Fisika Kuantum

Hendrik Santoso Sugiarto

IBDA4221 – Selected Topic in Computer Technology

Quantum Computing

Capaian Pembelajaran

- Breakdown of Classical Physics
- Old Quantum Theory:
  - Planck: Quantization
  - Einstein: Photoelectric Effect
  - Bohr: Atomic Orbit
  - De Broglie: Wave-Particle Duality
- Modern Quantum Theory:
  - Schrodinger: Wave Mechanics
  - Born: Probabilistic Interpretation
  - Pauli: Exclusion Principle
  - Heisenberg: Uncertainty Principle & Matrix Mechanics
  - Dirac: Bracket Notation & Relativistic Quantum Mechanics
  - Standard Model
- Wavefunction
- Komutator

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Breakdown of Classical Physics

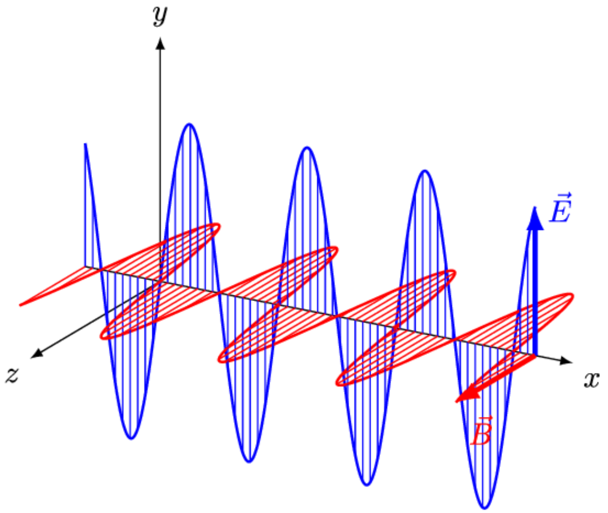
God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Ancient Physics

- Konteks: Greek Philosophy
- Kontributor utama: Aristotle, Ptolemy
- Asumsi dasar:
  - Form-Matter (celestial-terrestial)
  - Teleologis
  - Filosofis
- Kontribusi:
  - Mengajukan penjelasan filosofis lepas dari mitologi

Classical Physics

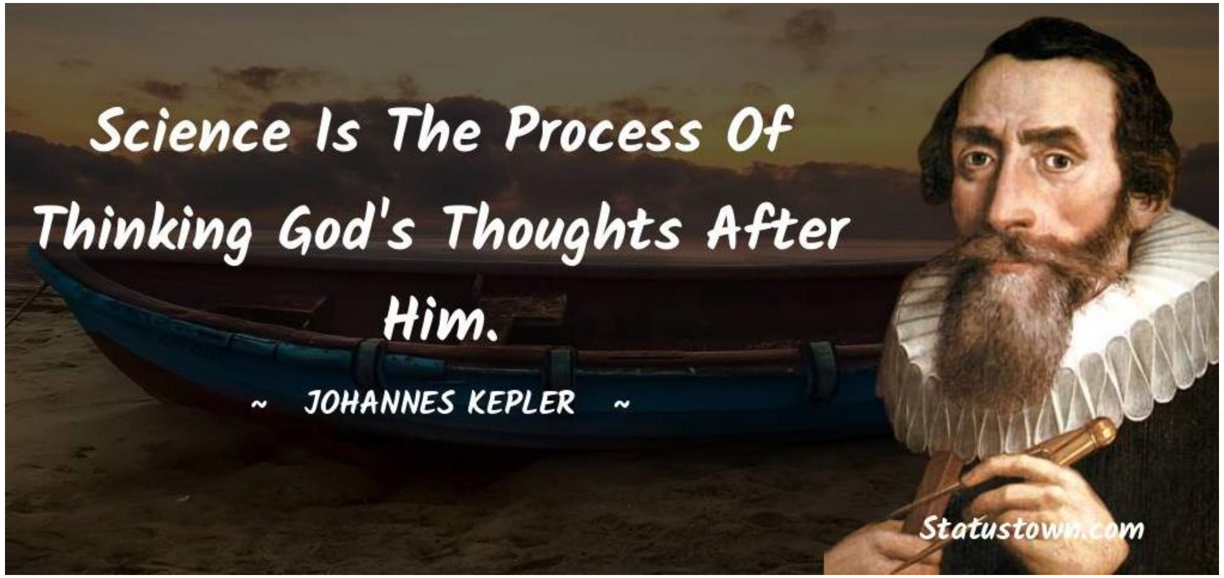
- Konteks: Reformation & Enlightenment
- Kontributor utama: Newton, Lagrange, Hamilton, Maxwell
- Asumsi dasar:
    - Universal & Deterministik
    - Interaksi lokal
    - Empiris
- Kontribusi:
    - Newton's Law: menyatukan hukum langit dan bumi
    - Maxwell's Equation: Menyatukan listrik, magnet, dan cahaya

