

MASTER DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, PARCOURS ACSYON
PROCESSUS STOCHASTIQUES

Devoir de maison.
Cleque Marlain MBOULOU & Rami MECHI

Problème 1 .

Le cas a une période : de $N - 1$ à N

1. Déduisons des équations :

D'après (1) :

$$V_N = h(S_N) \text{ avec } S_N = X_N S_{N-1} \text{ où } X_N \in \{1 + d, 1 + m\}$$

On a :

$$V_N = h(X_N S_{N-1})(*)$$

D'autre part d'après l'équation (2) :

$$\begin{aligned} V_N &= \phi_{N-1}^0 S_N^0 + \phi_{N-1} S_N, \\ \text{or } S_N &= X_N S_{N-1} \text{ et } S_N^0 = (1+r)^N S_0^0 \text{ et } S_0^0 = \frac{S_{N-1}^0}{(1+r)^{N-1}} \\ \text{Donc } S_N &= X_N S_{N-1} \text{ et } S_N^0 = (1+r)^N \frac{S_{N-1}^0}{(1+r)^{N-1}} = (1+r) S_{N-1}^0 \end{aligned}$$

On a :

$$V_N = \phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} X_N S_{N-1} (**)$$

Or $(*) = (**)$ et Pour $X_N \in \{1 + d, 1 + m\}$, on a :

$$\begin{aligned} \phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} X_N S_{N-1} &= h(X_N S_{N-1}) \\ \begin{cases} \phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} (1+m) S_{N-1} &= h((1+m) S_{N-1}) \\ \phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} (1+d) S_{N-1} &= h((1+d) S_{N-1}) \end{cases} \end{aligned}$$

2. Vérifions que $\phi_{N-1} = \varphi(N, S_{N-1})$

On a :

$$\varphi(N, S_{N-1}) = \frac{1}{S_{N-1}} \frac{v(N, (1+m) S_{N-1}) - v(N, (1+d) S_{N-1})}{m-d} (***)$$

Or :

$$v(N, (1+m) S_{N-1}) = h((1+m) S_{N-1}) \text{ et } v(N, (1+d) S_{N-1}) = h((1+d) S_{N-1})$$

On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} h((1+m) S_{N-1}) - h((1+d) S_{N-1}) &= \\ \phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} (1+m) S_{N-1} - \phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 - \phi_{N-1} (1+d) S_{N-1} &= \\ = \cancel{\phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0} + \phi_{N-1} (1+m) S_{N-1} - \cancel{\phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0} - \phi_{N-1} (1+d) S_{N-1} \phi &= \\ = S_{N-1} (1+m-d) \phi_{N-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$v(N, (1+m) S_{N-1}) - v(N, (1+d) S_{N-1}) = S_{N-1} (m-d) \phi_{N-1}$$

Puis en remplaçons dans $(***)$ on a :

$$\varphi(N, S_{N-1}) = \frac{1}{S_{N-1}} \frac{S_{N-1}(m-d)\phi_{N-1}}{m-d}$$

$$\varphi(N, S_{N-1}) = \phi_{N-1}$$

3. Montrons que $V_{N-1} = v(N-1, S_{N-1})$

On a :

$$v(N-1, S_{N-1}) = (1+r)^{-N+N-1} \mathbb{E}^*(h(S_{N-1} \prod_{k=N}^N X_k))$$

$$v(N-1, S_{N-1}) = (1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(h(S_{N-1} X_N))$$

$$= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(\phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} X_N S_{N-1})$$

(D'après la question 1)

$$= (1+r)^{-1} \phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + (1+r)^{-1} \phi_{N-1} S_{N-1} ((1+m) \mathbb{P}^*(X_N = 1+m) + (1+d) \mathbb{P}^*(X_N = 1+d))$$

$$= \phi_{N-1}^0 S_{N-1}^0 + (1+r)^{-1} \phi_{N-1} S_{N-1} ((1+m) \frac{r-d}{m-d} + (1+d) \frac{m-r}{m-d})$$

$$= \phi_{N-1}^0 S_{N-1}^0 + (1+r)^{-1} \phi_{N-1} S_{N-1} (1-r)$$

$$= \phi_{N-1}^0 S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} S_{N-1}$$

$$= V_{N-1}$$

On a :

$$v(N-1, S_{N-1}) = V_{N-1}$$

Le cas Général

4. Montrons que pour $n \in \{1 \dots N\}$:

$$v(n-1, s) = (1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(v(n, sX_n))$$

