

GRUNDPRAKTIKUM I

VERSUCHSPROTOKOLL

# Isentropenindex

*Clemens Schumann, Tassilo Scheffler*

clemensrubenschumann@googlemail.com,  
tassilo@glief.de

betreut von  
LARISSA MELISCHEK

10.03.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b><u>Physikalische Grundlagen</u></b>	<b>2</b>
1.1	Innere Energie und Wärmekapazität . . . . .	2
1.2	Gase . . . . .	2
1.3	Methode nach Clement-Desormes . . . . .	4
1.4	Methode nach Flammersfeld-Rüchert . . . . .	4
<b>2</b>	<b><u>Auswertung</u></b>	<b>6</b>
2.1	<u>Aufgabe 1</u> . . . . .	6
2.1.1	Fehlerbetrachtung . . . . .	6
2.1.2	Referenzwert Kappa . . . . .	6
2.2	<u>Aufgabe 2</u> . . . . .	6
2.2.1	Fehlerbetrachtung . . . . .	7
<b>3</b>	<b><u>Messwerte</u></b>	<b>8</b>
3.1	Tabelle 1: Methode nach Clement-Desormes: . . . . .	8
3.2	Tabelle 2: Methode nach Flammersfeld-Rüchart . . . . .	8
<b>4</b>	<b>weiteres</b>	<b>8</b>

# 1 Physikalische Grundlagen

## 1.1 Innere Energie und Wärmekapazität

In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtbetrag der Energie konstant. Innerhalb des Systems können sich die verschiedenen Energien ineinander umwandeln (1. Hauptsatz der Thermodynamik). Dabei sind die verschiedenen Energien die kinetische Energie  $E_{kin}$ , die potentielle Energie  $E_{pot}$  und die innere Energie  $U$  des Systems. Diese innere Energie beschreibt die gesamte thermische Energie bzw. die gesamte kinetische und potentielle Energie des Systems. Die Änderung  $dU$  lässt sich mit der Änderung  $dW$  der Arbeit und dem Wärmeübertrag  $dQ$  bestimmen.

$$dU = dQ + dW \quad (1)$$

Mithilfe des Wärmeübertrags und der Temperaturänderung  $dT$  lässt sich die Wärmekapazität  $C$  definieren:

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (2)$$

Dies ist von der Masse  $m$  abhängig, weswegen man die spezifische Wärmekapazität

$$c = \frac{C}{m} \quad (3)$$

definiert. Möchte man stattdessen eine Unabhängigkeit von der Stoffmenge  $M$ , so ist

$$C_m = \frac{c}{n} \quad (4)$$

als molare Wärmekapazität definiert, wobei  $n$  die Molanzahl ist. Die Wärmekapazität ist stoffabhängig und wird in  $\frac{\text{Joule}}{\text{Kelvin}}$  angegeben.

## 1.2 Gase

Für ideale Gase (bestehend aus punktförmigen isotropen Kugeln, welche nur elastische Stöße untereinander betreiben) gilt immer eine Zustandsgleichung.

$$\frac{pV}{T} = \text{konstant} = n \cdot R = N \cdot k_B \quad (5)$$

Nach der kinetischen Gastheorie definiert man den Druck des Gases als Folge der Stöße, die die Gasmoleküle auf die Gefäßwand ausüben.

Nun können die Zustände eines Gases verschieden geändert werden. Als erstes sei die isochore Zustandsänderung ( $v=\text{konstant}$ ) genannt. Für diese kann nun

$$dU = C_V dT \quad (6)$$

$$C_V = N \frac{f}{2} k_B \quad (7)$$

hergeleitet werden. Die Freiheitsgrade sind die Anzahl der unabhängigen Parameter, die benötigt werden, um ein System zu beschreiben. Es gibt 3 Freiheitsgrade der Translation, 2 der Rotation und 2 der Schwingung eines Moleküls bzw. Systems.

Als zweites sei hier die isobare Zustandsänderung eines Gases ( $p=\text{konstant}$ ) genannt. Hierfür wird ähnlich definiert:

$$Vdp = C_p dT \quad (8)$$

und

$$C_p = N \left( \frac{f}{2} + 1 \right) k_B \quad (9)$$

In einer dritten, sogenannten adiabatischen (isentropen) Zustandsänderung lässt sich das vorige zusammenbringen. Denn hierbei darf nur kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden ( $dQ = 0$ ) bzw. die Entropie muss gleichbleibend sein. Dementsprechend finden auch nur reversible Prozesse statt. Damit wird aus (6) und (1):

$$dU = dW = -pdV = C_V dT \quad (10)$$

Mithilfe von (8) und (10), indem man jeweils  $dT$  isoliert, erhält man

$$\frac{C_p}{C_V} V dp = -pdV \leftrightarrow \frac{1}{p} dp = -\frac{\kappa}{V} dV \quad (11)$$

wobei

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} \quad (12)$$

benutzt wurde. Integrieren von  $p_1, V_1 \rightarrow p_2, V_2$  und exponenzieren von (11) ergibt

