Université de Limoges
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Avril 2023

MASTER DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, PARCOURS ACSYON
PROCESSUS STOCHASTIQUES
Devoir de maison.
Cleque Marlain MBOULOU & Rami MECHI

Problème 1 .
Le cas a une période : de $N-1$ à N

1. Déduisons des équations :
D'après (1) :

$$V_N = h(S_N) \text{ avec } S_N = X_N S_{N-1} \text{ où } X_N \in \{1+d, 1+m\}$$

On a :

$$V_N = h(X_N S_{N-1})(*)$$

D'autre part d'après l'équation (2) :

$$V_N = \phi^0_{N-1} S^0_N + \phi_{N-1} S_N,$$
$$\text{or } S_N = X_N S_{N-1} \text{ et } S^0_N = (1+r)^N S^0_0 \text{ et } S^0_0 = \frac{S^0_{N-1}}{(1+r)^{N-1}}$$
$$\text{Donc } S_N = X_N S_{N-1} \text{ et } S^0_N = (1+r)^N \frac{S^0_{N-1}}{(1+r)^{N-1}} = (1+r) S^0_{N-1}$$

On a :

$$V_N = \phi^0_{N-1}(1+r) S^0_{N-1} + \phi_{N-1} X_N S_{N-1}(**)$$

Or $(*) = (**)$ et Pour $X_N \in \{1+d, 1+m\}$, on a :

$$\phi^0_{N-1}(1+r) S^0_{N-1} + \phi_{N-1} X_N S_{N-1} = h(X_N S_{N-1})$$

$$\begin{cases} \phi^0_{N-1}(1+r) S^0_{N-1} + \phi_{N-1}(1+m) S_{N-1} = h((1+m) S_{N-1}) \\ \phi^0_{N-1}(1+r) S^0_{N-1} + \phi_{N-1}(1+d) S_{N-1} = h((1+d) S_{N-1}) \end{cases}$$

2. Vérifions que $\phi_{N-1} = \varphi(N, S_{N-1})$
On a :

$$\varphi(N, S_{N-1}) = \frac{1}{S_{N-1}} \frac{v(N,(1+m)S_{N-1}) - v(N,(1+d)S_{N-1})}{m-d}(***)$$

Or :

$$v(N,(1+m)S_{N-1}) = h((1+m)S_{N-1}) \text{ et } v(N,(1+d)S_{N-1}) = h((1+d)S_{N-1})$$

On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} &h((1+m)S_{N-1}) - h((1+d)S_{N-1}) = \\ &\phi^0_{N-1}(1+r)S^0_{N-1} + \phi_{N-1}(1+m)S_{N-1} - \phi^0_{N-1}(1+r)S^0_{N-1} - \phi_{N-1}(1+d)S_{N-1} \\ &= \cancel{\phi^0_{N-1}(1+r)S^0_{N-1}} + \phi_{N-1}(1+m)S_{N-1} - \cancel{\phi^0_{N-1}(1+r)S^0_{N-1}} - \phi_{N-1}(1+d)S_{N-1}\phi \\ &= S_{N-1}(1+m-1-d)\phi_{N-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$v(N,(1+m)S_{N-1}) - v(N,(1+d)S_{N-1}) = S_{N-1}(m-d)\phi_{N-1}$$

Puis en remplaçons dans $(***)$ on a :

$$\varphi(N, S_{N-1}) = \frac{1}{\cancel{S_{N-1}}} \frac{\cancel{S_{N-1}(m-d)}\phi_{N-1}}{\cancel{m-d}}$$
$$\varphi(N, S_{N-1}) = \phi_{N-1}$$

3. Montrons que $V_{N-1} = v(N-1, S_{N-1}$

On a :

$$v(N-1, S_{N-1}) = (1+r)^{-N+N-1}\mathbb{E}^*(h(S_{N-1}\Pi_{k=N}^{N}X_k)$$

$$v(N-1, S_{N-1}) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(h(S_{N-1}X_N)$$

$$= (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(\phi_{N-1}^0(1+r)S_{N-1}^0 + \phi_{N-1}X_N S_{N-1})$$