On a :

$$v(n-1, s) = (1+r)^{-N+n-1} \mathbb{E}^*(h(s \prod_{k=n}^N X_k))$$

$$v(n-1, s) = (1+r)^{-1} ((1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(sX_n \prod_{k=n+1}^N X_k)))$$

$$v(n-1, s) = (1+r)^{-1} (\mathbb{E}^*((1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(sX_n \prod_{k=n+1}^N X_k))))$$

$$\text{Or : } (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(sX_n \prod_{k=n+1}^N X_k)) = v(n, sX_n)$$

On a :

$$v(n-1, s) = (1+r)^{-1} (\mathbb{E}^*(v(n, sX_n)))$$

5. * Montrons que :

$$V_n = v(n, S_n) \text{ et } \phi_n = \varphi(n+1, S_n)$$

On a :

$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(S_n \prod_{i=n+1}^N X_i))$$

$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(S_n X_{n+1} \dots X_{N-1} X_N))$$

$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(S_{n+1} X_{n+2} \dots X_{N-1} X_N))$$

$$\vdots$$

$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(S_{N-2} X_{N-1} X_N))$$

$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(S_{N-1} X_N))$$

$$v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(S_N))$$

Raisonnant par récurrence :

Initialisation pour $n = N-1$:

$$(1+r)^{-N+N-1} \mathbb{E}^*(h(S_N)) = (1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(h(S_N)) V_{N-1}$$

(D'après la question 3)

Hérédité : Supposons que $V_K = v(k, S_k)$ au rang k et montrons que $V_{k+1} = v(k+1, S_{k+1})$ au rang $k+1$
On a :

$$V_k = \phi_k^0 S_k^0 + \phi_k S_k \Rightarrow \phi_k^0 = \frac{1}{S_k^0} (V_k - \phi_k S_k)$$

D'après l'équation 2 :

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \phi_k^0 S_{k+1}^0 + \phi_k S_{k+1} \\ &= \frac{1}{S_k^0} (V_k - \phi_k S_k) S_{k+1}^0 + \phi_k S_{k+1} \\ &= \frac{1}{\cancel{(1+r)^k} S_0^0} ((1+r)^{-N+k} \mathbb{E}^*(h(S_N)) - \phi_k S_k) \cancel{(1+r)^{k+1} S_0^0} + \phi_k S_{k+1} \\ &= (1+r)^{-N+k+1} \mathbb{E}^*(h(S_N)) - \phi_k S_k (1+r) + \phi_k S_k X_k \\ &= (1+r)^{-N+k+1} \mathbb{E}^*(h(S_N)) - \phi_k S_k (1+r) + \phi_k S_k ((1+m) \mathbb{P}^*(X_k = 1+m) + (1+d) \mathbb{P}^*(X_k = 1+d)) \\ &= (1+r)^{-N+k+1} \mathbb{E}^*(h(S_N)) - \cancel{\phi_k S_k (1+r)} + \cancel{\phi_k S_k (1+r)} \\ &= (1+r)^{-N+k+1} \mathbb{E}^*(h(S_N)) \\ V_{k+1} &= v(k+1, S_{k+1}) \end{aligned}$$

D'où : $V_n = v(n, S_n)$

**** Montrons que $\phi_n = \varphi(n+1, S_n)$**

on a :

$$\varphi(n+1, S_n) = \frac{1}{S_n} \frac{v(n+1, (1+m)S_n) - v(n+1, (1+d)S_n)}{m-d}$$

Or :

$$v(n+1, (1+m)S_n) = (1+r)^{-N+n+1} \mathbb{E}^*(h((1+m)S_{N-1}))$$

$$v(n+1, (1+m)S_n) = (1+r)^{-N+n+1} \mathbb{E}^*(\phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} (1+m) S_{N-1})$$

