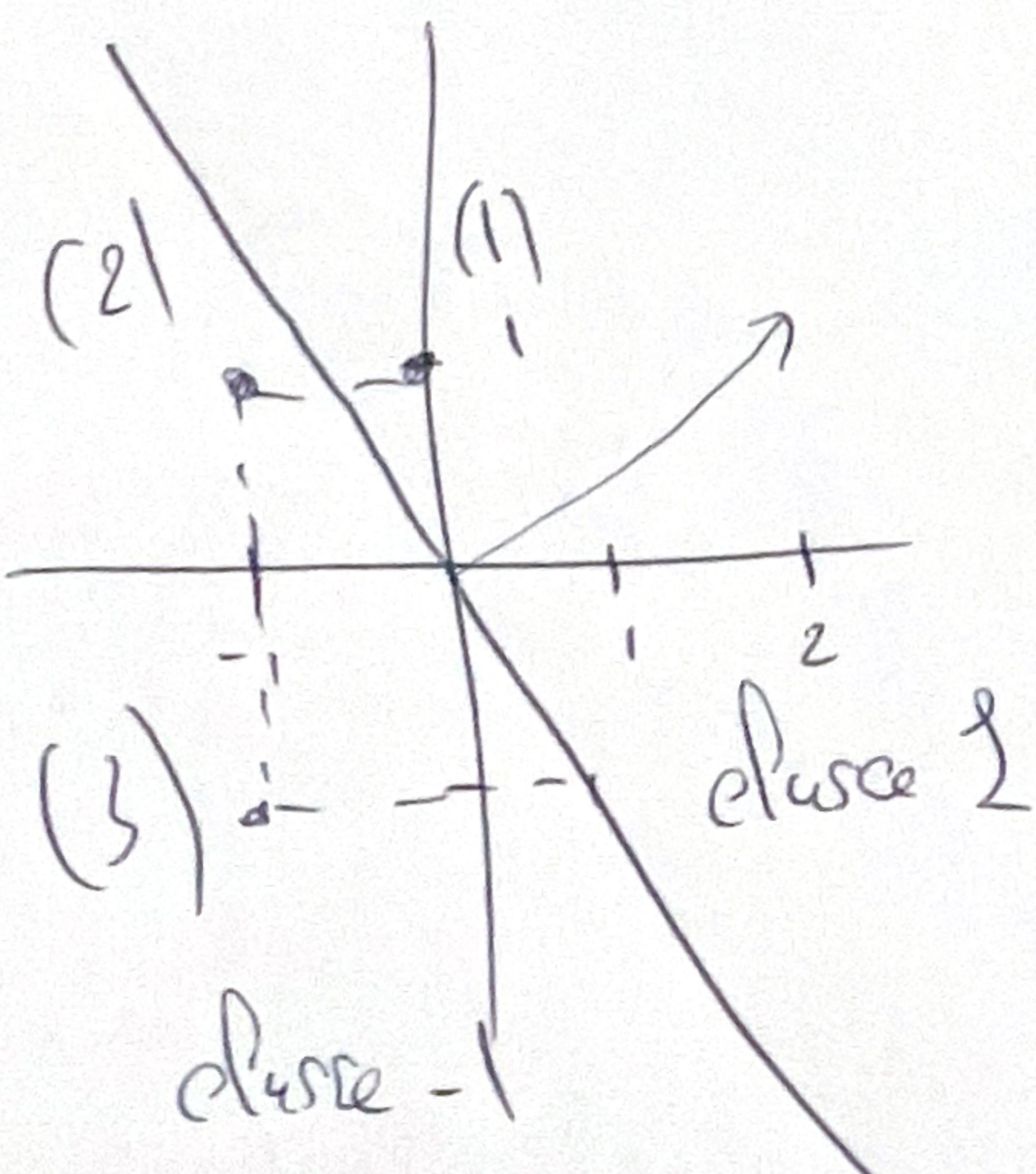
Sur  $H_2$ , le problème est portement convexe (grâce au terme  $\lambda \|\theta\|^2$ ). Il admet donc une unique solution.

a) (noyau exponentiel)



$$g(z) = \text{sgn} \left( e^{-\|x - (1)\|^2} - e^{-\|x - (2)\|^2} - e^{-\|x - (3)\|^2} \right)$$

(noyau linéaire)



$$\begin{aligned} p(z) &= \text{sgn} \left( \langle x, (1) \rangle - \langle x, (2) \rangle - \langle x, (3) \rangle \right) \\ &= \text{sgn} \left( x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

5) Changement de variables  $\mathcal{O} = \alpha_1 \phi(x_1) + \dots + \alpha_n \phi(x_n)$

$$\begin{aligned}
 M_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Pay} \left( 1 + \frac{-y_i (\sum_j \alpha_j \phi(x_j), \phi(x_i))}{1 + e^{-y_i (\sum_j \alpha_j \phi(x_j), \phi(x_i))}} \right) + \lambda \left\| \sum_j \alpha_j \phi(x_j) \right\|^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Pay} \left( 1 + \frac{-y_i (\sum_j \alpha_j \phi(x_j), \phi(x_i))}{1 + e^{-y_i (\sum_j \alpha_j \phi(x_j), \phi(x_i))}} \right) + \lambda \left( \sum_i \alpha_i \phi(x_i), \sum_j \alpha_j \phi(x_j) \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Pay} \left( 1 + \frac{-y_i (K\alpha)_i}{1 + e^{-y_i (K\alpha)_i}} \right) + \lambda \alpha^T K \alpha \\
 &\quad \text{où } K = \left( b(x_i, x_j) \right)_{i,j}.
 \end{aligned}$$

6) Il est possible de résoudre le problème par descente de gradient (stochastique).

IP peut être capable de calculer

$$\nabla_\alpha (\lambda \alpha^T K \alpha) \text{ et } \nabla_\alpha \left( \frac{-y_i (K\alpha)_i}{1 + e^{-y_i (K\alpha)_i}} \right) \forall i$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \circ \nabla_\alpha (\lambda \alpha^T K \alpha) &= 2 \lambda K \alpha \\
 \circ \nabla_\alpha \left( \frac{-y_i (K\alpha)_i}{1 + e^{-y_i (K\alpha)_i}} \right) &= \frac{-c}{1 + e^{-y_i (K\alpha)_i}} y_i \begin{pmatrix} (\phi(x_1), \phi(x_i)) \\ \vdots \\ (\phi(x_n), \phi(x_i)) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$