(D'après la question 1)

$$= (1+r)^{-1}\phi_{N-1}^0(1+r)S_{N-1}^0 + (1+r)^{-1}\phi_{N-1}S_{N-1}((1+m)\mathbb{P}^*(X_N = 1+m) + (1+d)\mathbb{P}^*(X_N = 1+d)))$$
$$= \phi_{N-1}^0 S_{N-1}^0 + (1+r)^{-1}\phi_{N-1}S_{N-1}((1+m)\frac{r-d}{m-d} + (1+d)\frac{m-r}{m-d}))$$
$$= \phi_{N-1}^0 S_{N-1}^0 + (1+r)^{-1}\phi_{N-1}S_{N-1}(1-r)$$
$$= \phi_{N-1}^0 S_{N-1}^0 + \phi_{N-1}S_{N-1}$$
$$= V_{N-1}$$

On a :

$$v(N-1, S_{N-1}) = V_{N-1}$$

Le cas Général

4. Montrons que pour $n \in \{1 \dots N\}$:

$$v(n-1, s) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(v(n, sX_n))$$

On a :

$$v(n-1, s) = (1+r)^{-N+n-1}\mathbb{E}^*(h(s\Pi_{k=n}^{N}X_k))$$
$$v(n-1, s) = (1+r)^{-1}((1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(sX_n\Pi_{k=n+1}^{N}X_k)))$$
$$v(n-1, s) = (1+r)^{-1}(\mathbb{E}^*((1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(sX_n\Pi_{k=n+1}^{N}X_k))))$$

Or : $(1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(sX_n\Pi_{k=n+1}^{N}X_k))) = v(n, sX_n)$

On a :

$$v(n-1, s) = (1+r)^{-1}(\mathbb{E}^*(v(n, sX_n)))$$

5. * Montrons que :

$$V_n = v(n, S_n) \text{ et } \phi_n = \varphi(n+1, S_n)$$

On a :

$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(S_n\Pi_{i=n+1}^{N}X_k))$$
$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(S_nX_{n+1}\dots X_{N-1}X_N))$$
$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(S_{n+1}X_{n+2}\dots X_{N-1}X_N))$$
$$\dots$$
$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(S_{N-2}X_{N-1}X_N))$$
$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(S_{N-1}X_N))$$
$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(S_N))$$

Raisonnant par récurence :

Initialisation pour $n = N-1$:

$$(1+r)^{-N+N-1}\mathbb{E}^*(h(S_N)) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(h(S_N))V_{N-1}$$

(**D'après la question 3**)

Hérédité : Supposons que $V_K = v(k, S_k)$ au rang k et montrons que $V_{k+1} = v(k+1, S_{k+1})$ au rang $k+1$
On a :

$$V_k = \phi_k^0 S_k^0 + \phi_k S_k \Rightarrow \phi_k^0 = \frac{1}{S_k^0}(V_k - \phi_k S_k)$$

D'après l'équation 2 :

$$V_{k+1} = \phi_k^0 S_{k+1}^0 + \phi_k S_{k+1}$$

$$= \frac{1}{S_k^0}(V_k - \phi_k S_k) S_{k+1}^0 + \phi_k S_{k+1}$$

$$= \frac{1}{\cancel{(1+r)^k S_0^0}}((1+r)^{-N+k}\mathbb{E}^*(h(S_N)) - \phi_k S_k)(1+r)^{\cancel{k}+1}\cancel{S_0^0} + \phi_k S_{k+1}$$

$$= (1+r)^{-N+k+1}\mathbb{E}^*(h(S_N)) - \phi_k S_k(1+r) + \phi_k S_k X_k$$

$$= (1+r)^{-N+k+1}\mathbb{E}^*(h(S_N)) - \phi_k S_k(1+r) + \phi_k S_k((1+m)\mathbb{P}^*(X_k = 1+m) + (1+d)\mathbb{P}^*(X_k = 1+d))$$

$$= (1+r)^{-N+k+1}\mathbb{E}^*(h(S_N)) - \cancel{\phi_k S_k(1+r)} + \cancel{\phi_k S_k(1+r)}$$

$$= (1+r)^{-N+k+1}\mathbb{E}^*(h(S_N))$$

$$V_{k+1} = v(k+1, S_{k+1})$$

D'où : $V_n = v(n, S_n)$

** Montrons que $\phi_n = \varphi(n+1, S_n)$
on a :

$$\varphi(n+1, S_n) = \frac{1}{S_n}\frac{v(n+1,(1+m)S_n) - v(n+1,(1+d)S_n)}{m-d}$$