Et de même :

$$v(n+1, (1+d)S_n) = (1+r)^{-N+n+1} \mathbb{E}^*(h((1+d)S_{N-1}))$$

$$v(n+1, (1+d)S_n) = (1+r)^{-N+n+1} \mathbb{E}^*(\phi_{N-1}^0 (1+r) S_{N-1}^0 + \phi_{N-1} (1+d) S_{N-1})$$

Donc :

$$v(n+1, (1+m)S_n) - v(n+1, (1+d)S_n) = (1+r)^{-N+n+1} \mathbb{E}^*(\phi_{N-1} (1+m) S_{N-1} - \phi_{N-1} (1+d) S_{N-1})$$

$$v(n+1, (1+m)S_n) - v(n+1, (1+d)S_n) = (1+r)^{-N+n+1} \mathbb{E}^*(\phi_{N-1} (m-d) S_{N-1})$$

D'où :

$$\varphi(n+1, S_n) = \frac{1}{S_n} (1+r)^{-N+n+1} \phi_{N-1} S_{N-1}$$

Raisonnant également par récurrence :

Initialisation pour $n = N-1$, on a :

$$\varphi(N, S_{N-1}) = \frac{1}{\cancel{S_{N-1}}} (1+r)^{-N+N-1+1} \cancel{\phi_{N-1} S_{N-1}} = \phi_{N-1}$$

Hérédité : Supposons que $\varphi(k, S_{k-1}) = \phi_{k-1}$ au rang k et montrons que $\varphi(k+1, S_k) = \phi_{k+1}$ au rang $k+1$

On a :

$$\begin{aligned}\varphi(k+1, S_k) &= \frac{1}{S_k} (1+r)^{-N+k+1} \phi_{N-1} S_{N-1} \\ \varphi(k+1, S_k) &= \frac{1+r}{X_k} \left(\frac{1}{S_{k-1}} (1+r)^{-N+k} \phi_{N-1} S_{N-1} \right) \\ \varphi(k+1, S_k) &= \frac{1+r}{X_k} \phi_{k-1}\end{aligned}$$

Or on déduit de la première équation que :

$$\phi_{k-1} = \frac{1}{S_{k-1}} (V_{k-1} - \phi_{k-1}^0 S_{k-1}^0)$$

D'où :

$$\varphi(k+1, S_k) = \frac{1+r}{X_k S_{k-1}} (V_{k-1} - \phi_{k-1}^0 S_{k-1}^0)$$

Or d'après le premier item :

$$\begin{aligned}V_{k-1} &= (1+r)^{-N+k-1} \mathbb{E}^*(h(S_N)) \\ &= (1+r)^{-N+k} ((1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(h(S_N))) \\ &= (1+r)^{-N+k} ((1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(h(S_N)))\end{aligned}$$

6.*

** On a montré dans la question précédente que :

$$V_n = v(n, S_n) = (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}^*(h(S_N))$$

Donc :

$$V_0 = (1+r)^{-N} \mathbb{E}^*(h(S_N))$$

Call et Put

7. Calculons $\mathbb{E}^*(\Pi_{k=n+1}^N X_k)$

Remarquons que : $X_k = \frac{S_k}{S_{k-1}}$, donc $X_{N-1} X_N = \frac{\cancel{S_{N-1}}}{S_{N-2}} \frac{S_N}{\cancel{S_{N-1}}} = \frac{S_N}{S_{N-2}}$

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(\Pi_{k=n+1}^N X_k) &= \mathbb{E}^*\left(\frac{\cancel{S_{n+1}}}{S_n} \cdot \frac{\cancel{S_{n+2}}}{\cancel{S_{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{S_{N-1}}}{S_{N-2}} \frac{S_N}{\cancel{S_{N-1}}}\right) \\ \mathbb{E}^*(\Pi_{k=n+1}^N X_k) &= \mathbb{E}^*\left(\frac{S_N}{S_n}\right) \\ &= \mathbb{E}^*\left(\frac{S_N}{S_n} \mid X_N = 1+m, X_n = 1+m\right) + \mathbb{E}^*\left(\frac{S_N}{S_n} \mid X_N = 1+d, X_n = 1+m\right) + \mathbb{E}^*\left(\frac{S_N}{S_n} \mid X_N = 1+d, X_n = 1+d\right) \\ &\quad + \mathbb{E}^*\left(\frac{S_N}{S_n} \mid X_N = 1+m, X_n = 1+d\right) =\end{aligned}$$