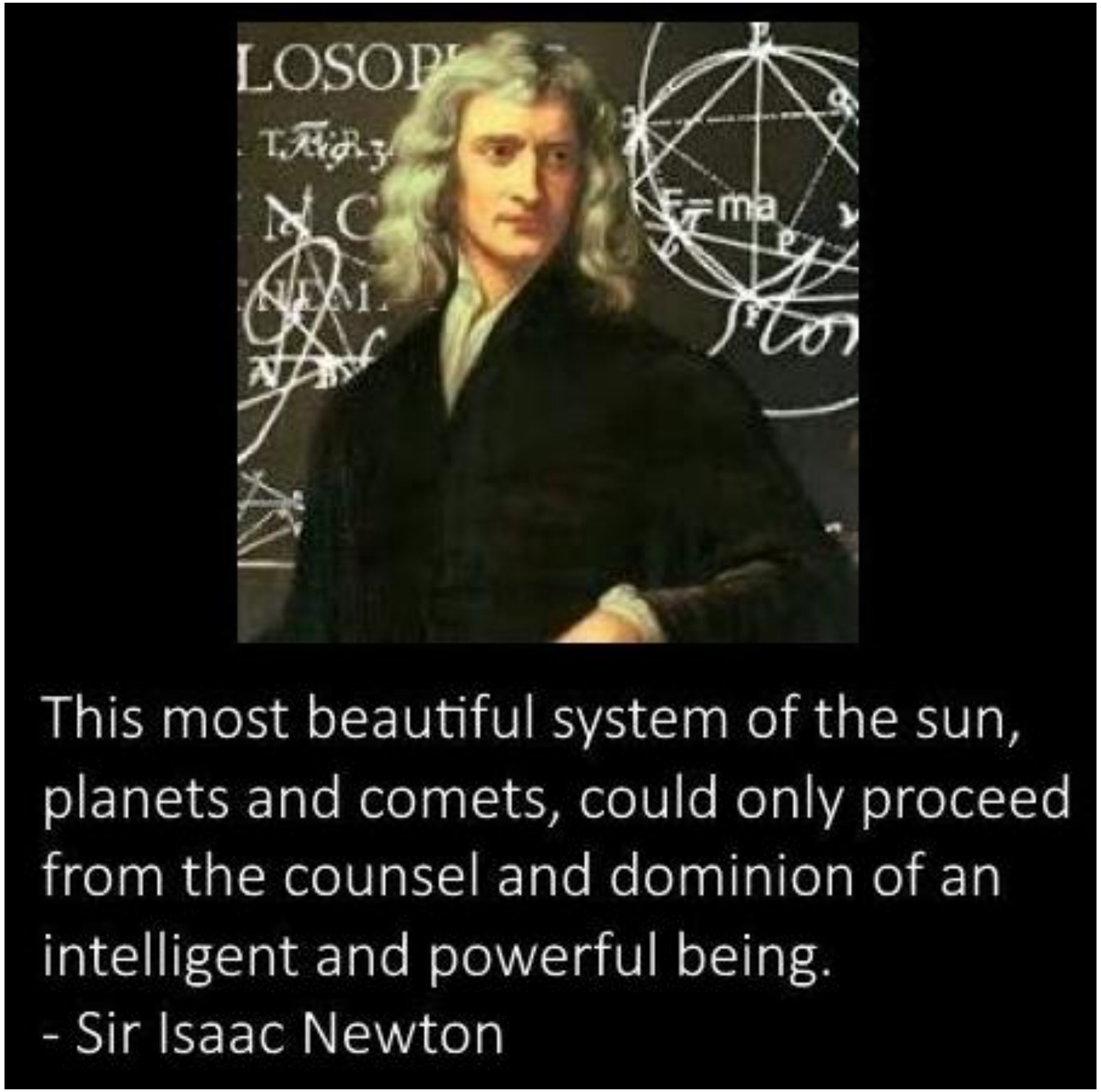


CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Asumsi

- Fisika klasik digerakan oleh asumsi adanya pencipta

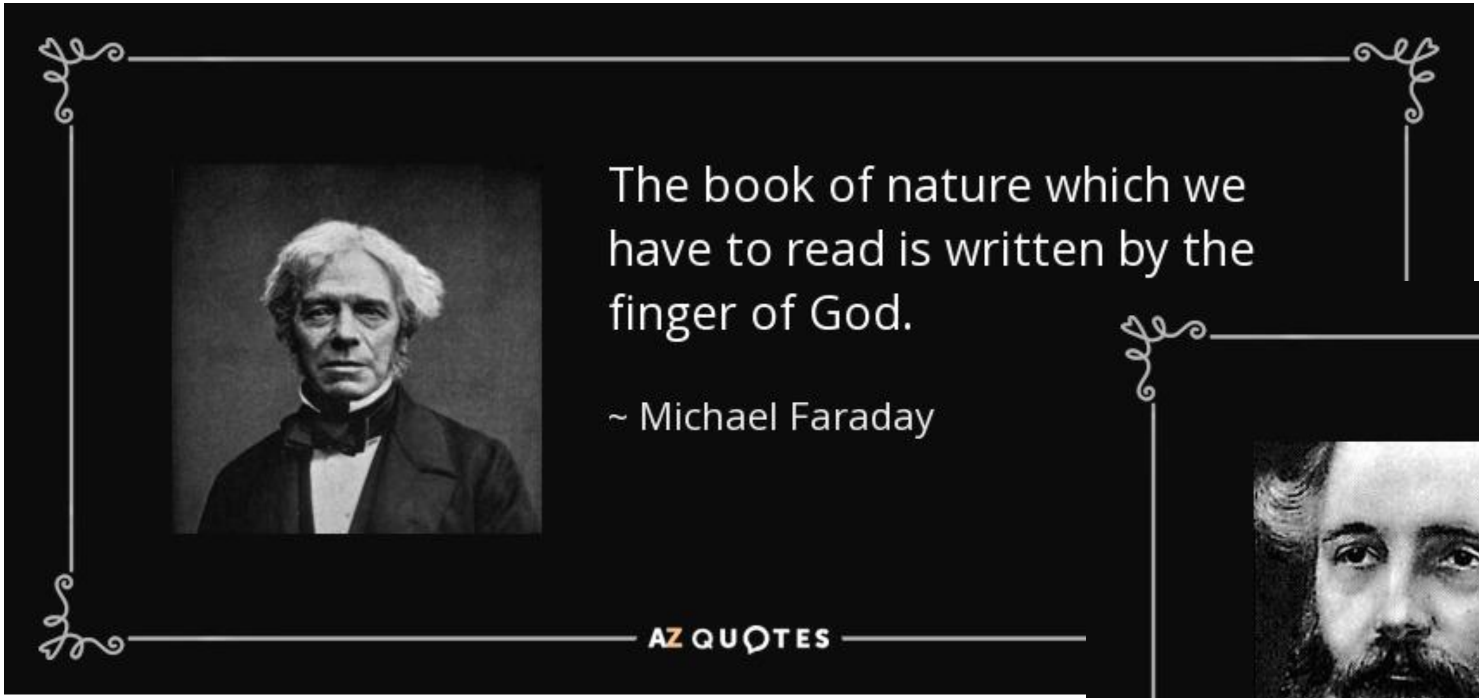


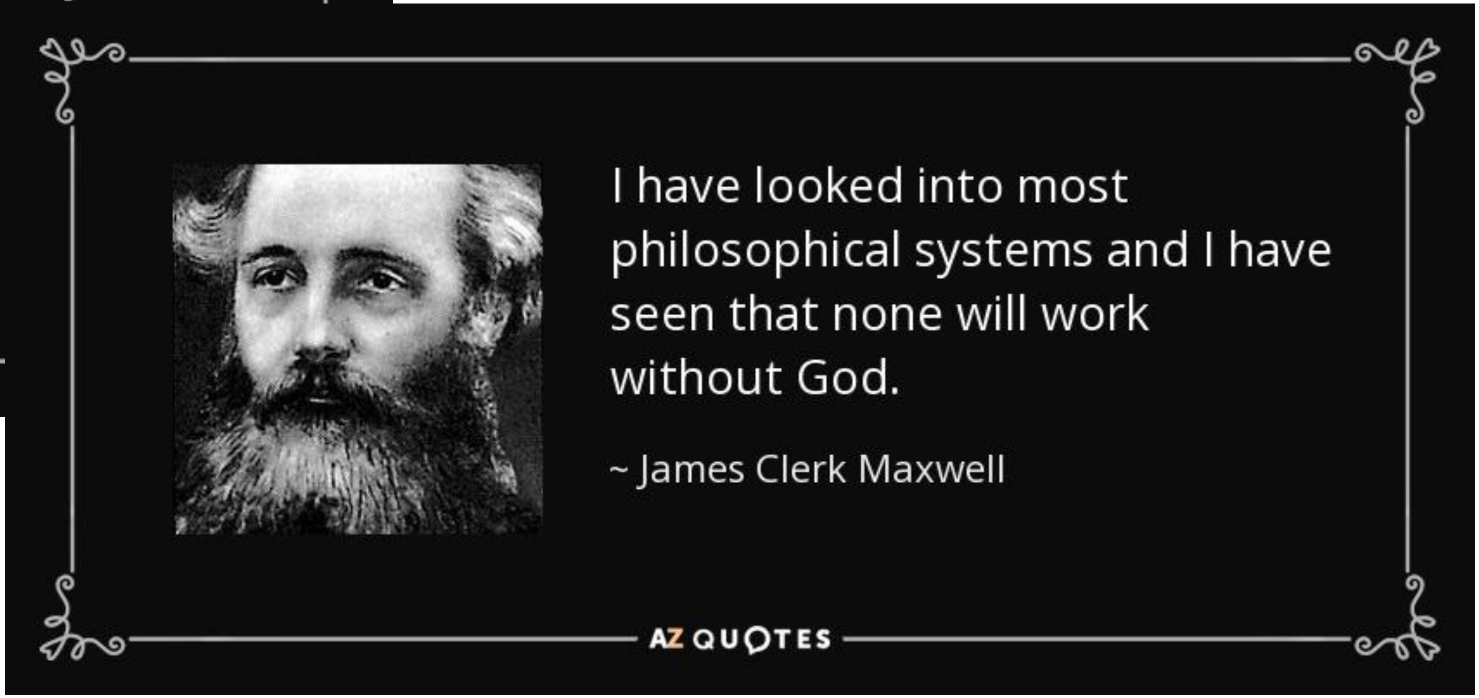


CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Asumsi

- Penemuan electromagnetism juga digerakan asumsi yang sama

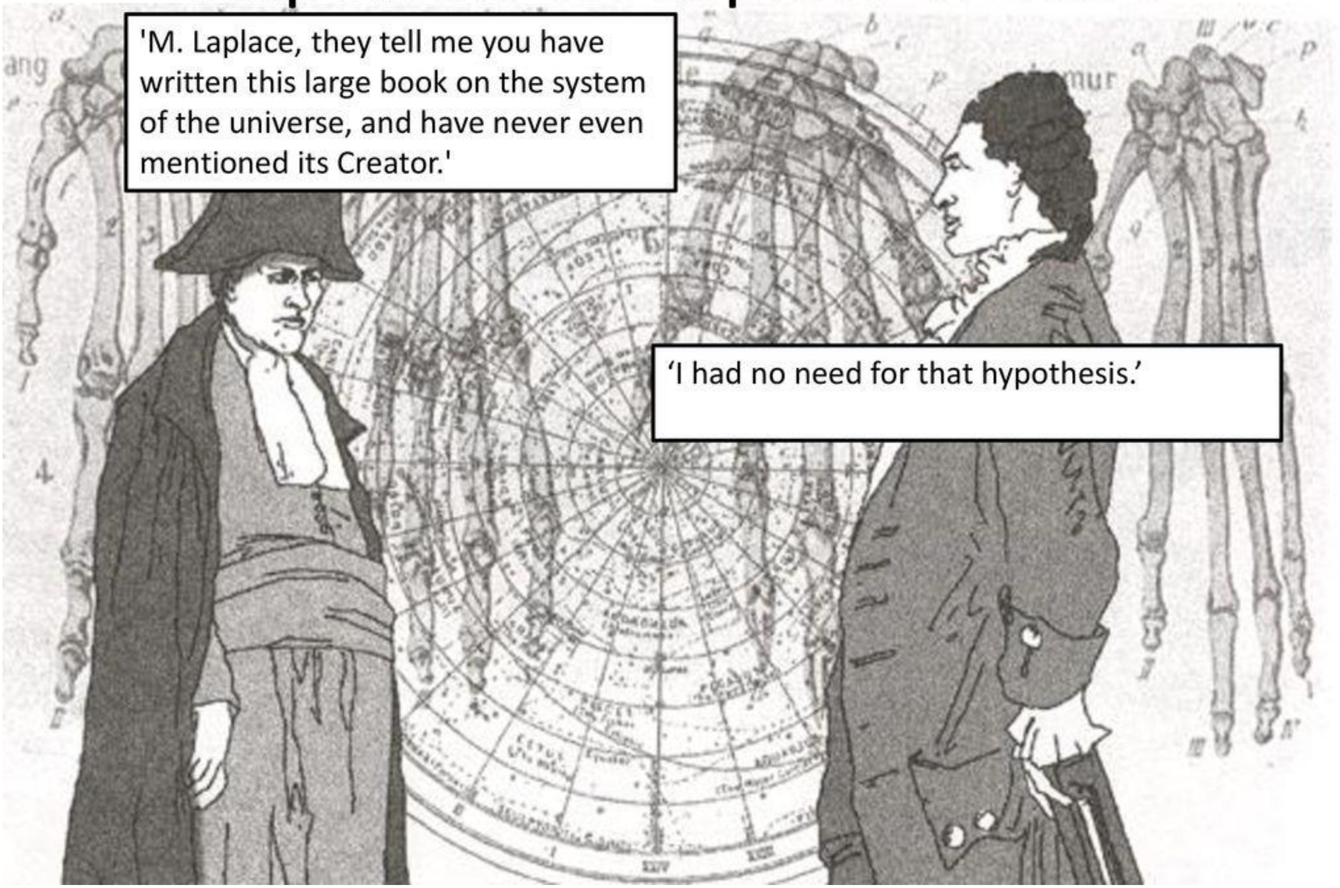




Enlightenment and Autonomy

- Enlightenment menekankan otonomi ciptaan akan Pencipta
- Tuhan digeser jauh keatas (Deism)

