Computação Gráfica

Transformações Planares

Professor: Luciano Ferreira Silva, Dr.

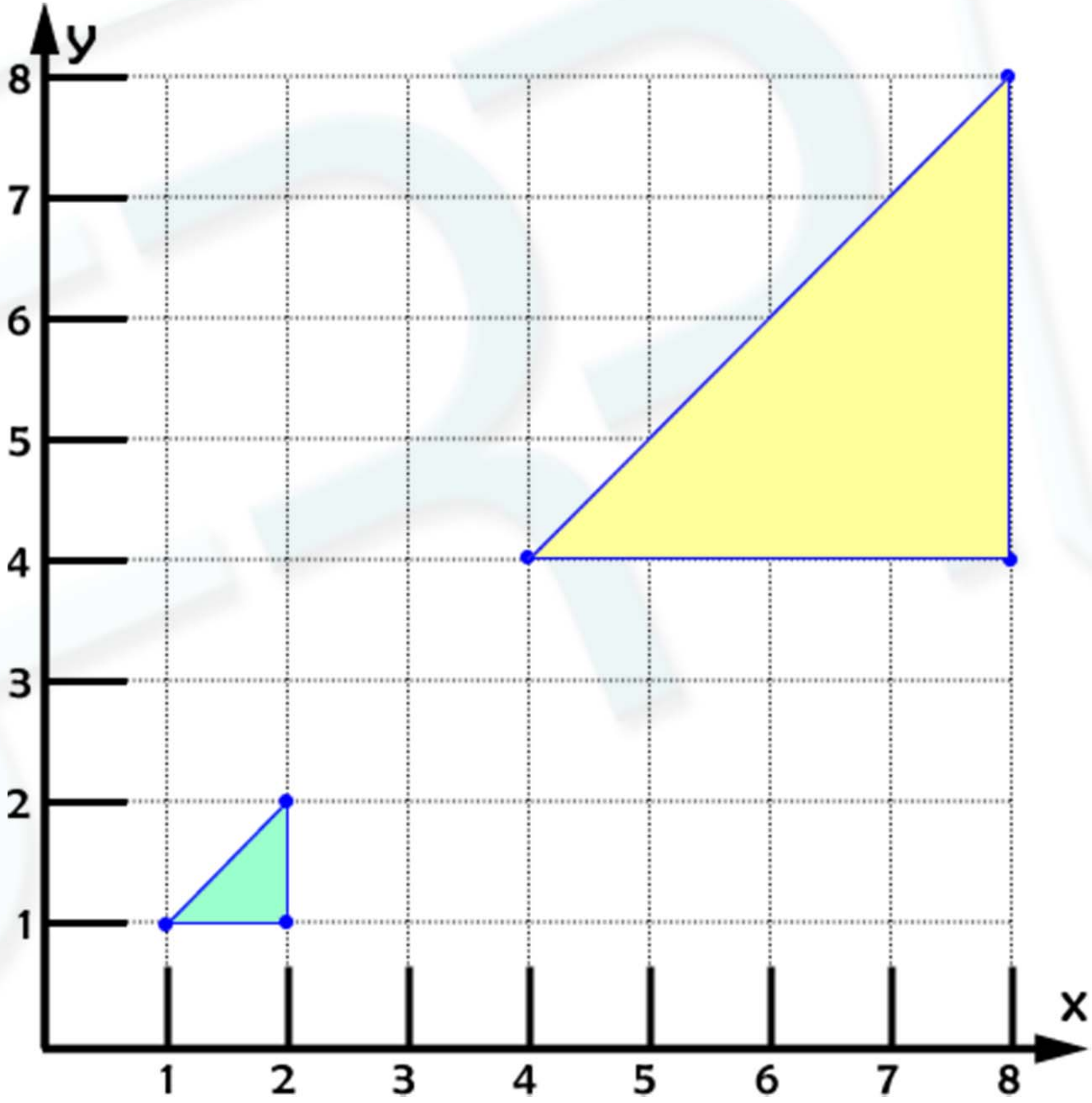
Aula 9

Transformações Geométricas

- Operações matemáticas para alterar uniformemente o aspecto de um desenho;
- Não devem comprometer a estrutura do desenho e sim o aspecto que o mesmo terá após a transformação;
- Três tipos fundamentais:
  - ✓ Escala;
  - ✓ Translação;
  - ✓ Rotação;

Escala (2D)

- Multiplicação de todas as coordenadas por fatores de escala (não-nulos)



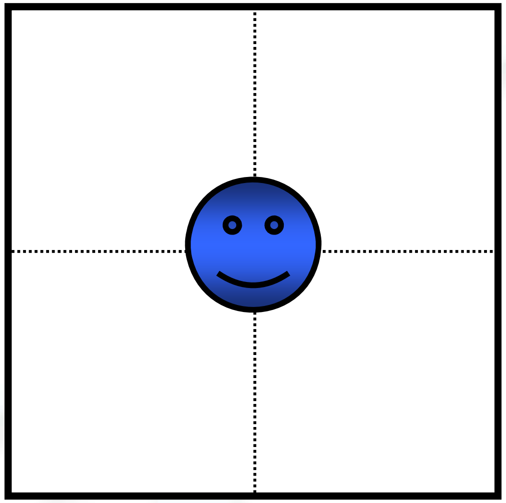
Escala (2D)

$$\begin{cases} x' = Ex \cdot x \\ y' = Ey \cdot y \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ex & 0 \\ 0 & Ey \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

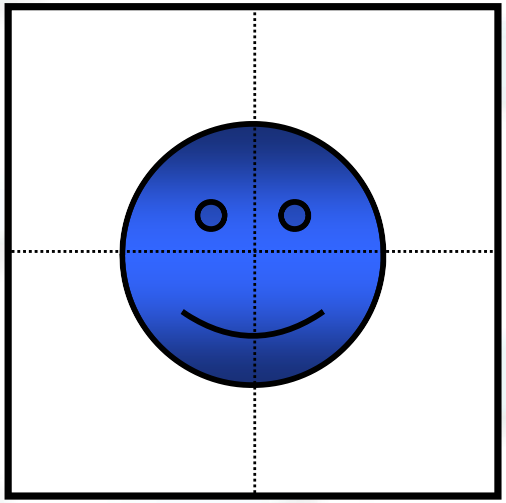
$$\text{Obs}: \begin{cases} \text{E} > 1 \Rightarrow \text{Ampliação da imagem} \\ 0 < \text{E} < 1 \Rightarrow \text{redução da imagem} \\ \text{E} < 0 \Rightarrow \text{Espelhamen to} \end{cases}$$