8. Déduisons $\mathbb{E}^*(h(S_N))$

D'après 4. :

$$\begin{aligned}v(N-1, S_{N-1}) &= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(v(N, S_{N-1} X_N)) \\ v(N-1, S_{N-1}) &= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(v(N, S_N)) \\ v(N-1, S_{N-1}) &= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^*(h(S_N))\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}^*(h(S_N)) = (1+r)v(N-1, S_{N-1})$$

$$\mathbb{E}^*(h(S_N)) = (1+r)V_{N-1}$$

Strategie autofinanc'ee de couverture correspondante :

$$\mathbb{E}^*(V_N) = \mathbb{E}^*((1+r)V_{N-1})$$

Donc :

$$V_N = (1+r)V_{N-1}$$

9.

10.

Problème 2

1. Montrons que $\mathbb{E}(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Montrons que $\mathbb{E}(f(X_{n+1})) = \mathbb{E}(f(X_n))$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X_{n+1})) &= \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = x) f(x) \\ &= \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = x) f(x)\end{aligned}$$

$$(\text{Par le théorème des probabilités totales.}) = \sum_{x \in S} \left(\sum_{y \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = y) \mathbb{P}(X_n = y) \right) f(x)$$

Comme la chaine de Markov est homogène :

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})) = \sum_{x \in S} \left(\sum_{y \in S} p_{y,x} \mathbb{P}(X_n = y) \right) f(x)$$

Puis en réorganisant :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X_{n+1})) &= \sum_{y \in S} \left(\sum_{x \in S} p_{y,x} f(x) \right) \mathbb{P}(X_n = y) \\ &= \sum_{y \in S} f(y) \mathbb{P}(X_n = y) \\ &= \mathbb{E}(f(X_n))\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(f(X_n))$ est constante.

2. Montrons en raisonnant par l'absurde que $f(x_0) \leq 0$

Supposons qu'il existe $x_0 \in S \setminus A$ tel que : $f(x_0) > 0$

On a :

$$f(x_0) = \sum_{y \in S} p_{y,x_0} f(y)$$

Posons $B = \{x \in S, f(x) > 0\}$, On a :

$$\begin{aligned}f(x_0) &= \sum_{y \in A} p_{y,x_0} f(y) + \sum_{y \in B} p_{y,x_0} f(y) + \sum_{y \in S \setminus (A \cup B)} p_{y,x_0} f(y) > 0 \\ f(x_0) &= 0 + \sum_{y \in B} p_{y,x_0} f(y) + \sum_{y \in S \setminus (A \cup B)} p_{y,x_0} f(y) > 0\end{aligned}$$

3. Montrons que pour tout (A, g) , avec $A \subset S$, $A \neq \emptyset$, $A \neq S$ et $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, le probleme de Dirichlet associé à (A, g) admet au plus une solution.

Supposons qu'il admet deux solutions $f, h : S \rightarrow \mathbb{R}$ distinctes, on a :

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{y \in S} p_{y,x} f(y) \\ h(x) = \sum_{y \in S} p_{y,x} h(y) \end{cases} \quad \forall x \in S \setminus A \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ h(x) = g(x) \end{cases} \quad \forall x \in A$$

$$\begin{cases} k(x) = f(x) - h(x) = \sum_{y \in S} p_{y,x} (f(y) - h(y)), \forall x \in S \setminus A \\ k(x) = f(x) - h(x) = g(x) - g(x) = 0, \forall x \in A \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} k(x) = \sum_{y \in S} p_{y,x} k(y), \forall x \in S \setminus A \\ k(x) = 0, \forall x \in A \end{cases}$$

D'après la question précédente, $k(x) = 0 \forall x \in S$. Donc $f \equiv h$ ce qui est contradictoire.

Par conséquent, le problème de Dirichlet associé à (A, g) admet au plus une solution.

4. Montrons que $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$.

Par l'absurde, supposons que $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) < 1$, C'est-à-dire la probabilité de visiter A en temps fini est nulle, la chaîne de Markov ne visite jamais A . Donc elle reste dans $S \setminus A$.