Napoleon Vs. Laplace c. 1814

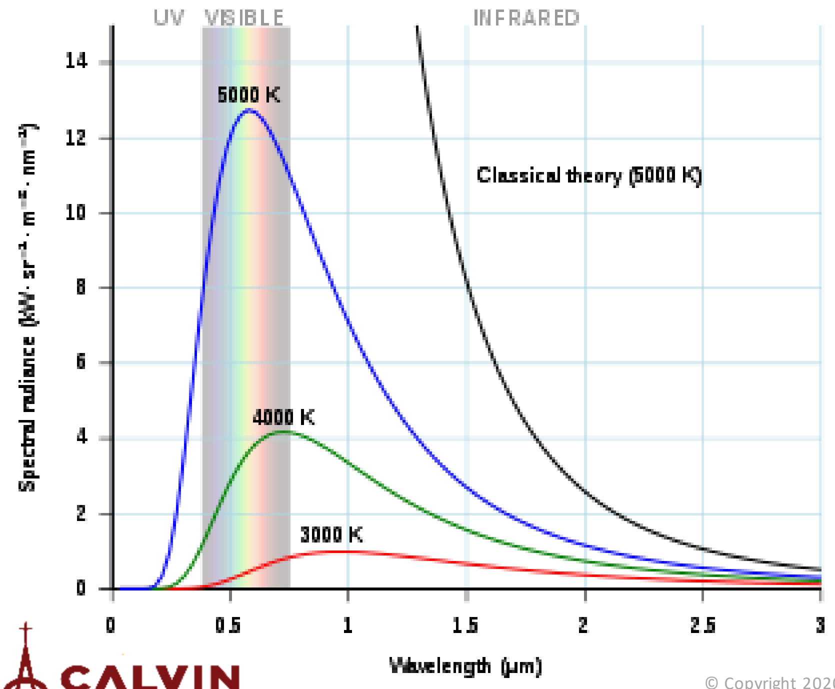


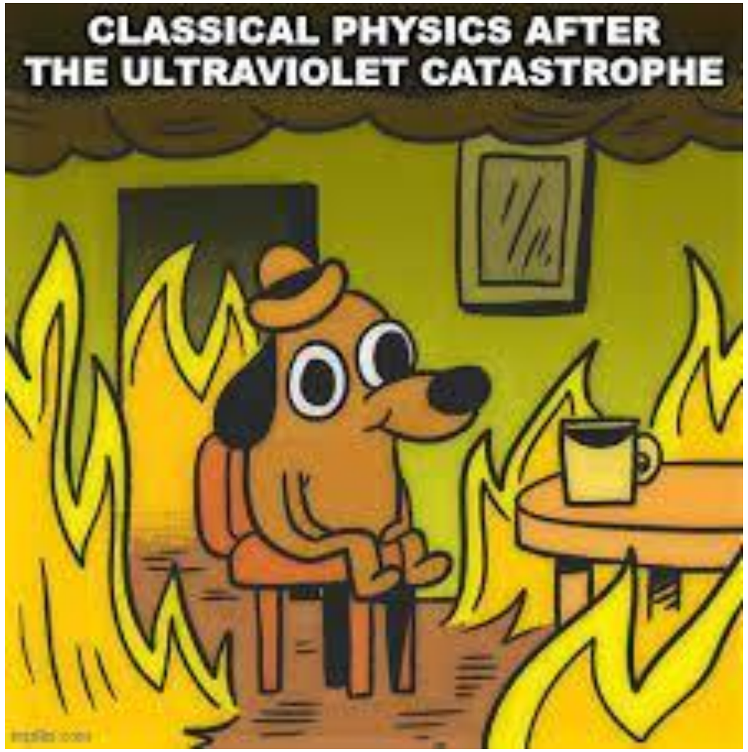
Runtuhnya Fisika Klasik

- Bencana ultraviolet
- Paradoks pada stabilitas orbit elektron
- Eksperimen celah ganda
- Efek fotoelektrik
- Polarisasi cahaya
- Eksperimen Stern-Gerlach
- Dll

Ultraviolet Catasthrope

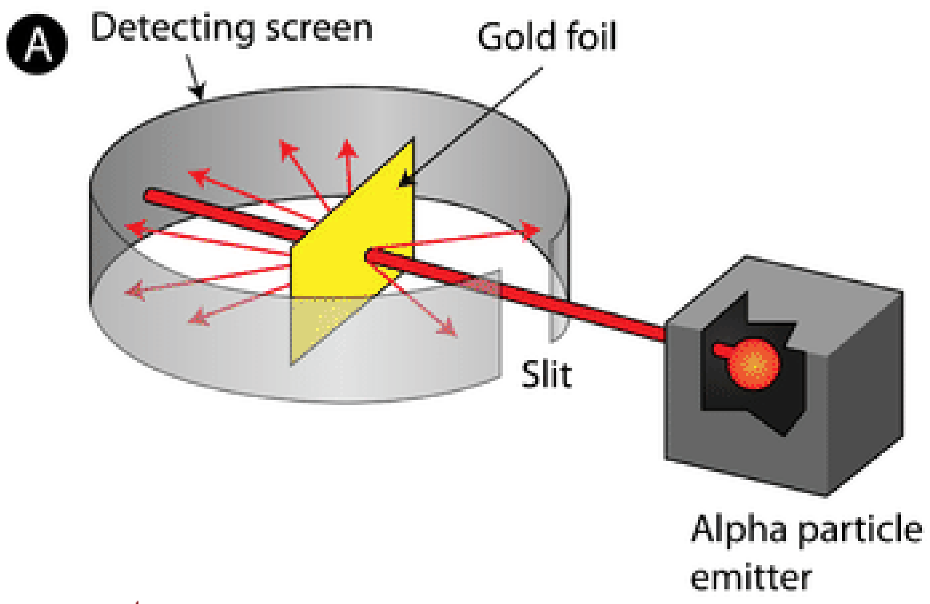
- Benda panas akan bersinar (menghasilkan radiasi)
- Benda yang sinarnya hanya berasal dari radiasi diri sendiri (bukan refleksi) disebut dengan “black body” → contoh matahari, bintang
- Pada 1900 Rayleigh dan Jeans menghitung frekuensi radiasi dari benda panas
  - hasilnya frekuensi ultraviolet yang sangat besar