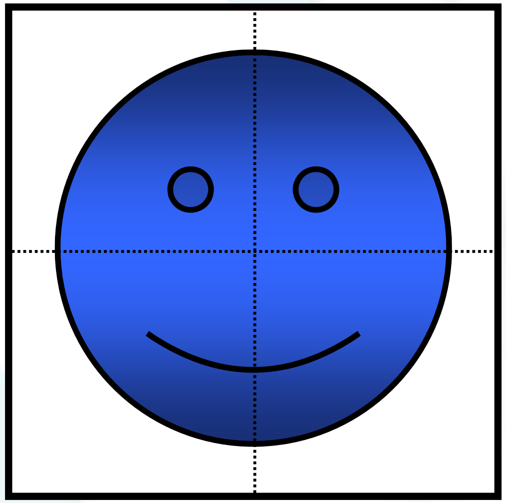
Escala (2D)

- Exemplos de fatores de escala:

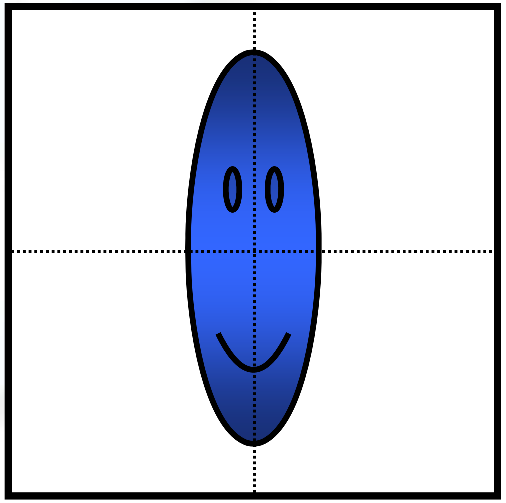


$Ex = Ey = 0.5$





$Ex = Ey = 1.5$

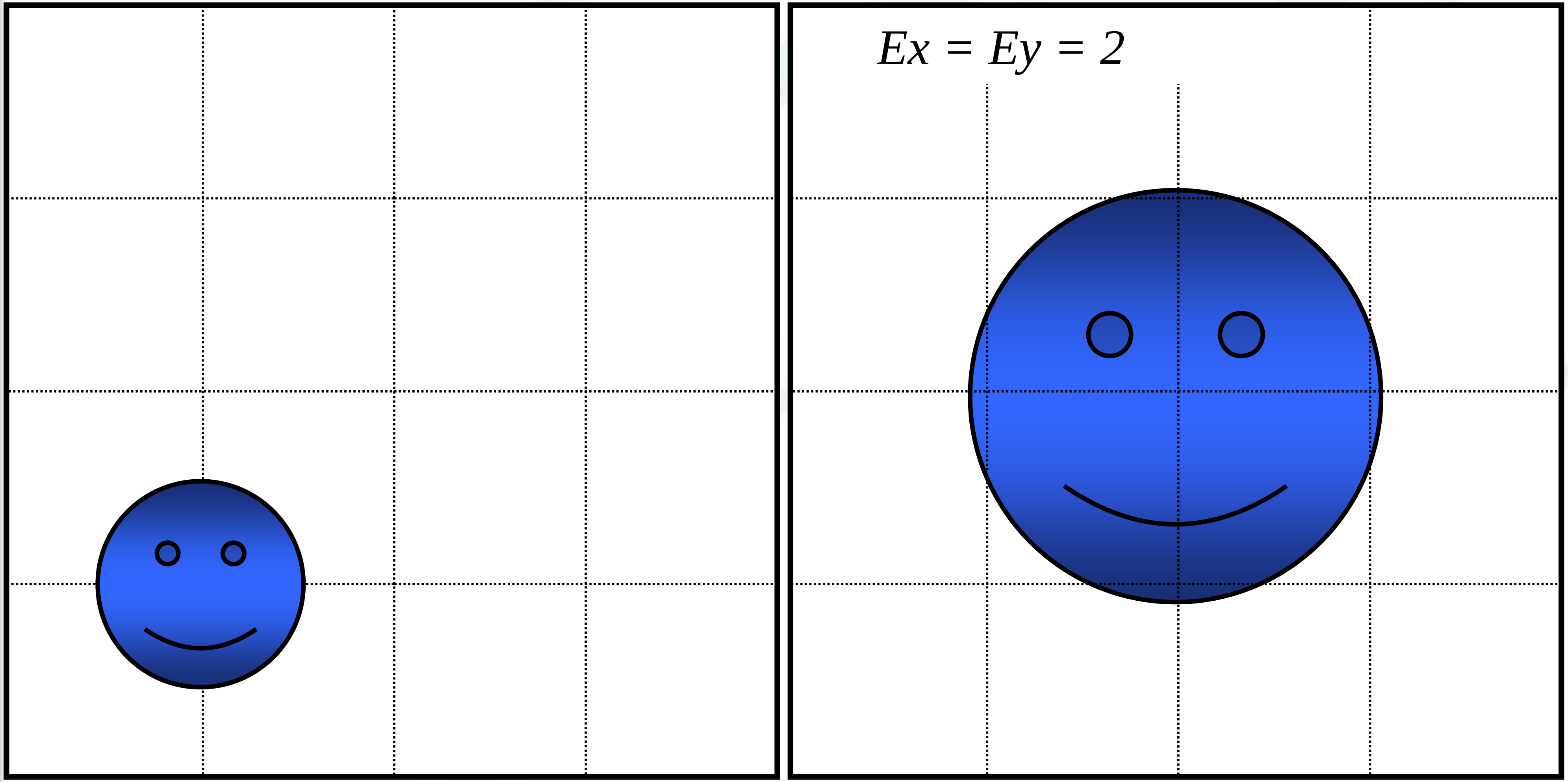


$Ex = 0.5$

$Ey = 1.5$

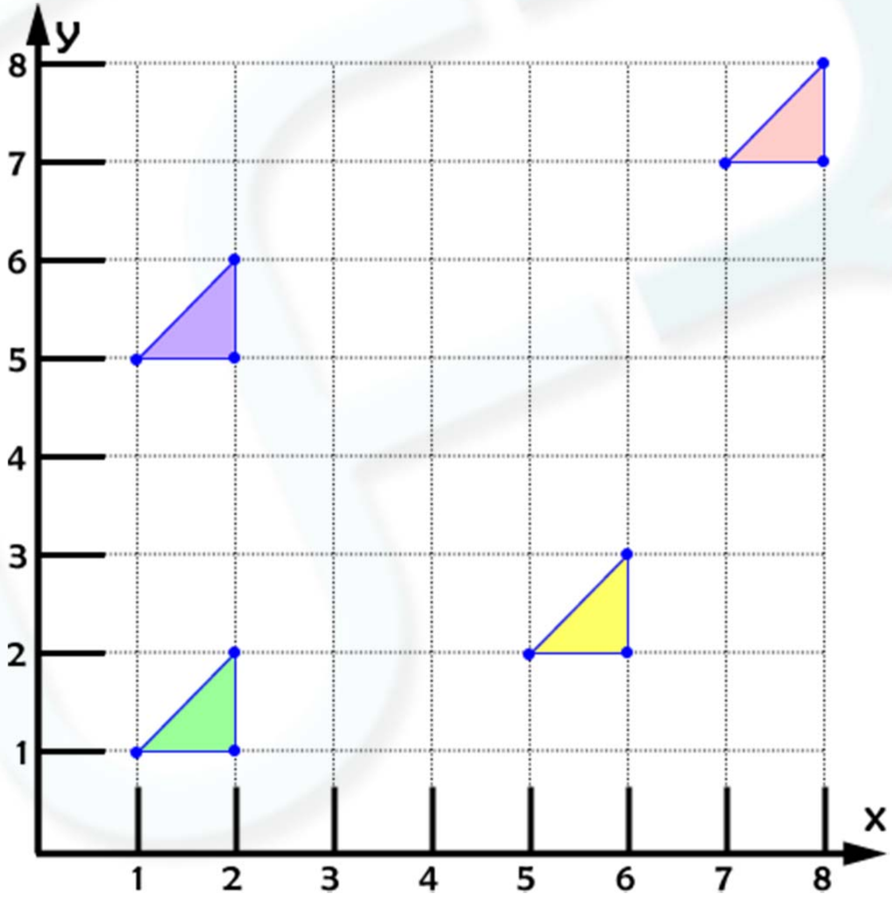
Escala (2D)

- Problema: posição do objeto



