Computação Gráfica

Transformações Espaciais

Professor: Luciano Ferreira Silva, Dr.

Transformações Geométricas 3D

- Em 3D, um ponto é representado por 3 coordenadas (x,y,z);
- Em coordenadas homogênas, teríamos 4 coordenadas: Matrizes 4x4;
- Transformações:
  - ✓Rotação;
  - ✓Escala;
  - ✓Translação;
  - ✓Espelhamento;

Observações Iniciais

- Representação das imagens: equipamento 2D;
- Idéia básica: trabalhar com algoritmos e est. dados que representem a imagem de forma 3D e a convertam no momento da representação;
- Representação matricial:
  - ✓(X, Y, Z, W)
- Transformações 3D são uma extensão dos métodos 2D, incluindo-se a coordenada Z

Escala (3D)

- Multiplicação de cada uma das coordenadas pelo fator de escala correspondente;

- *Efeito:* aproximação ou afastamento do ponto em relação à origem do sistema, proporcionalmente, em cada eixo, aos fatores de escala aplicados;

Escala (3D)

- **Escala =** $$\begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ez & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

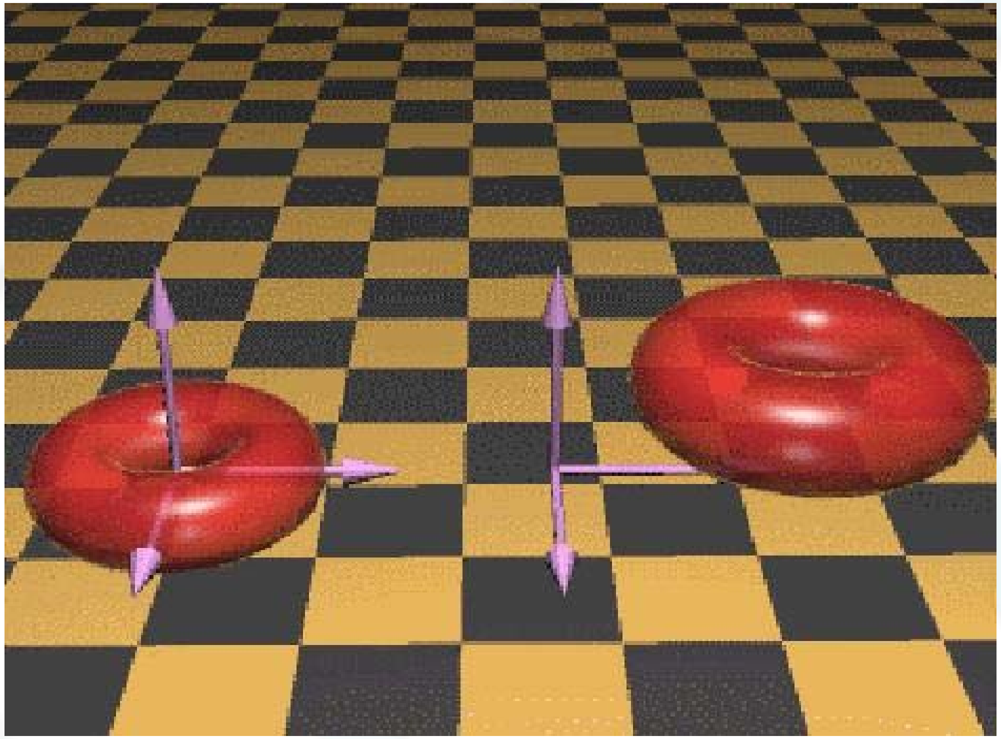
$$\begin{bmatrix} x` & y` & z` & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ez & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala (3D)

- **Se, no entanto, optarmos por representar o vetor linha por um vetor coluna, teremos:**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala (3D)



Observação: há alteração da distância do objeto à origem, novamente!!!!