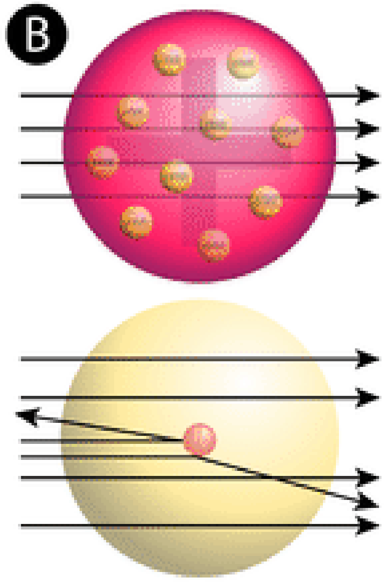


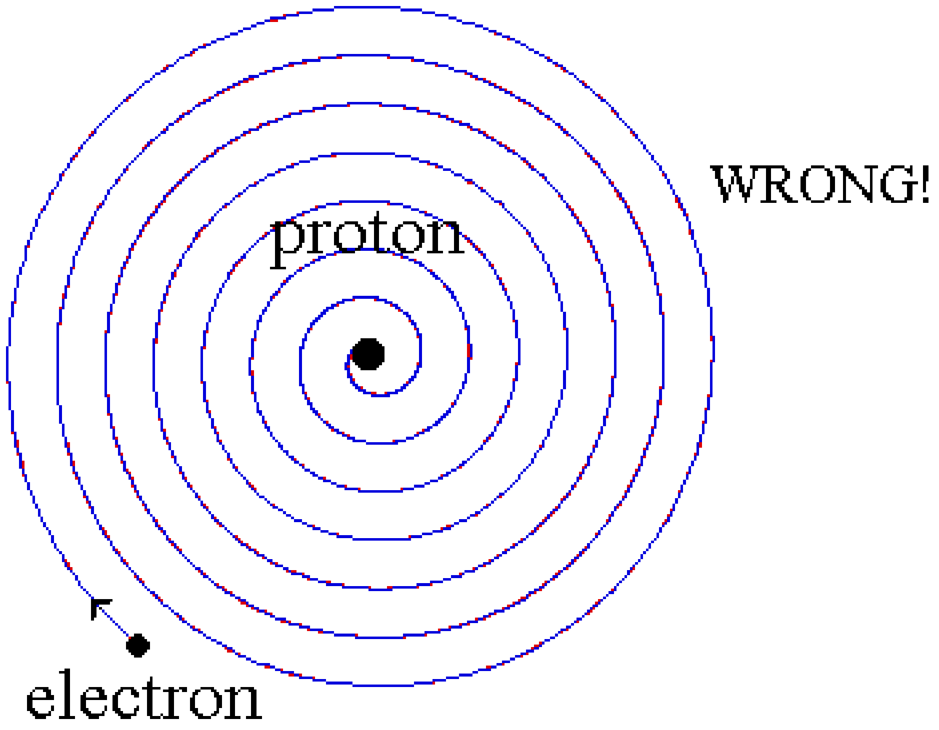


Orbitals Stability

- Rutherford: elektron mengelilingi inti atom seperti planet mengelilingi bintang
- Tapi menurut hukum maxwell, electron yang berakselerasi akan menghasilkan radiasi dan kehilangan energi
- Sehingga menurut prediksi fisika klasik, elektron akan jatuh ke dalam inti atom







Double Slit Experiment

- Jika beberapa partikel ditembakan melalui dua lubang akan membentuk pola interferensi, sekalipun hanya 1 partikel per tembakan

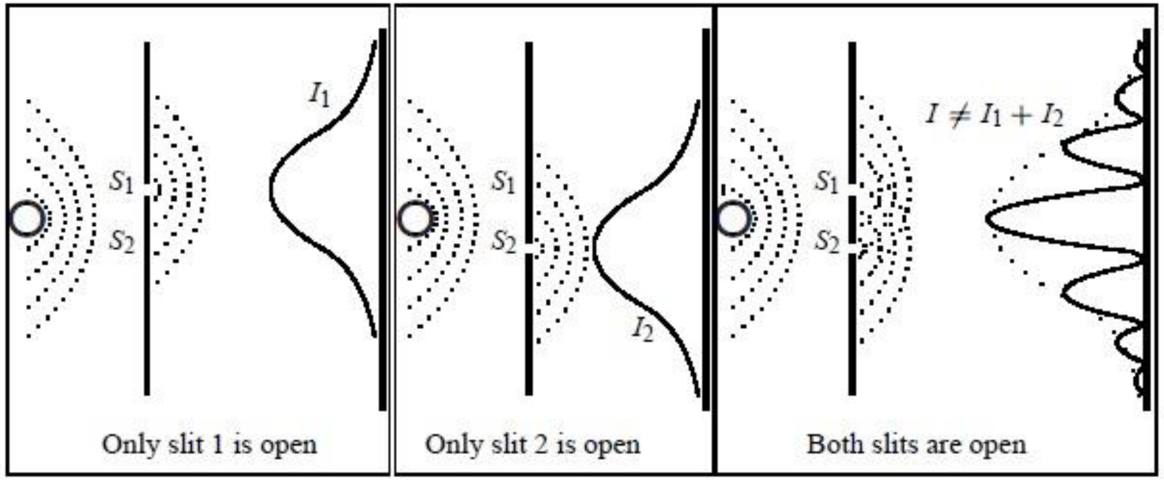
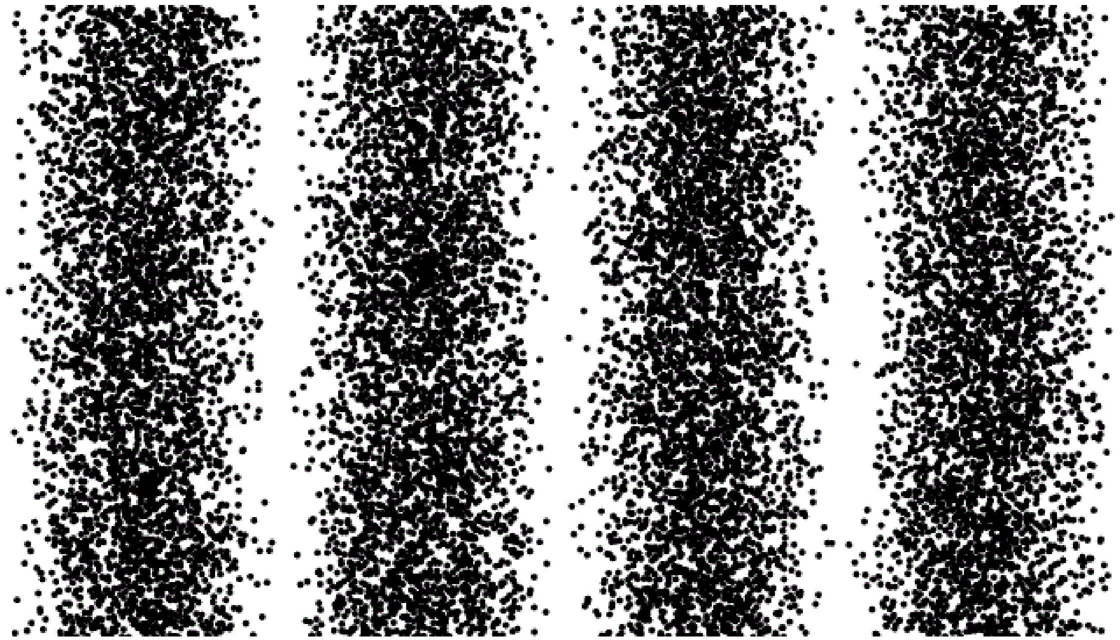
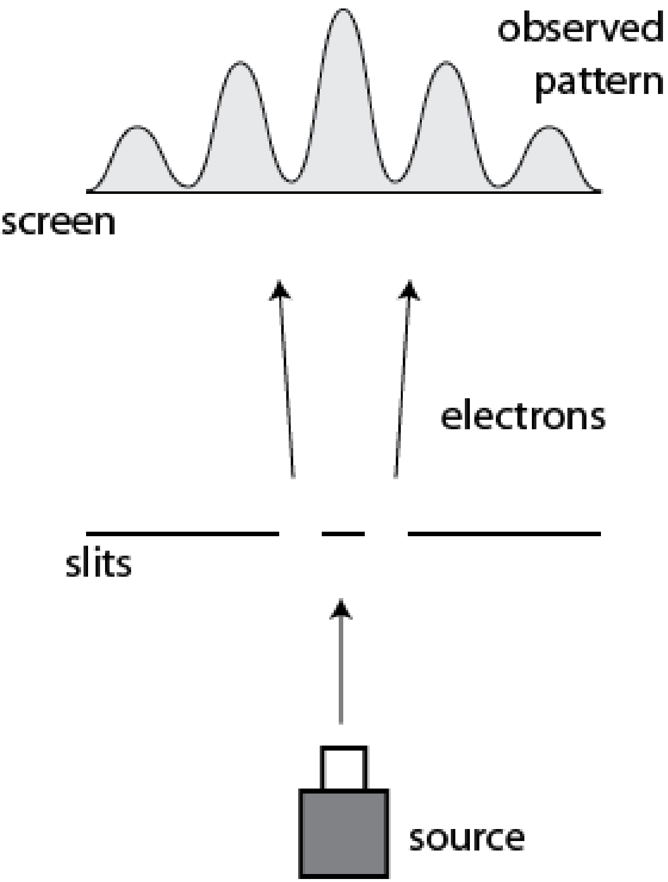