Translação (2D)

- **Movimentação da figura para outra posição no sist. de coordenadas: todos os pontos da imagem são deslocados de uma mesma distância:**



Translação (2D)

$$\begin{cases} x' = x + Tx \\ y' = y + Ty \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

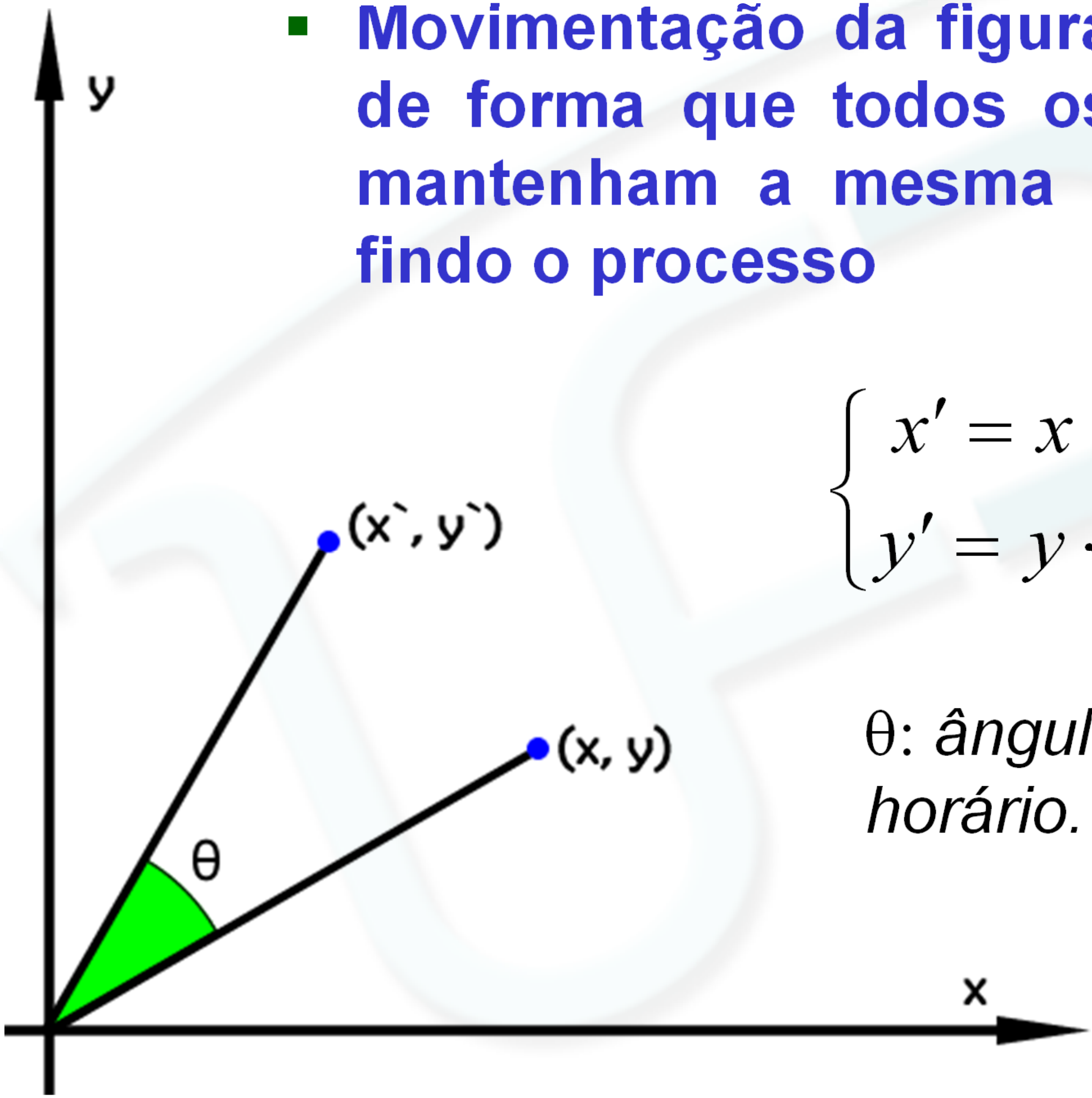
Observações:

• Fatores podem ser diferentes para x e y

• suponha uma linha: nº muito grande de pontos: grande consumo de tempo - solução: translação aplicada aos pontos iniciais e finais da linha

Rotação em torno da origem (2D)

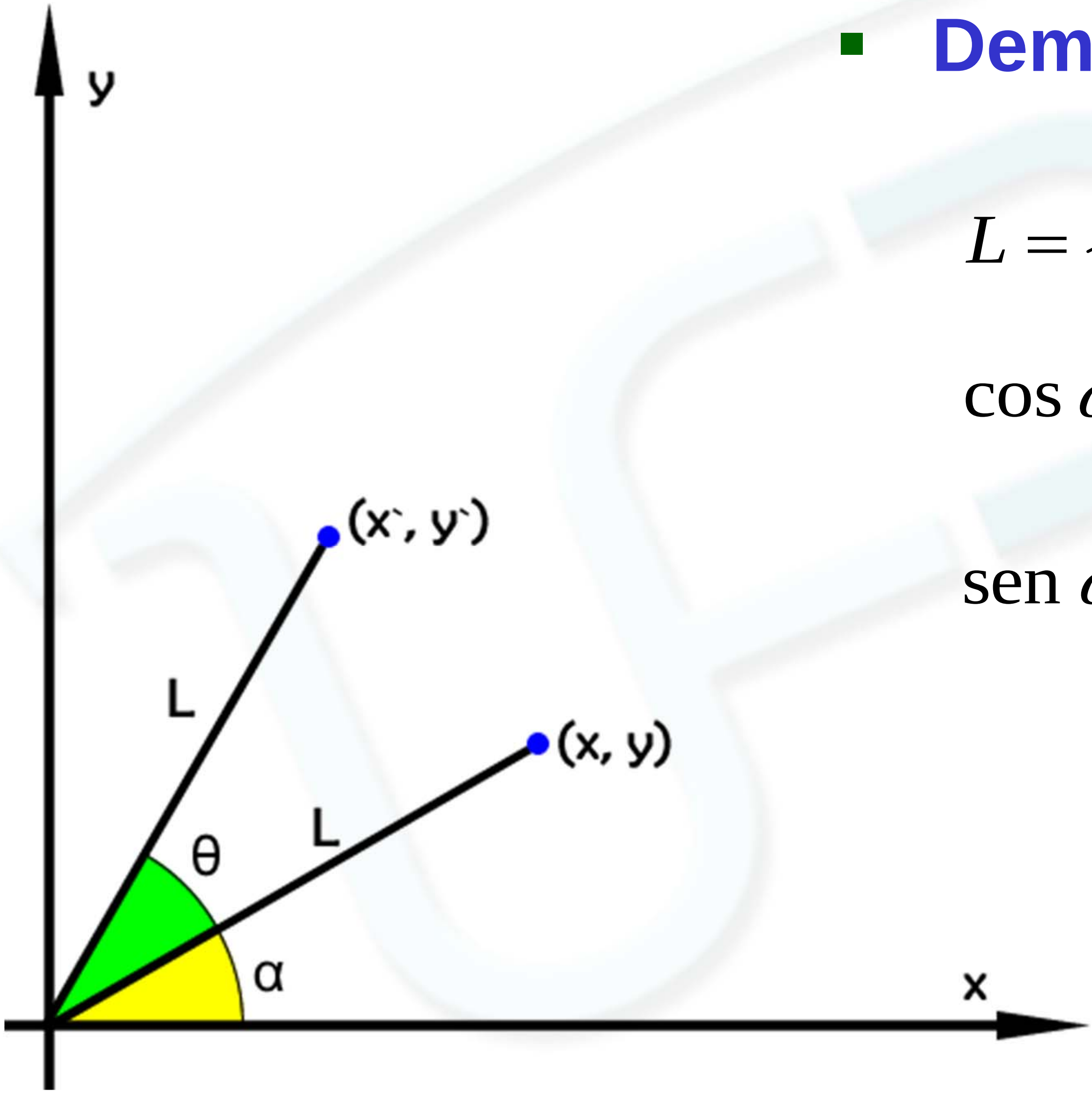
- Movimentação da figura para outra posição, de forma que todos os pontos da imagem mantenham a mesma distância da origem, findo o processo



$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \text{sen}\,\theta & \text{(I)} \\ y' = y \cdot \cos\theta + x \cdot \text{sen}\,\theta & \text{(II)} \end{cases}$$

θ: *ângulo medido no sentido horário.*

Rotação em torno da origem (2D)



- **Demonstração:**

$$L = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{L} \Rightarrow L.\cos\alpha = x;$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{L} \Rightarrow L.\text{sen}\,\alpha = y;$$

Rotação em torno da origem (2D)

- L também é a distância de (x’, y’) à origem, temos

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \cos(\theta+\alpha) = \frac{\mathrm{x}'}{\mathrm{L}} \;; \quad \operatorname{sen}(\theta+\alpha) = \frac{\mathrm{y}'}{\mathrm{L}}$$