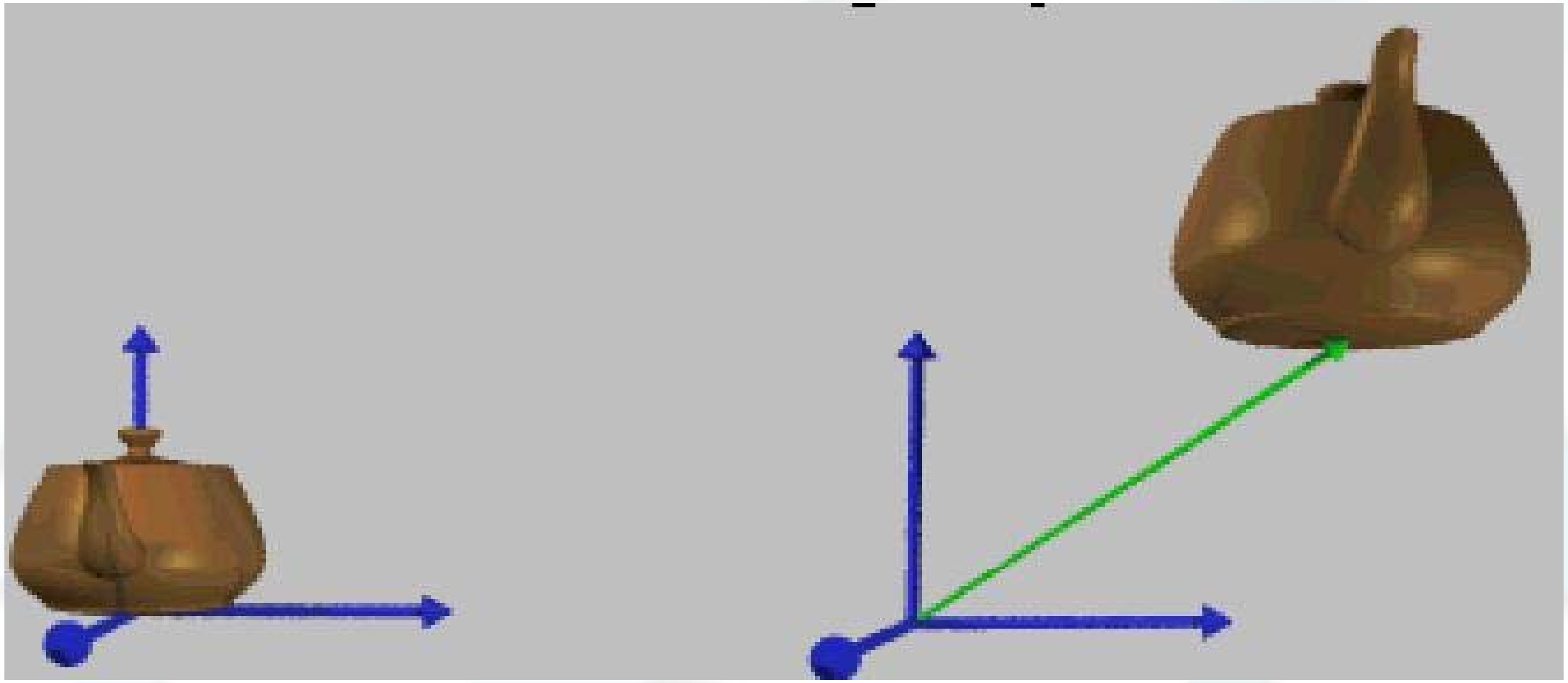
Translação (3D)

- **Transformação de corpo rígido, pois não modifica a forma do objeto:**

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x` & y` & z` & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} . T$$

Translação (3D)