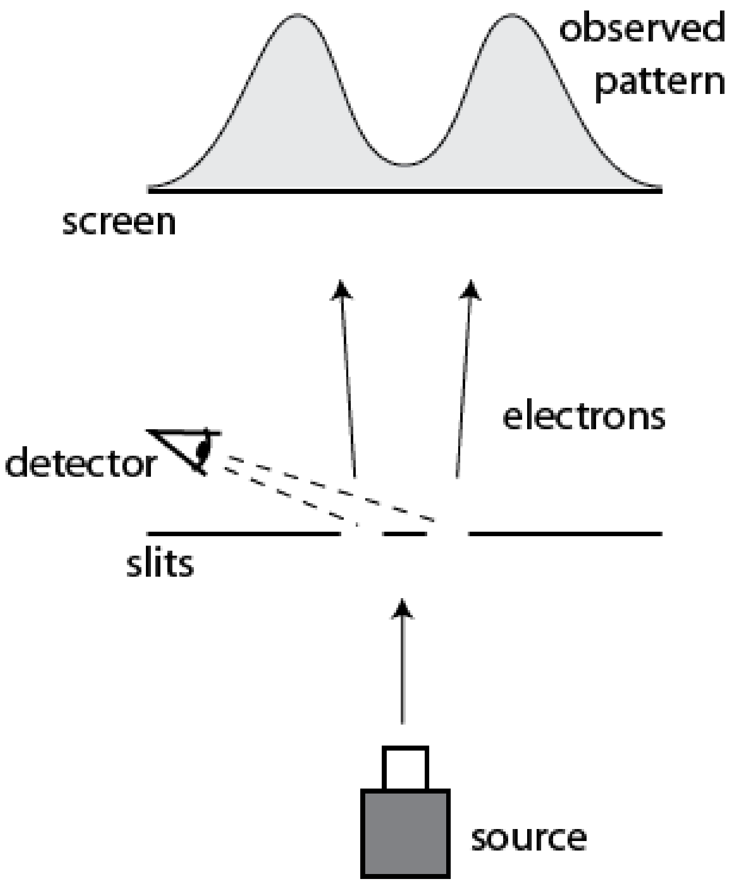
Figure 1.9 The double-slit experiment: S is a source of *waves*, I_1 and I_2 are the intensities recorded on the screen when only S_1 is open, and then when only S_2 is open, respectively. When both slits are open, the total intensity is no longer equal to the sum of I_1 and I_2; an *oscillating* term has to be added.