Como:
$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \end{cases}$$

Temos:
$$\begin{cases} \dfrac{x'}{L} = \cos\theta \cdot \cos\alpha - sen\theta \cdot sen\alpha \Rightarrow x' = L.\cos\alpha \cdot \cos\theta - L.sen\alpha \cdot sen\theta \\ \dfrac{y'}{L} = sen\theta \cdot \cos\alpha + sen\alpha \cdot \cos\theta \Rightarrow y' = L.\cos\alpha \cdot sen\theta + L.sen\alpha \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Como:
$$L.\cos\alpha = x\;; \qquad L.\operatorname{sen}\alpha = y\;;$$

Daí:
$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot sen\theta$$
$$y' = y \cdot \cos\theta + x \cdot sen\theta$$

Matrizes de Transformação (2D)

- Se os pontos são tratados com coordenadas homogêneas, todos as transformações podem ser tratadas com multiplicações;

- Em coordenadas homogêneas, um ponto é tratado com um vetor de 3 valores (tripla) ⇒ (x, y, w). O ponto transformado é representado por (x’, y’, w’). W é colocado para dar consistência nos cálculos, normalmente utiliza-se o seu valor como 1;

Matrizes de Transformação: Escala (2D)

- **Matriz de Escala:**

$$E = \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Exemplo:**

$$[x' \quad y' \quad 1] = [3 \quad 2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [x' \quad y' \quad 1] = [6 \quad 4 \quad 1]$$

Matrizes de Transformação: Translação (2D)

- **Matriz de Translação:**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Transformação: Rotação (2D)

- ## Matriz de Rotação:

1. $$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -sen\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para usar como:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot R(\theta)$$

ou

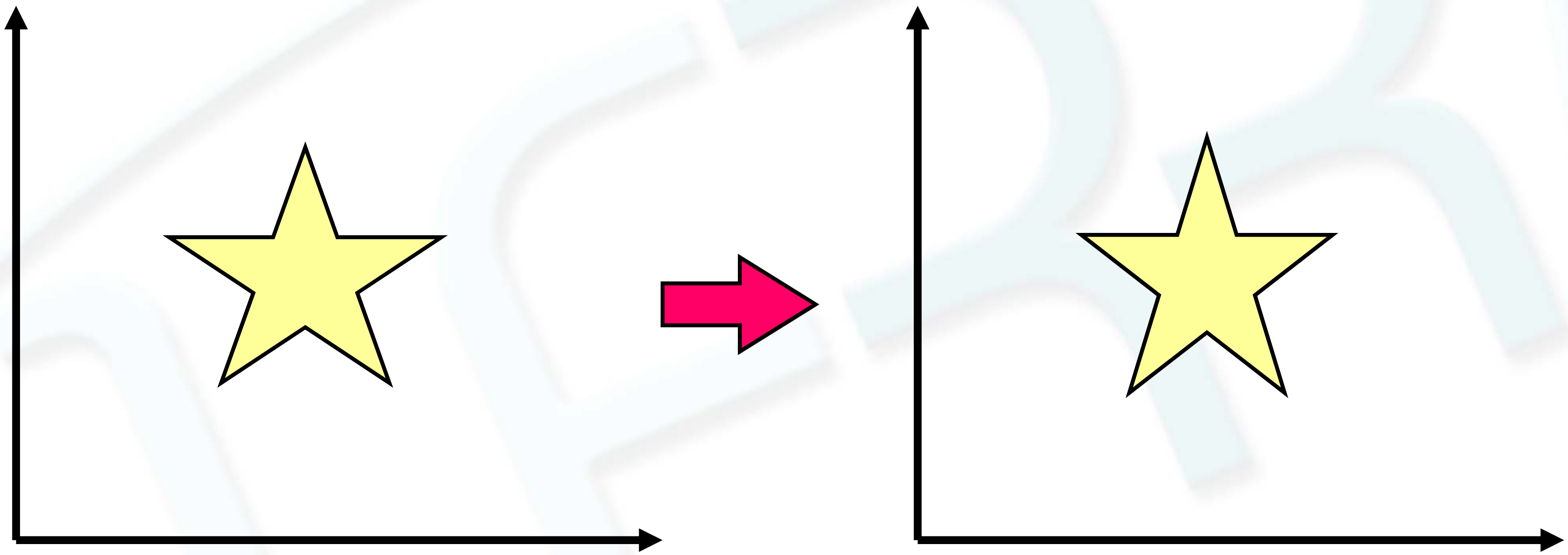
2. $$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ sen\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para usar como:

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \\ 1 \end{bmatrix} = R(\theta) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Combinação das Transformações (2D)

Suponha a rotação de um objeto em torno de um ponto qualquer, como pode ser visto em:

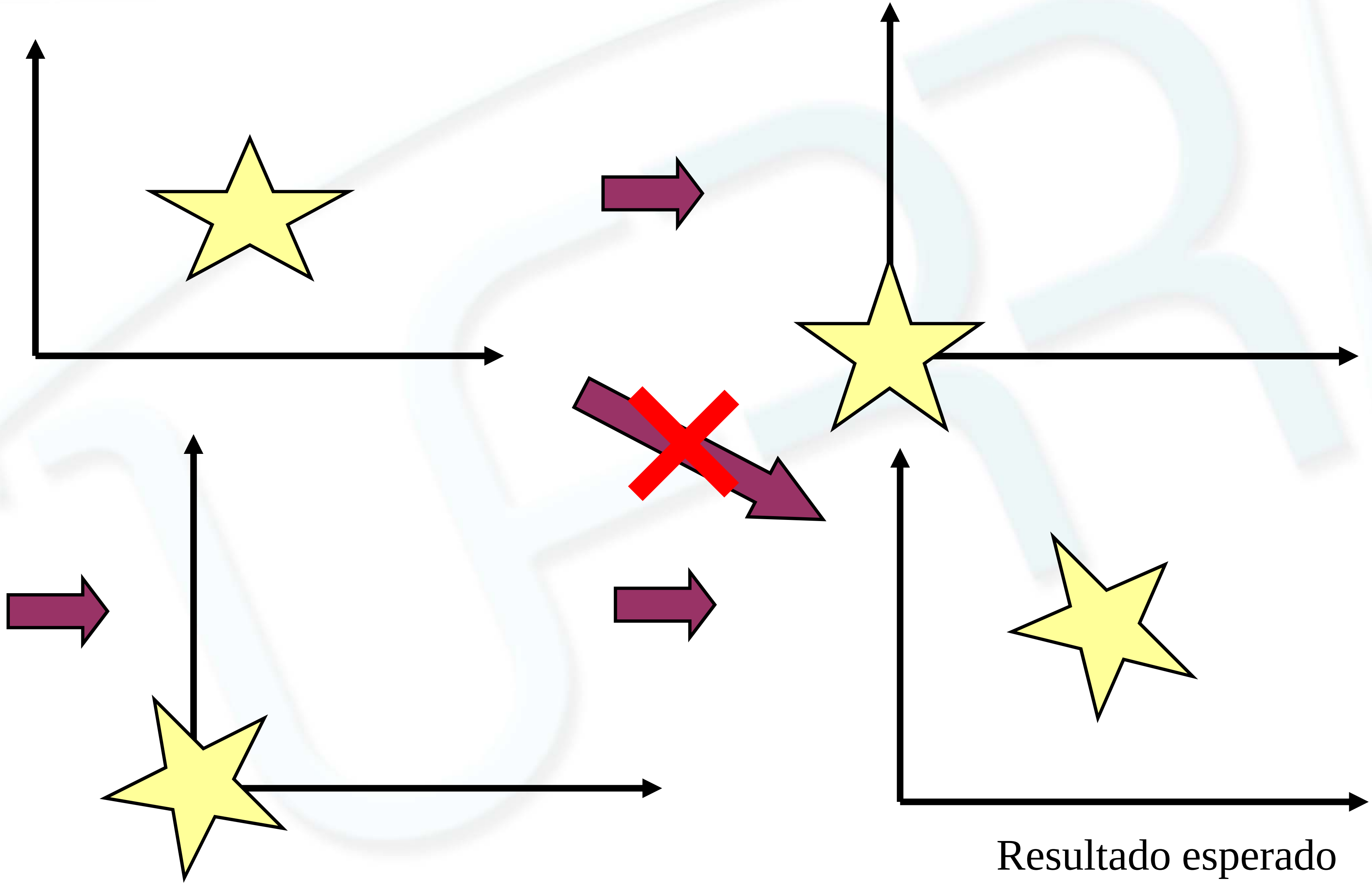


As matrizes apresentadas não possibilitam tal processo de forma direta: devemos combiná-las!!!

Combinação das Transformações (2D)

- **Seria necessário uma combinação das transformações:**
  - ✓Translada o objeto para a origem;
  - ✓Rotaciona do ângulo desejado
  - ✓Faz-se nova translação para a posição original
- **Proposição: desenvolver o processo de forma a acomodar a transformação em uma só matriz!!**

Combinação das Transformações (2D)



Resultado esperado

Combinação das Transformações (2D)

- Seja a transformação:

$$(x, y) \xrightarrow{\text{transf. com uso de } M_1} (x_1, y_1) \xrightarrow{\text{transf. com uso de } M_2} (x_2, y_2)$$

- Existe a matriz que promove a transformação diretamente, dada pelo produto $m_1.m_2$.
- Obs: o produto das matrizes não é comutativo, logo:
  $m_1.m_2 \neq m_2.m_1$
- A ordem das transformações afeta fortemente o resultado final
- a utilização de uma única matriz representa ganho de eficiência

No exemplo dado

A combinação das transformações seria dada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} = T_T$$

Chegamos à seguinte matriz:

$$T_T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ x_1(1-\cos\theta) + y_1.\operatorname{sen}\theta & y_1(1-\cos\theta) - x_1\operatorname{sen}\theta & 1 \end{bmatrix}$$

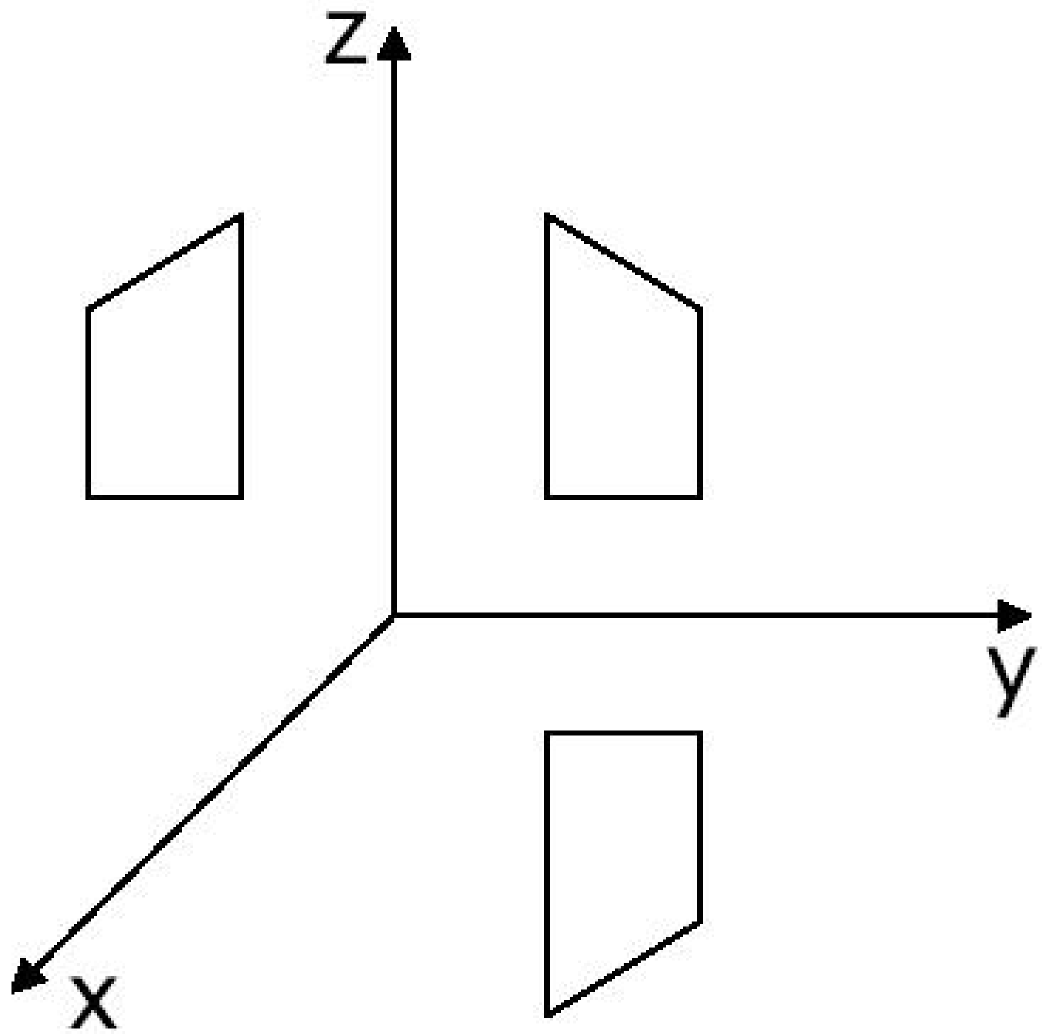
Caso 2: Escala seguida de translação (2D)