Comme $P = (p_{x,y})$ est une matrice de transition **irréductible**, il existe pour chaque paire d'états x et y dans un ensemble fini S , il existe une puissance positive k telle que le coefficient (x, y) de la matrice P^k est strictement positif. Donc la probabilité $p_{x,y}^k$ de passer de x à y en k étapes est strictement positive.

Donc pour $x \in A$ et $y \in S \setminus A$, $p_{x,y}^k > 0$. Or la chaîne de Markov ne visite jamais A , elle reste dans $S \setminus A$ en au moins k étapes, ceci contredit le fait que la probabilité de visiter A en temps fini est nulle.

Par conséquent $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$.

5.* Montrons que $f(x) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A}) | X_0 = x)$ est bien définie.

D'après la question précédente, la chaîne de Markov visite A avec une probabilité de 1, donc il existe un instant fini τ_A tel que X_{τ_A} soit dans A . Donc la variable aléatoire $g(X_{\tau_A})$ est bien définie. De plus, comme $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$.

On a :

$$\mathbb{E}(g(X_{\tau_A})) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A}) | \tau_A = \infty) \mathbb{P}(\tau_A = \infty) + \mathbb{E}(g(X_{\tau_A}) | \tau_A < \infty) \mathbb{P}(\tau_A < \infty)$$

$$\mathbb{E}(g(X_{\tau_A})) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A}) | \tau_A = \infty)$$

car $\mathbb{P}(\tau_A = \infty) = 0$ et $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$

Ce qui implique que $\mathbb{E}(g(X_{\tau_A}) | X_0 = x)$ est bien défini pour tout x

** Montrer que $f(x) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A}) | X_0 = x)$ est bien solution du problème de Dirichlet pour la paire (A, g)

Soit $x \in S$

- Si $x \in A$ On a : $f(x) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A}) | X_0 = x) = \mathbb{E}(g(X_0)) = g(x)$, car $\tau_A = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\} = 0$

- Si $x \in S \setminus A$:

$$f(x) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_A}) | X_0 = x)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{y \in S} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y | X_0 = x) g(y) \\ &= \sum_{y \in A} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y | X_0 = x) g(y) + \sum_{y \in S \setminus A} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y | X_0 = x) g(y) \\ &= \sum_{y \in A} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y | X_0 = x) f(y) + \mathbb{E}((g(X_{\tau_A}) | X_0 = x) | X_1 \in S \setminus A) \end{aligned}$$

Par la formule de espérance totale :

$$f(x) = \sum_{y \in A} \mathbb{P}(X_{\tau_A} = y | X_0 = x) f(y) + \sum_{y \in S \setminus A} \mathbb{E}((g(X_{\tau_A}) | X_0 = x) | X_1 \in S \setminus A)$$

Problème 3

1.* Montrons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur \mathbb{N}

On peut écrire :

$$X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$$

Comme X_0 est indépendant de $\xi_{n,m}$, X_1 dépend de X_0 , donc indépendant de $\xi_{n,m}$, de manière récurrente $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendante des $\xi_{n,m}$. Donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur \mathbb{N}

* Déterminons sa matrice de transition.

$$\begin{aligned} P_{k,l} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = l | X_n = k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = \sum_{m=1}^{X_n} \xi_{n,m} | X_n = k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = \sum_{m=1}^{X_n} \xi_{n,m} = l | X_n = k) \\
&= \mathbb{P}(l = \sum_{m=1}^k \xi_{n,m}) = \mu^{*k}(l) \text{ (où } \mu^{*k} \text{ désigne la loi de la somme de } k \text{ variables aléatoires} \\
&\text{indépendantes de loi } \mu) \\
&= \mathbb{P}(\sum_{m=1}^k l_m = \sum_{m=1}^k \xi_{n,m}) \quad (\text{avec } \sum_{m=1}^k l_m = l) \\
&= \sum_{l_1 + \dots + l_m = l, l_1, \dots, l_m \geq 0} \mathbb{P}(l_1 = \xi_{n,1}, \dots, l_m = \xi_{n,k}) \\
&= \sum_{l_1 + \dots + l_m = l, l_1, \dots, l_m \geq 0} \mathbb{P}(l_1 = \xi_{n,1}) \dots \mathbb{P}(l_m = \xi_{n,k}) \text{ (Par indépendances des } \xi_{n,k}) \\
&= \sum_{l_1 + \dots + l_m = l, l_1, \dots, l_m \geq 0} \mu_{l_1} \dots \mu_{l_m}
\end{aligned}$$