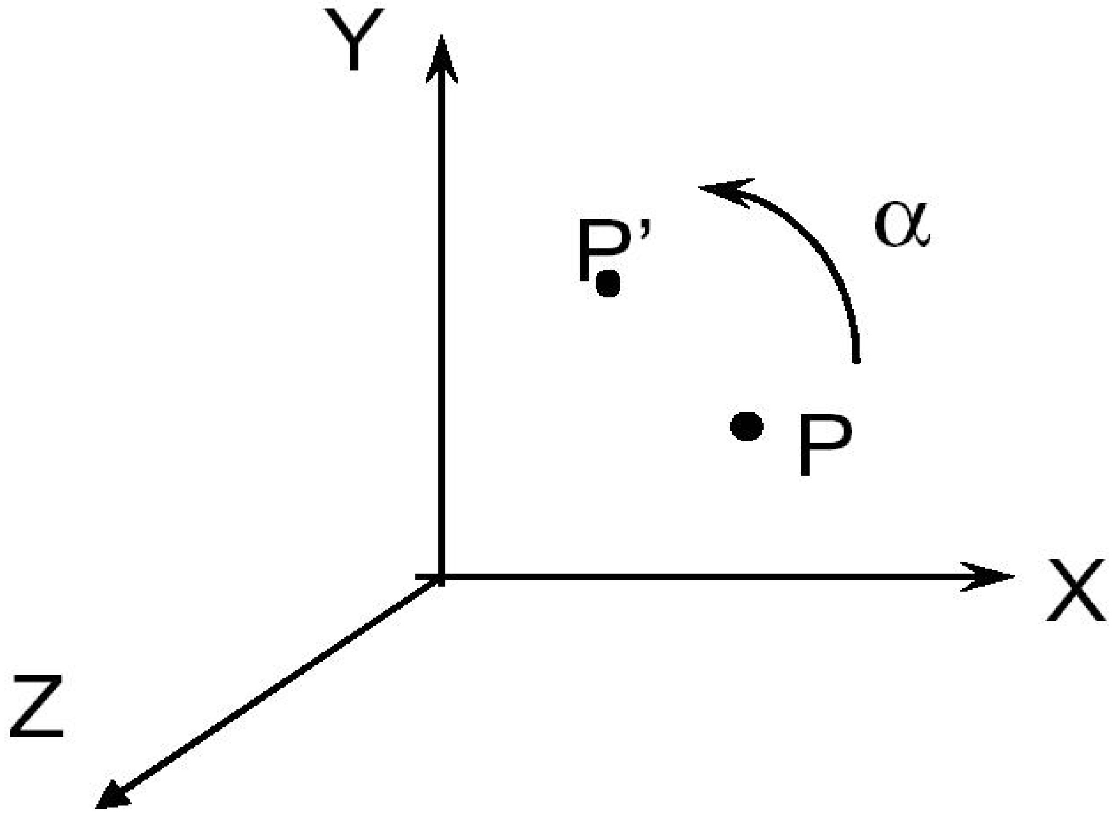


Ou, pode ser:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação (3D)

- **Em torno de z:**



$$x_{p'} = x_p \cdot \cos\alpha - y_p \cdot \operatorname{sen}\alpha$$
$$y_{p'} = x_p \cdot \operatorname{sen}\alpha + y_p \cdot \cos\alpha$$
$$z_{p'} = z_p$$