Or :

$$v(n+1,(1+m)S_n) = (1+r)^{-N+n+1}\mathbb{E}^*(h((1+m)S_{N-1}))$$

$$v(n+1,(1+m)S_n) = (1+r)^{-N+n+1}\mathbb{E}^*(\phi_{N-1}^0(1+r)S_{N-1}^0 + \phi_{N-1}(1+m)S_{N-1})$$

Et de même :

$$v(n+1,(1+d)S_n) = (1+r)^{-N+n+1}\mathbb{E}^*(h((1+d)S_{N-1}))$$

$$v(n+1,(1+d)S_n) = (1+r)^{-N+n+1}\mathbb{E}^*(\phi_{N-1}^0(1+r)S_{N-1}^0 + \phi_{N-1}(1+d)S_{N-1})$$

Donc :

$$v(n+1,(1+m)S_n) - v(n+1,(1+d)S_n) = (1+r)^{-N+n+1}\mathbb{E}^*(\phi_{N-1}(1+m)S_{N-1} - \phi_{N-1}(1+d)S_{N-1})$$

$$v(n+1,(1+m)S_n) - v(n+1,(1+d)S_n) = (1+r)^{-N+n+1}\mathbb{E}^*(\phi_{N-1}(m-d)S_{N-1})$$

D'où :

$$\varphi(n+1, S_n) = \frac{1}{S_n}(1+r)^{-N+n+1}\phi_{N-1}S_{N-1}$$

Raisonnant également par récurrence :
Initialisation pour $n = N-1$, on a :

$$\varphi(N, S_{N-1}) = \frac{1}{\cancel{S_{N-1}}}\cancel{(1+r)^{-N+N-1+1}}\phi_{N-1}\cancel{S_{N-1}} = \phi_{N-1}$$

Hérédité : Supposons que $\varphi(k, S_{k-1}) = \phi_{k-1}$ au rang k et montrons que $\varphi(k+1, S_k) = \phi_{k+1}$ au rang $k+1$
On a :

$$\varphi(k+1, S_k) = \frac{1}{S_k}(1+r)^{-N+k+1}\phi_{N-1}S_{N-1}$$
$$\varphi(k+1, S_k) = \frac{1+r}{X_k}(\frac{1}{S_{k-1}}(1+r)^{-N+k}\phi_{N-1}S_{N-1})$$
$$\varphi(k+1, S_k) = \frac{1+r}{X_k}\phi_{k-1}$$

Or on déduit de la première équation que :

$$\phi_{k-1} = \frac{1}{S_{k-1}}(V_{k-1} - \phi^0_{k-1}S^0_{k-1})$$

D'où :

$$\varphi(k+1, S_k) = \frac{1+r}{X_k S_{k-1}}(V_{k-1} - \phi^0_{k-1}S^0_{k-1})$$

Or d'après le premier item :

$$\begin{aligned} V_{k-1} &= (1+r)^{-N+k-1}\mathbb{E}^*(h(S_N)) \\ &= (1+r)^{-N+k}((1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(h(S_N))) \\ &= (1+r)^{-N+k}((1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(h(S_N))) \end{aligned}$$

6.*
** On a montrer dans la question précédente que :

$$V_n = v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n}\mathbb{E}^*(h(S_N))$$

Donc :

$$V_0 = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*(h(S_N))$$

Call et Put

7. Calculons $\mathbb{E}^*(\Pi_{k=n+1}^N X_k)$
Remarquons que : $X_k = \dfrac{S_k}{S_{K-1}}$, donc $X_{N-1}X_N = \dfrac{\cancel{S_{N-1}}}{S_{N-2}}\dfrac{S_N}{\cancel{S_{N-1}}} = \dfrac{S_N}{S_{N-2}}$
On a alors :

$$\mathbb{E}^*(\Pi_{k=n+1}^N X_k) = \mathbb{E}^*(\frac{\cancel{S_{n+1}}}{S_n}.\frac{\cancel{S_{n+2}}}{\cancel{S_{n+1}}}.\cancel{\cdots}.\frac{\cancel{S_{N-1}}}{S_{N-2}}\frac{S_N}{\cancel{S_{N-1}}})$$
$$\mathbb{E}^*(\Pi_{k=n+1}^N X_k) = \mathbb{E}^*(\frac{S_N}{S_n})$$