- Translada-se o ponto de referência para a origem;
- Aplica-se a escala;
- Translada-se da origem para o ponto de referência.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} = T_{Tz}$$

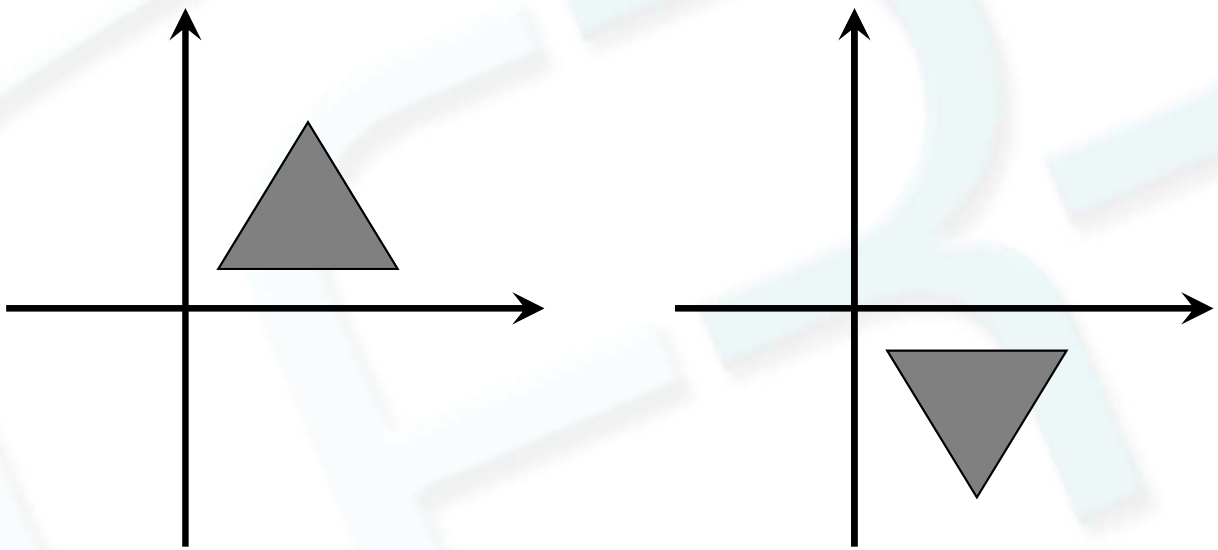
$$T_{Tz} = \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 \\ x_1(1-Ex) & y_1(1-Ey) & 1 \end{bmatrix}$$

Espelhamento



Espelhamento (2D)

- Produção de imagens simétricas com uso de transformações de escala com fatores negativos:



c/ relação a x => Ex = 1 ; Ey = -1
c/ relação a y => Ex = -1 ; Ey = 1
c/ relação a x e y => Ex = -1 ; Ey = -1

Espelhamento - reta qualquer (2D)