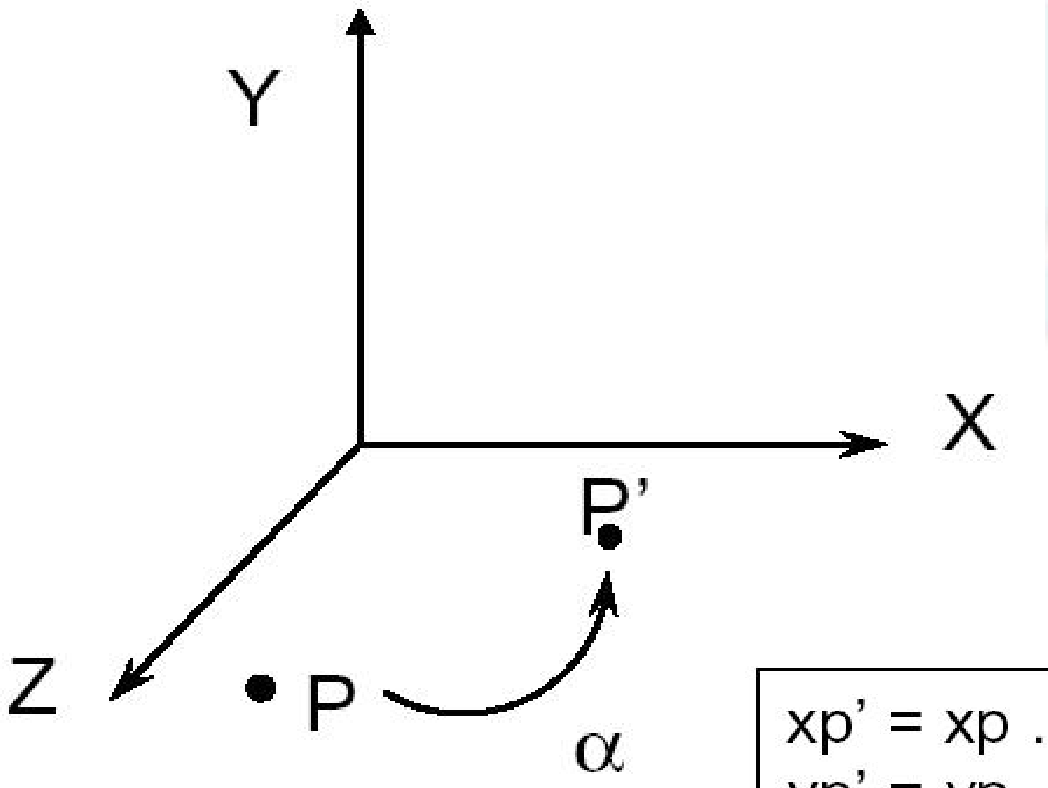
Rotação em torno de z

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad w] = [x \quad y \quad z \quad w].R_z$$

Rotação em torno de y

- Em torno de y, teríamos:



$$
\begin{aligned}
xp' &= xp \cdot \cos\alpha + zp \cdot \operatorname{sen}\alpha \\
yp' &= yp \\
zp' &= -\,xp \cdot \operatorname{sen}\alpha + zp \cdot \cos\alpha
\end{aligned}
$$

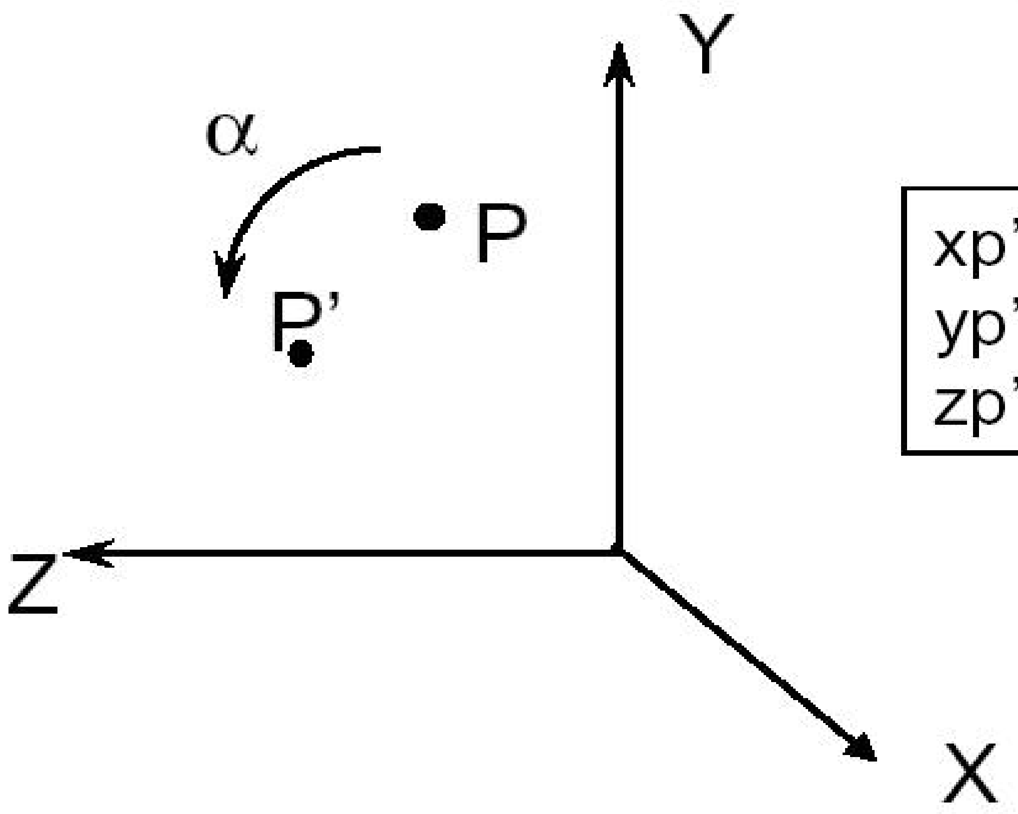
Rotação em torno de y

$$Ry = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -sen\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sen\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad w] = [x \quad y \quad z \quad w].R_y$$