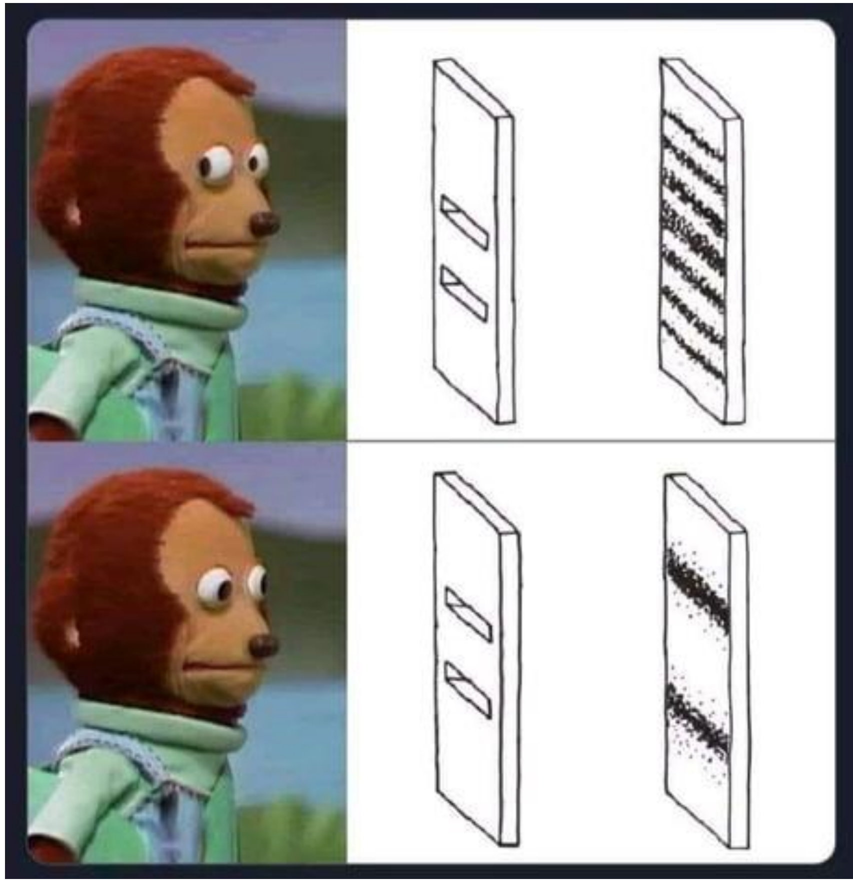


Observer

- Hasil interferensi berubah tergantung posisi observasi

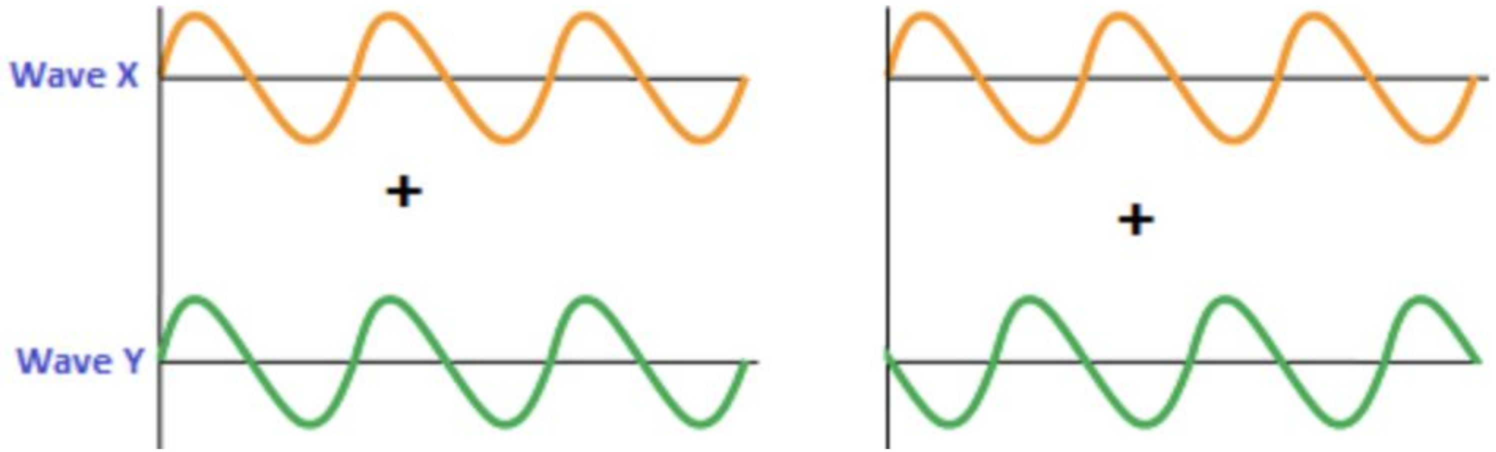






Uji Pemahaman

- Salah satu sifat gelombang adalah interferensi. Apakah hasil akhir dari resultan 2 gelombang berikut?

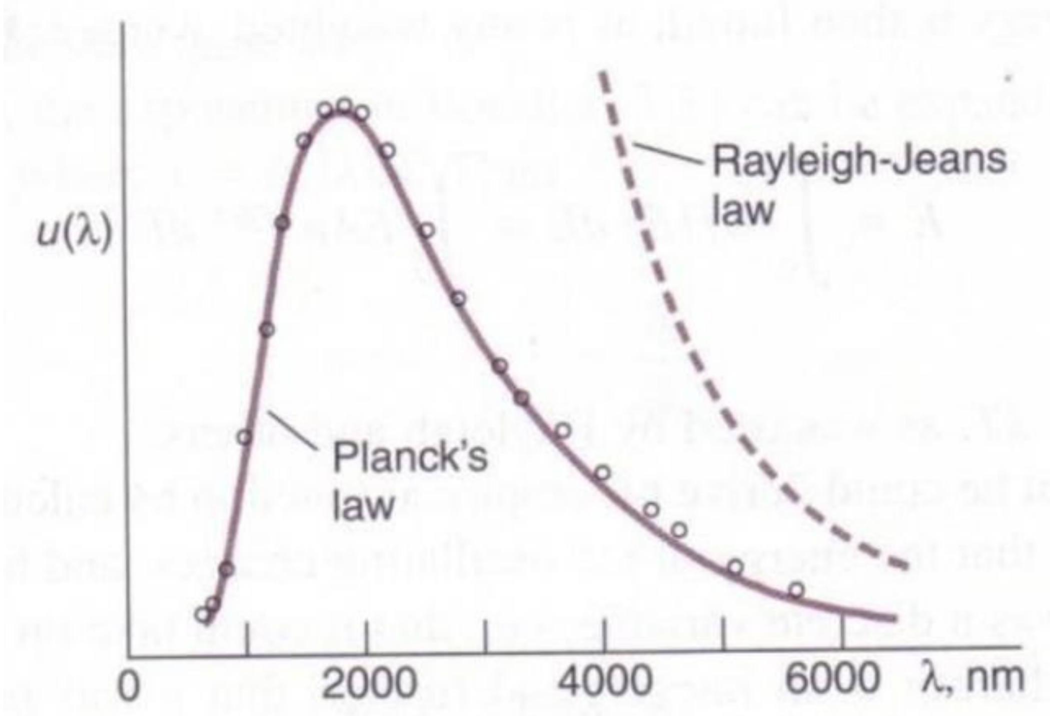


Old Quantum Theory

God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Planck: Quantization

- Selama ini cahaya dimengerti sebagai gelombang electromagnet
- Planck: cahaya dipancarkan secara paket-paket kecil (quantized)
- Energy berbanding lurus dengan frekuensi:
  - 1 paket energi bernilai $E = hf$,
  - n paket energi bernilai $E_n = nhf$
- Energy rata-rata adalah $\overline{E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p(n)$
- $\overline{E_n} = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\frac{E_n}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{kT}}} = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} nhf\, e^{-\frac{nhf}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nhf}{kT}}}$
- Misal $x = e^{-\frac{hf}{kT}}$
- $\overline{E_n} = \dfrac{hf\left(x+2x^2+3x^3+\cdots\right)}{(1+x+x^2+\cdots)} = \dfrac{hfx}{1-x} = \dfrac{hf}{e^{hf/kT}-1}$

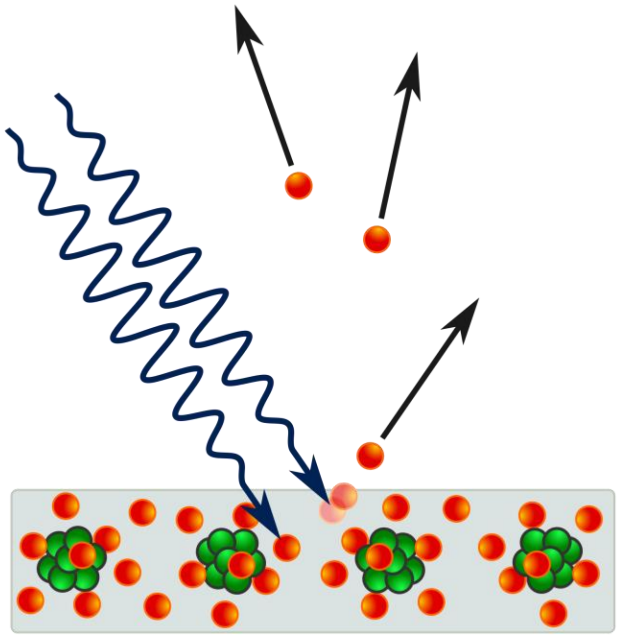


Quantization Lain

- Informasi: satuan terkecil adalah 1 byte
- Jaringan: satuan terkecil adalah 1 sel
- Populasi: satuan terkecil adalah 1 manusia
- Uang: satuan terkecil adalah koin 100 rupiah / permen