1. Traslada-se a figura de modo que um dos pontos da reta de simetria vá para a origem;

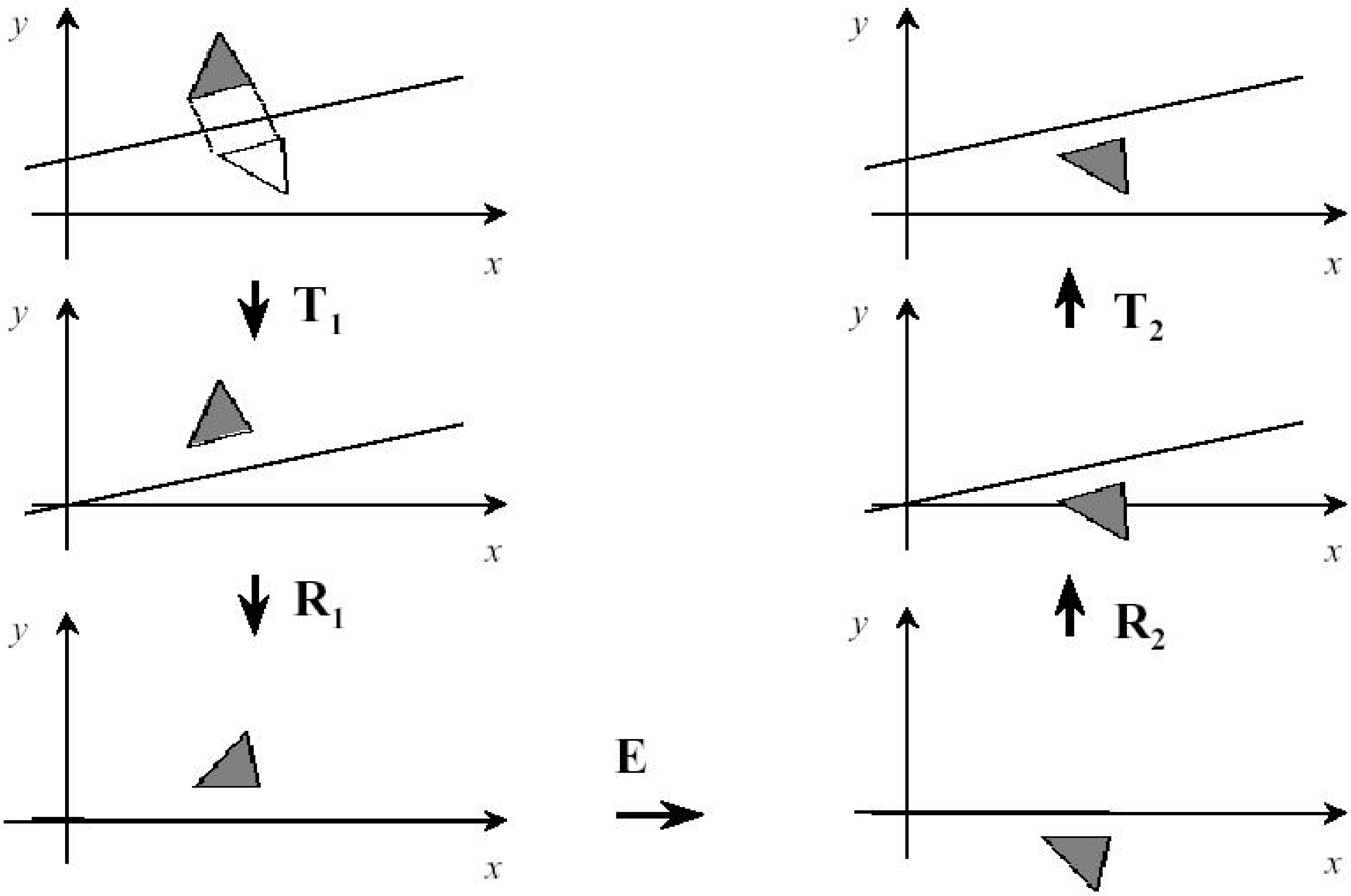
2. Rotaciona-se a figura até que a reta de simetria se torne paralela à um dos eixos do sistema de coordenadas;

3. Espelha-se a figura em relação ao eixo que, neste instante, coincide com a reta de simetria. Caso, seja o eixo Y, usa-se Ex = -1; caso x, Ey - 1;

4. Rotaciona-se a figura em um ângulo oposto ao aplicado em <u>b</u> de forma a retornar a reta de simetria à sua posição original;

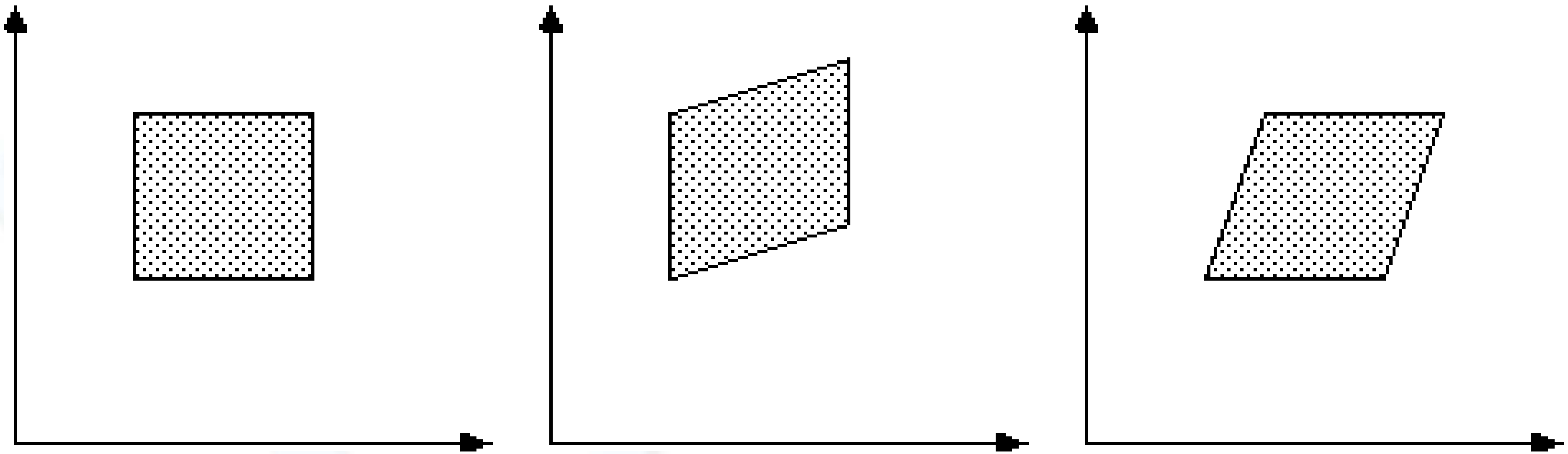
5. Transladar a figura com constantes de deslocamento opostas às aplicadas em <u>a</u> , de modo a voltar a reta de simetria à sua posição;

Espelhamento - reta qualquer (2D)



Cisalhamento – shear

- Distorce a forma do objeto, através da aplicação de escala a uma dada coordenada, em detrimento de outra:



Cisalhamento em Y

Cisalhamento em X

Cisalhamento – shear (2D)

- **Matrizes**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ shx & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & shy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento em X

Cisalhamento em Y

Considerações sobre eficiência:

Uma combinação de matrizes de rotação (R), escala (S) e transformação (T) pode produzir uma matriz de forma:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & Tx \\ r_{21} & r_{22} & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

chegando a muitas operações: 9 multiplicações e 6 adições, podemos exigir menos operações com a exclusão da última linha, chegando a:

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & T_y \end{bmatrix}_{(2X3)} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$