Rotação em torno de x

- **Em torno de x, teríamos:**



$$
\begin{aligned}
xp' &= xp \\
yp' &= yp \cdot \cos\alpha - zp \cdot \operatorname{sen}\alpha \\
zp' &= yp \cdot \operatorname{sen}\alpha + zp \cdot \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Rotação em torno de x

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad w] = [x \quad y \quad z \quad w].R_x$$

Rotação em torno de um eixo arbitrário

- Sejam (a, b, c) e (a', b', c') os pontos que determinam os eixo;
- O eixo não está paralelo à qualquer dos eixos de coordenadas
  - ✓ Se sim, os passos seguintes serão reduzidos;
- Passos do algoritmo:

1. Translação de forma a fazer o eixo de rotação passar pela origem (T_x = -a; Ty = -b; T_z = -c);

Rotação em torno de um eixo arbitrário

2. Rotação em torno de eixo **x**, de forma que o eixo de rotação fique no plano xz; (ângulo θ);

3. Nova rotação em torno de eixo y (ângulo β) até que o eixo de rotação coincida com o eixo **z**;

4. Rotação em torno de eixo **z** com o ângulo desejado (α) ;

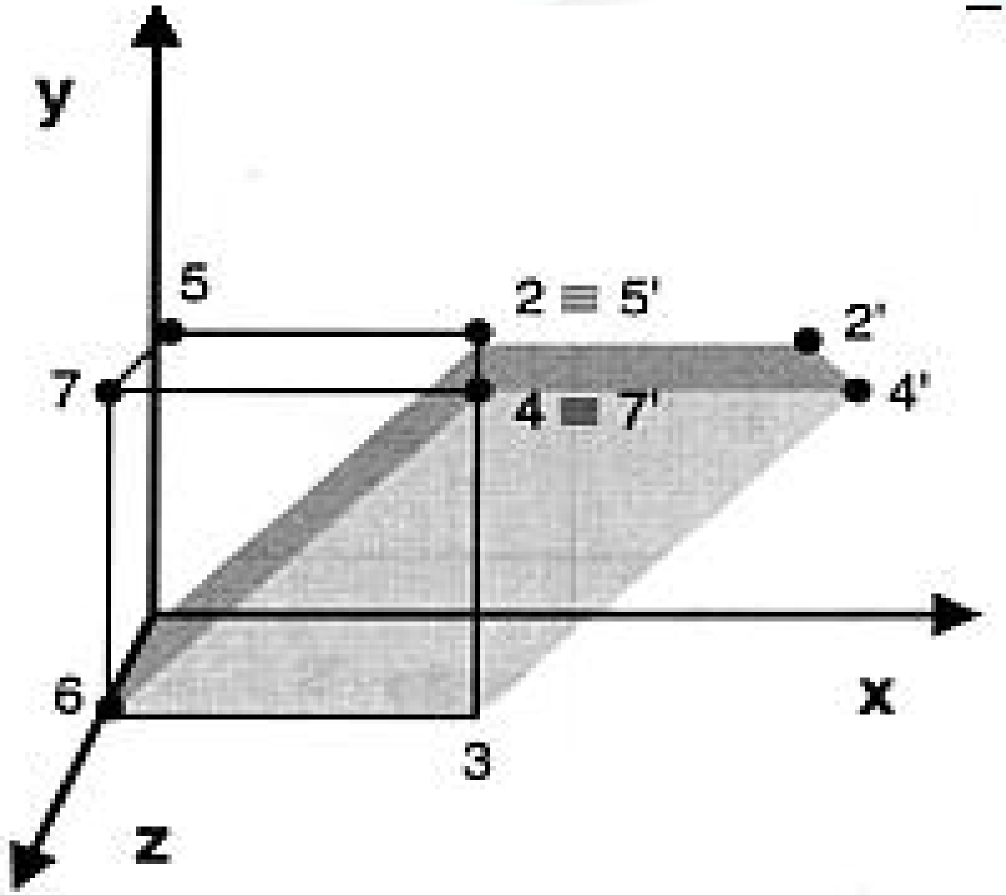
5. Rotação de - β em torno do eixo y;