D'où :

$$P_{k,l} = \sum_{l_1 + \dots + l_m = l, l_1, \dots, l_m \geq 0} \mu_{l_1} \dots \mu_{l_m} = \mu^{*k}(l)$$

2. En effet, si $X_n = 0$ pour un certain n , alors $X_{n+1} = 0$ car la somme vide est égale à 0. Ainsi, la probabilité de passer de l'état 0 à l'état 0 est de 1.

$$P(0,0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1$$

La chaîne n'est pas irréductible car elle possède un état absorbant. En effet pour tout état x non nul $P(0,x) = 0$

3. On sait que l'état 0 est absorbant, donc s'il est récurrent, il doit être récurrent positif car $P(0,0) = 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe un autre état récurrent x_1 . On a :

$$\mathbb{P}(N_{x_1} = \infty | X_0 = x_1) = 1$$

Cela implique x_1 a au moins un enfant à la n -ième génération, donc la probabilité qu'il n'ait pas d'enfants à la n -ième génération est nulle, $\mathbb{P}(\xi_{n,x_1} = 0) = \mu(0) = 0$.

Mais cela contredit l'hypothèse que $\mu(0) > 0$, ce qui signifie qu'il y a une probabilité non nulle qu'un individu n'ait pas d'enfant. Par conséquent, l'état 0 est le seul état récurrent de la chaîne.

$$\text{Montrons que } \mathbb{P}_1(\lim_{x \rightarrow \infty} X_n = \infty) + \mathbb{P}_1(\lim_{x \rightarrow \infty} X_n = 0) = 1$$

Puisque l'état 0 est le seul état récurrent, cela signifie que si la population atteint l'infini à l'infini, elle ne peut pas revenir à l'état 0 :

$$\mathbb{P}_1(\lim_{x \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1 - \mathbb{P}_1(\lim_{x \rightarrow \infty} X_n = 0)$$

D'où :

$$\mathbb{P}_1(\lim_{x \rightarrow \infty} X_n = \infty) + \mathbb{P}_1(\lim_{x \rightarrow \infty} X_n = 0) = 1$$

4.

a. Montrons que $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)s^k$

$$G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_1 = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_1 = k | X_0 = 1)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(\xi_{0,1} = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)s^k$$

b. Montrons que $G_n(s) = (G_1 \circ \dots \circ G_1)(s)$ n fois

Raisonnant par récurrence :

Initialisation : $n = 1$ $G_1(s) = G_1(s)$

Hérédité : Supposons que $G_n(s) = (G_1 \circ \dots \circ G_1)(s)$ n fois et montrons que $G_{n+1}(s) = (G_1 \circ \dots \circ G_1)(s)$ $n + 1$ fois.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_{n+1} = k) s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_{n+1} = k | X_n = j) s^k \quad \textbf{(Par la formule des probabilités totales)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n = j) P_{j,k} s^k = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n = j) \sum_{k=0}^{\infty} P_{j,k} s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n = j) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_m = k, k_1, \dots, k_m \geq 0} \mu_{k_1} \dots \mu_{k_j} \right) s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n = j) \left(\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \mu(k_1) s_1^{k_1} \right) \dots \left(\sum_{k_j=0}^{\infty} \mu(k_j) s_j^{k_j} \right) \right)
\end{aligned}$$

Or :

$$(G_1(s))^j = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \mu(k_1) s_1^{k_1} \right) \dots \left(\sum_{k_j=0}^{\infty} \mu(k_j) s_j^{k_j} \right)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_n = j) (G_1(s))^j = G_n(G_1(s)) \\
&= (G_1 \circ \dots \circ G_1)(G_1(s)) \quad \textbf{(n+1) fois}
\end{aligned}$$

D'où : $G_{n+1}(s) = (G_1 \circ \dots \circ G_1), (n+1)$ fois.

Par conséquent, $G_n(s) = (G_1 \circ \dots \circ G_1)(s)$ n fois pour tout $n \geq 1$

c. On a d'après 4.a que $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k$.

$$G'_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mu(k) s^{k-1} \Rightarrow G'_1(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mu(k) = m$$