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa \rightarrow p \cdot V^\kappa = \text{konst.} \quad (13)$$

Mit (5) wird dies zu

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{konst.} \quad (14)$$

und

$$p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{konst.} \quad (15)$$

Die Gleichungen (13), (14) und (15) werden Poisson-Gleichungen oder auch Adiabatengleichungen genannt. Der Isentropenindex  $\kappa$  kann experimentell ermittelt werden. Dazu bieten sich mehrere Methoden an. Im Rahmen des Grundpraktikums werden die Methoden nach Clement-Desormes und nach Flammersfeld-Rüchard verwendet.

### 1.3 Methode nach Clement-Desormes

Bei dieser Methode zur Bestimmung von  $\kappa$  wird ein Überdruck in einem Glasbehälter erzeugt. Nach dem thermischem Ausgleich auf Zimmertemperatur wird ein Entlüftungsventil kurzzeitig geöffnet, wodurch eine nahezu adiabatische Zustandsänderung erfolgt. Anschließend findet eine isochore Zustandsänderung statt, bis die Zimmertemperatur wieder erreicht ist.

Daher kann für die adiabatische Zustandsänderung (a), bei der das Volumen konstant bleibt, die Poisson-Gleichung (15) benutzt werden. Mithilfe des totalen Differentials ergibt sich

$$(1 - \kappa) \frac{dp_{(a)}}{p} + \kappa \frac{dT_{(a)}}{T} = 0 \quad (16)$$

Aus

$$\frac{p}{T} = \text{konst.} \quad (17)$$

und

$$\frac{dp_{(i)}}{T} - p \frac{dT_{(i)}}{T^2} = 0 \quad (18)$$

für die isochore Zustandsänderung ergibt sich nach isolieren von  $\frac{dT_{(i)}}{T}$  und einsetzen in (18) mit  $dT_{(i)} = -dT_{(a)}$ :

$$0 = (1 - \kappa) \frac{dp_{(a)}}{p} + \kappa \frac{dp_{(i)}}{p} \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow \kappa = \frac{dp_{(a)}}{dp_{(a)}} + dp_{(i)} \quad (20)$$

$$\approx \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2} \quad (21)$$

wobei h die die Höhe der Flüssigkeit im Manometer ist.

### 1.4 Methode nach Flammersfeld-Rüchert

Bei dieser Methode wird beispielsweise eine Kugel in eine abgeschlossene Röhre fallen gelassen, in der Überdruck herrscht. Ein Querschlitze ist in der Röhre ungefähr bei der Mitte. Wenn nun die Kugel fallen gelassen wird, so fällt sie unter den Querschlitze und wird dann wieder wegen des Überdrucks zurückgedrückt. Dadurch findet eine Schwingung statt, bei der die Kugel periodisch schwingt. Dementsprechend wirkt die Kraft

$$dF = -Ddx \quad (22)$$

$$= dpS \quad (23)$$

mit S als Querschnittsfläche, x als Auslenkung und

$$D = m\omega^2 \quad (24)$$

als Rückstellkonstante.

Hier wird die Adiabatangleichung  $pV^\kappa = \text{konst}$  (13) verwendet. Mithilfe des totalen Differentials ergibt sich:

$$\frac{dp}{p} + \kappa \frac{dV}{V} = 0 \quad (25)$$

Die Rückstellkonstante wird mit (25) und (22) zu:

$$D = \kappa \frac{pS^2}{V} \quad (26)$$

Für die Eigenfrequenz  $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$  ergibt sich dann

$$\omega_0^2 = \kappa \frac{pS^2}{mV} \quad (27)$$

mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  mit T als Periodendauer (einfach zu messen) erhält man für den gesuchten Isentropenindex

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{mV}{pS^2} \quad (28)$$

Die theoretische Herleitung von  $\kappa$  erfolgt über die Freiheitsgrade.

Die Abhängigkeit von den Freiheitsgraden f kann man sich über die Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} T f k_B N = U \quad (29)$$

hergeleitet werden. Dazu benötigt man noch die Zusammenhänge

$$pV = Nk_B \quad (30)$$

$$C_V = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V = \frac{1}{2} f N k_B \quad (31)$$

$$C_p = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_p = \left. \frac{dU}{dT} \right|_p + \left. \frac{pdV}{dT} \right|_p = \frac{1}{2} f k_B N + N k_B \quad (32)$$

setzt man für Kappa  $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$  ein, so erhält man den gesuchten Zusammenhang

$$\kappa = \frac{f+2}{f} \quad (33)$$

## 2 Auswertung

### 2.1 Aufgabe 1

Zur Auswertung der Messergebnisse benötigt man nach (21) die Mittelwerte von  $\Delta h_1$  und  $\Delta h_2$ :