$= \mathbb{E}^*(\dfrac{S_N}{S_n}|X_N = 1+m, X_n = 1+m) + \mathbb{E}^*(\dfrac{S_N}{S_n}|X_N = 1+d, X_n = 1+m) + \mathbb{E}^*(\dfrac{S_N}{S_n}|X_N = 1+d, X_n = 1+d)$
$+\mathbb{E}^*(\dfrac{S_N}{S_n}|X_N = 1+m, X_n = 1+d) =$

8. Déduisons $\mathbb{E}^*(h(S_N))$
D'après **4.** :

$$v(N-1, S_{N-1}) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(v(N, S_{N-1}X_N)$$
$$v(N-1, S_{N-1}) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(v(N, S_N)$$
$$v(N-1, S_{N-1}) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*(h(S_N))$$

Donc :

$$\mathbb{E}^*(h(S_N)) = (1+r)v(N-1, S_{N-1})$$

$$\mathbb{E}^*(h(S_N)) = (1+r)V_{N-1}$$

Strategie autofinanc ´ ee de couverture correspondante :

$$\mathbb{E}^*(V_N) = \mathbb{E}^*((1+r)V_{N-1})$$

Donc :

$$V_N = (1+r)V_{N-1}$$

9.

10.

Problème 2

1. Montrons que $\mathbb{E}(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Montrons que $\mathbb{E}(f(X_{n+1}) = \mathbb{E}(f(X_n)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X_{n+1}) &= \sum_{x\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = x)f(x) \\ &= \sum_{x\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = x)f(x)\end{aligned}$$

(Par le théorème des probabilités totales .) $= \sum_{x\in S}(\sum_{y\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = x|X_n = y)\mathbb{P}(X_n = y))f(x)$

Comme la chaine de Markov est homogène :

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) = \sum_{x\in S}(\sum_{y\in S} p_{y,x}\mathbb{P}(X_n = y))f(x)$$

Puis en réorgainsant :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X_{n+1}) &= \sum_{y\in S}(\sum_{x\in S} p_{y,x}f(x))\mathbb{P}(X_n = y) \\ &= \sum_{y\in S} f(y)\mathbb{P}(X_n = y) \\ &= \mathbb{E}(f(X_n)\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(f(X_n)$ est contante.

2. Montrons en raisonnant par l'absurde que $f(x_0) \leq 0$
Supposons qu'il existe $x_0 \in S \setminus A$ tel que : $f(x_0) > 0$
On a :

$$f(x_0) = \sum_{y\in S} p_{y,x_0}f(y)$$

Posons $B = \{x \in S, f(x) > 0\}$, On a :

$$\begin{aligned}f(x_0) &= \sum_{y\in A} p_{y,x}f(y) + \sum_{y\in B} p_{y,x}f(y) + \sum_{y\in S\setminus(A\cup B)} p_{y,x}f(y) > 0 \\ f(x_0) &= 0 + \sum_{y\in B} p_{y,x}f(y) + \sum_{y\in S\setminus(A\cup B)} p_{y,x}f(y) > 0\end{aligned}$$

3. Montrons que pour tout (A, g), avec $A \subset S$, $A \neq \emptyset$, $A \neq S$ et $g : A \to \mathbb{R}$, le probleme de Dirichlet associé à (A, g) admet au plus une solution.
Supposons qui admet deux solutions $f, h : S \to \mathbb{R}$ distinctes, on a :

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{y\in S} p_{y,x}f(y) \\ h(x) = \sum_{y\in S} p_{y,x}h(y) \end{cases} \forall x \in S \setminus A \text{ et} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ h(x) = g(x) \end{cases} \forall x \in A$$

$$\begin{cases} k(x) = f(x) - h(x) = \sum_{y\in S} p_{y,x}(f(y) - h(y)), \forall x \in S \setminus A \\ k(x) = f(x) - h(x) = g(x) - g(x) = 0, \forall x \in A \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} k(x) = \sum_{y \in S} p_{y,x} k(y), \forall x \in S \setminus A \\ k(x) = 0, \forall x \in A \end{cases}$$

D'après la question précédente, $k(x) = 0 \; \forall x \in S$. Donc $f \equiv h$ ce qui est contradictoire.
Par conséquent, le probleme de Dirichlet associé à (A, g) admet au plus une solution.