6. Rotação de - θ em torno do eixo **x**;

7. Translação com (T_x = a; T_y = b; Tz = c). inversa

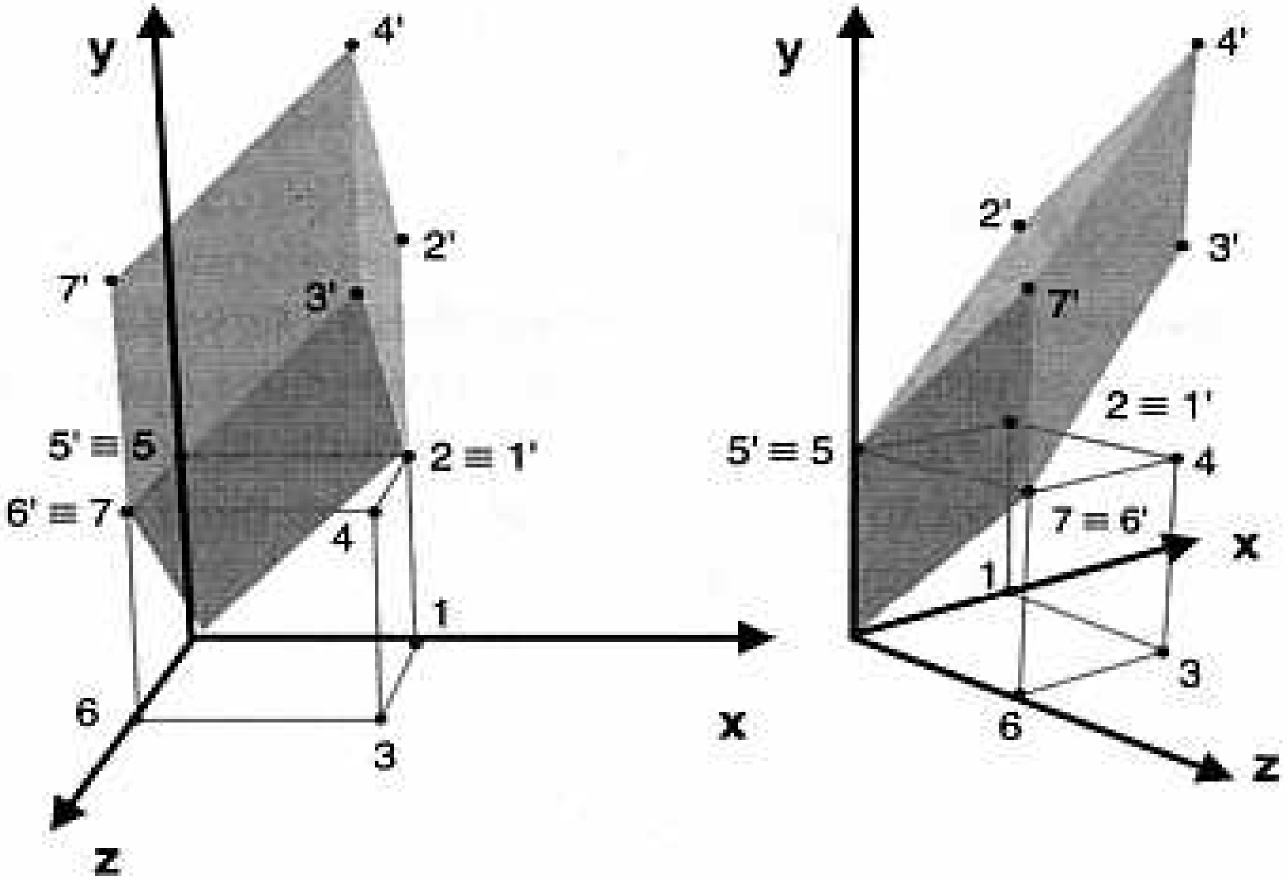
$$Novo\_Ponto = Ponto\_velho.\ T.R_x.R_y.R_\alpha.R_y^{-1}.R_x^{-1}.T^{-1}$$

Cisalhamento (3D)



Cisalhamento em um cubo unitário - Azevedo e Conci, 2003

Cisalhamento (3D)



Duas vistas do mesmo cisalhamento na direção y em função das coordenadas x e y de cada ponto - Azevedo e Conci, 2003