$$\langle \Delta h_1 \rangle = 42.67 \quad (34)$$

$$\langle \Delta h_2 \rangle = 7.33 \quad (35)$$

Nach (21) ergibt sich dann

$$\kappa = \frac{42.67}{42.67 - 7.33} = 1.21 \quad (36)$$

#### 2.1.1 Fehlerbetrachtung

Nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta \kappa = \sqrt{\left(\frac{-\Delta h_2}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2}\right)^2 \cdot (\Delta(\Delta h_1))^2 + \left(\frac{\Delta h_1}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2} \cdot (\Delta(\Delta h_2))\right)^2} \quad (37)$$

$$= 0.069 \quad (38)$$

Damit ergibt sich als Endwert

$$\kappa = 1.21 \pm 0.07 \quad (39)$$

#### 2.1.2 Referenzwert Kappa

Die theoretische Betrachtung über die Freiheitsgrade  $f = 5$  für Luft sieht nach (33) wie folgt aus:

$$\kappa = \frac{7}{5} = 1.4 \quad (40)$$

### 2.2 Aufgabe 2

Nach (28) können wir nun die jeweiligen Isentropenindizes von Ar,  $N_2$  und  $CO_2$  bestimmen. Demnach ist

$$\kappa_{Ar} = \frac{4\pi^2 \cdot 0.00452 \cdot 1142 \cdot 10^{-6}}{0.3294^2 \cdot 99700(\pi \cdot 0.00595^2)^2} \approx 1.52 \quad (41)$$

$$(42)$$

$$\kappa_{N_2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0.00458 \cdot 1145 \cdot 10^{-6}}{0.35152 \cdot 99700(\pi \cdot 0.00595^2)^2} \approx 1.36 \quad (43)$$

$$(44)$$

$$\kappa_{CO_2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0.0045 \cdot 1147 \cdot 10^{-6}}{0.3585^2 \cdot 99700(\pi \cdot 0.00595^2)^2} \approx 1.29 \quad (45)$$

### 2.2.1 Fehlerbetrachtung

Alle Fehler ausser der von  $T$  und  $V$  können vernachlässigt werden, da in der Fehlerfortpflanzung die Werte  $\Delta m$  mit 0.00034,  $\Delta p$  mit 0.000015 und  $\Delta S$  mit 0.0000017 ungefähr in  $\kappa$  eingehen, sind diese gegenüber  $\Delta T$  und  $\Delta V$  vernachlässigbar.  $\Delta\kappa$  lässt sich nach folgender Formel berechnen:

$$\sqrt{\left(\frac{4\pi^2 - 2mV}{T^2 p s^2} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 V}{T^2 p s^2} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 m}{T^2 p s^2} \Delta V\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 m V}{T^2 p^2 s^2} \Delta p\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 m V 2\pi}{T^2 p r^3} \Delta r\right)^2}$$

Für unsere Fehler erhalten wir somit:

$$\Delta\kappa_{Ar} \approx 0.02 \quad (46)$$

$$\Delta\kappa_{N_2} \approx 0.02 \quad (47)$$

$$\Delta\kappa_{CO_2} \approx 0.1 \quad (48)$$

### 2.2.2 Theoretische Betrachtung

Argon ist einatomig. Dementsprechend hat es 3 Freiheitsgrade. Stickstoff ist zweiatomig, hat also 5 Freiheitsgrade. Kohlenstoffdioxid hat 3 Atome, also 6 Freiheitsgrade.

$$\kappa_{Ar} = 5/3 = 1.67 \quad (49)$$

$$\kappa_{N_2} = 7/5 = 1.4 \quad (50)$$

$$\kappa_{CO_2} = 8/6 = 1.33 \quad (51)$$



### 3 Diskussion

## 4 Messwerte

### 4.1 Tabelle 1: Methode nach Clement-Desormes:

Versuch Nr.	$h_0$ in mm	$h_1$ in mm	$h_2$ in mm
1	27	69	36
2	27	70	34
3	27	70	33

### 4.2 Tabelle 2: Methode nach Flammersfeld-Rüchart

Versuch Nr.	Ar $T_{100}$ in s	$N_2$ $T_{100}$ in s	$CO_2$ $T_{100}$ in s
1	32.9	36.0	35.6
2	33.0	35.2	36.4
3	32.9	35.0	36.0
4	33.0	35.5	35.6
5	33.0	35.0	35.6
6	33.1	34.8	36.0
7	32.7	34.7	36.1
8	33.1	35.1	36.0
9	32.8	35.1	35.6
10	32.9	35.1	35.6

## 5 weiteres

Gemessener Luftdruck: 997mbar 1mbar

Fehler  $\Delta h = 2mm$