4. Montrons que $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$.
Par l'absurde, supposons que $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) < 1$, C'est-à-dire la probabilité de visiter A en temps fini est nulle, la chaîne de Markov de visite jamais A. Donc elle reste dans $S \setminus A$.
.
Comme $P = (p_{x,y})$ est une matrice de transistion **irréductible**, il existe pour chaque paire d'états x et y dans un ensemble fini S, il existe une puissance positive k telle que le coefficient (x, y) de la matrice P^k est strictement positif. Donc la probabilité $p^k_{x,y}$ de passer de x a y en k étape est strictement positive.
.
Donc pour $x \in A$ et $y \in S \setminus A$, $p^k_{x,y} > 0$. Or la chaine de markov ne visite jamais A, elle reste dans $S \setminus A$ en au moins k étapes, ceci contrédit le fait que la probabilité de visiter A en temps fini est nulle.

Par conséquent $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$.

5.* Montrons que $f(x) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A})|X_0 = x)$ est bien definie.

D'après la question précédente, la chaîne de Markov visite A avec une probabilité de 1, donc il existe un instant fini τ_A tel que X_{τ_A} soit dans A. Donc la variable aléatoire $g(X_{\tau_1})$ est bien définie. De plus, comme $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$.
On a :

$$\mathbb{E}(g(X_{\tau_A})) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A})|\tau_A = \infty)\mathbb{P}(\tau_A = \infty) + \mathbb{E}(g(X_{\tau_A})|\tau_A < \infty)\mathbb{P}(\tau_A < \infty)$$

$$\mathbb{E}(g(X_{\tau_A})) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A})|\tau_A = \infty)$$

car $\mathbb{P}(\tau_A = \infty) = 0$ et $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$
Ce qui implique que $\mathbb{E}(g(X_{\tau_A})|X_0 = x)$ est bien défini pour tout x

** Montrer que $f(x) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A})|X_0 = x)$ est bien solution du problème de Dirichlet pour la paire (A, g)

Soit $x \in S$
- Si $x \in A$ On a : $f(x) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A})|X_0 = x) = \mathbb{E}(g(X_0)) = g(x)$, car $\tau_A = inf\{n \geq 0, X_n \in A\} = 0$

- Si $x \in S \setminus A$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{E}(g(X_{\tau_A})|X_0 = x) \\ &= \sum_{y \in S} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y|X_0 = x)g(y) \\ &= \sum_{y \in A} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y|X_0 = x)g(y) + \sum_{y \in S \setminus A} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y|X_0 = x)g(y) \\ &= \sum_{y \in A} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y|X_0 = x)f(y) + \mathbb{E}((g(X_{\tau_A})|X_0 = x)|X_1 \in S \setminus A) \end{aligned}$$

Par la formule de espérance totale :

$$f(x) = \sum_{y \in A} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y|X_0 = x)f(y) + \sum_{y \in S \setminus A} \mathbb{E}((g(X_{\tau_A})|X_0 = x)|X_1 \in S \setminus A)$$

Problème 3

1.* Montrons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$
On peut écrire :

$$X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$$

Comme X_0 est indépendant de $\xi_{n,m}$, X_1 depend de X_0, donc indépendant de $\xi_{n,m}$, de manière récurente $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendate des $\xi_{n,m}$. Donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$

* Déterminons sa matrice de transition.

$$\begin{aligned} P_{k,l} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = l|X_n = k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = \sum_{m=1}^{X_n} \xi_{n,m}|X_n = k) \end{aligned}$$

$= \mathbb{P}(X_{n+1} = \sum_{m=1}^{X_n} \xi_{n,m} = l | X_n = k)$

$= \mathbb{P}(l = \sum_{m=1}^{k} \xi_{n,m}) = \mu^{*k}(l)$ (où μ^{*k} designe la loi de la somme de k variables aleatoires indépendantes de loi μ)

$= \mathbb{P}(\sum_{m=1}^{k} l_m = \sum_{m=1}^{k} \xi_{n,m})$ (avec $\sum_{m=1}^{k} l_m = l$)

$= \sum_{l_1+\ldots+l_m=l, l_1,\ldots,l_m \geq 0} \mathbb{P}(l_1 = \xi_{n,1}, \ldots, l_m = \xi_{n,k})$

$= \sum_{l_1+\ldots+l_m=l, l_1,\ldots,l_m \geq 0} \mathbb{P}(l_1 = \xi_{n,1}) \ldots \mathbb{P}(l_m = \xi_{n,k})$ (Par indépendances des $\xi_{n,k}$)

$= \sum_{l_1+\ldots+l_m=l, l_1,\ldots,l_m \geq 0} \mu_{l_1} \ldots \mu_{l_m}$

D'où :

$$P_{k,l} = \sum_{l_1+\ldots+l_m=l, l_1,\ldots,l_m \geq 0} \mu_{l_1} \ldots \mu_{l_m} = \mu^{*k}(l)$$

2. En effet, si $X_n = 0$ pour un certain n, alors $X_{n+1} = 0$ car la somme vide est égale à 0. Ainsi, la probabilité de passer de l'état 0 à l'état 0 est de 1.
$P(0,0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1$
La chaîne n'est pas irréductible car elle possède un état absorbant. En effet pour tout état x non nul $P(0,x) = 0$
3. On sait que l'état 0 est absorbant, donc s'il est récurrent, il doit être récurrent positif car $P(0,0) = 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe un autre état récurrent x_1. On a :

   $\mathbb{P}(N_{x_1} = \infty | X_0 = x_1) = 1$

   Cela implique x_1 a au moins un enfant à la n-ième génération, donc donc la probabilitéé qu'il n'ait pas d'enfants à la n-ième génération est nulle, $\mathbb{P}(\xi_{n,x_1} = 0) = \mu(0) = 0$.

   Mais cela contredit l'hypothèse que $\mu(0) > 0$, ce qui signifie qu'il y a une probabilité non nulle qu'un individu n'ait pas d'enfant. Par conséquent, l'état 0 est le seul état récurrent de la chaîne.

   Montrons que $\mathbb{P}_1(\lim_{x\to\infty} X_n = \infty) + \mathbb{P}_1(\lim_{x\to\infty} X_n = 0) = 1$
   Puisque l'état 0 est le seul état récurrent, cela signifie que si la population atteint l'infini à l'infini, elle ne peut pas revenir à l'état 0 :

$$\mathbb{P}_1(\lim_{x\to\infty} X_n = \infty) = 1 - \mathbb{P}_1(\lim_{x\to\infty} X_n = 0)$$

   D'où :

$$\mathbb{P}_1(\lim_{x\to\infty} X_n = \infty) + \mathbb{P}_1(\lim_{x\to\infty} X_n = 0) = 1$$

4.

a. Montrons que $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k$

$G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_1 = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_1 = k | X_0 = 1) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(\xi_{0,1} = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k$

b. Montrons que $G_n(s) = (G_1 \circ \ldots \circ G_1)(s)$ n fois
Raisonnant pat récurrence :
Initialisation : $n = 1$ $G_1(s) = G_1(s)$
Hérédité : Supposons que $G_n(s) = (G_1 \circ \ldots \circ G_1)(s)$ n fois et montrons que $G_{n+1}(s) = (G_1 \circ \ldots \circ G_1)(s)$ $n+1$ fois.

$$
\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_{n+1}=k)s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_{n+1}=k|X_n=j)s^k \text{ \textbf{(Par la formule des probabilités totales)}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n=j)P_{j,k}s^k = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n=j)\sum_{k=0}^{\infty} P_{j,k}s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n=j)\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\ldots+k_m=k,k_1,\ldots,k_m\geq 0} \mu_{k_1}\ldots\mu_{k_j}\Big)s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n=j)\Big(\Big(\sum_{k_1=0}^{\infty}\mu(k_1)s_1^k\Big)\cdots\Big(\sum_{k_j=0}^{\infty}\mu(k_j)s_j^k\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Or :

$$(G_1(s))^j = \Big(\sum_{k_1=0}^{\infty}\mu(k_1)s_1^k\Big)\cdots\Big(\sum_{k_j=0}^{\infty}\mu(k_j)s_j^k\Big)$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n=j)(G_1(s))^j = G_n(G_1(s)) \\
&= (G_1\circ\ldots\circ G_1)(G_1(s)) \text{ \textbf{(n+1) fois}}
\end{aligned}
$$

D'où : $G_{n+1}(s) = (G_1\circ\ldots\circ G_1)$, $(n+1)$ fois.
Par conséquent, $G_n(s) = (G_1\circ\ldots\circ G_1)(s)$ n fois pouir tout $n\geq 1$

c. On a d'après $4.a$ que $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu(k)s^k$.

$$G_1^{'}(s) = \sum_{k=0}^{\infty}k\mu(k)s^{k-1} \Rightarrow G_1^{'}(1) = \sum_{k=0}^{\infty}k\mu(k) = m$$