Einstein: Photoelectric Effect

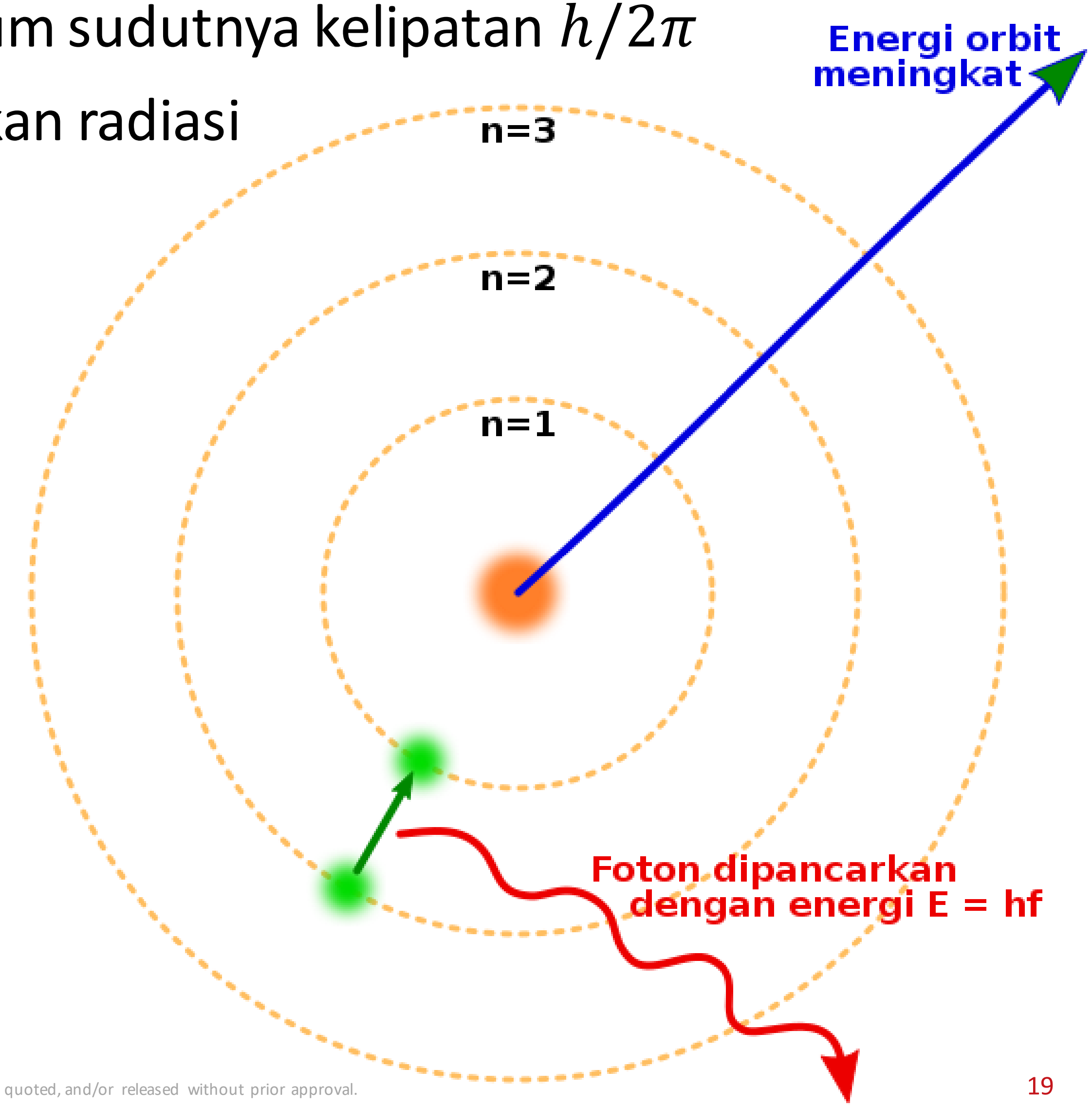
- Pada 1887: Hertz menyinari keping metal dengan cahaya dan terjadi spark
- Metal yang berbeda membutuhkan frekuensi minimum yang berbeda
  - Menambah intensitas→menghasilkan lebih banyak electron, tanpa menambah energinya
  - Meningkatkan frekuensi→menghasilkan energi lebih tinggi, tanpa menambah jumlahnya
- Einstein menggunakan konsep quanta dari planck untuk menjelaskan fenomena ini
- Cahaya adalah kumpulan partikel yang energinya mengikuti $E = hf$
- $K_{max} = hf - hf_0$



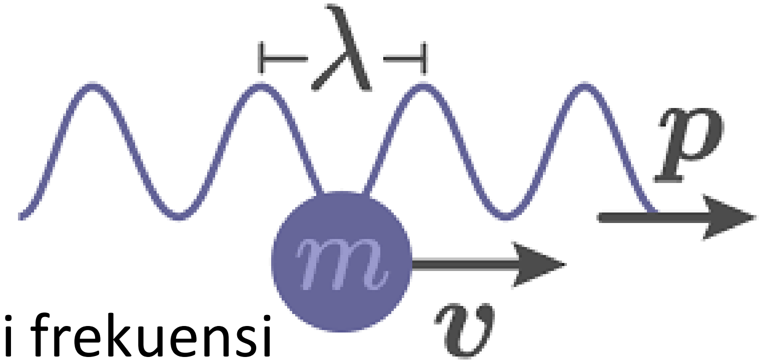
CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Bohr: Atomic Orbit

- Electron bergerak dalam orbit yang momentum sudutnya kelipatan $h/2\pi$
- Selama di orbit ini, electron tidak memancarkan radiasi
- $\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, $L = mvr = \frac{nh}{2\pi} \rightarrow v = \frac{n\hbar}{mr}$
- $f = \frac{E_i - E_f}{h} \propto \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$



De Broglie: Wave Particle Duality



- Segala sesuatu memiliki sifat gelombang sekaligus partikel
- De Broglie: gelombang memiliki momentum, partikel memiliki frekuensi
- $E = hf,\ c = \lambda f,\ E = \frac{hc}{\lambda} = pc$
- $\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow$ makin kecil λ, makin mirip partikel (misalnya: proton)

Paradoks	**Gelombang**	**Partikel**
Lokasi	Menyebar	Terletak di suatu posisi
Interferensi	Berpola interferensi	Tidak ada pola interferensi
Superposisi	Akumulasi bisa lebih besar atau lebih kecil dari masing-masing gelombang individu	Akumulasi sama dengan jumlah masing-masing partikel individu

Uji pemahaman

- Berapakah energi terkecil yang dimiliki cahaya?

Modern Quantum Theory

God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY


Piccard
Henriot
Ehrenfest
Herzen
Donder
Schrödinger
Verschaffelt
Pauli
Heisenberg
Fowler
Brillouin
Debye
Knudsen
Bragg
Kramers
Dirac
Compton
Broglie
Born
Bohr
Planck
Curie
Lorentz
Einstein
Langevin
Guye
Wilson
Richardsc
Langmuir

Schrodinger: Wave Mechanics

- Jika di fisika klasik gerakan partikel diatur oleh hukum newton, apakah yang mengatur Gerakan gelombang-partikel dalam fisika kuantum?
- 3 Asumsi:
  - Konsisten dengan postulat de Broglie→ $\lambda = \frac{h}{p}$ dan Planck→ $f = \frac{E}{h}$
  - Konsisten dengan kekekalan energi→ $E = \frac{p^2}{2m} + V$
  - Konsisten dengan sifat gelombang: solusi linear→$\psi(x,t) = c_1\psi_1(x,t) + c_2\psi_2(x,t)$
- Kekekalan energi: $hf = \frac{h^2}{2m\lambda^2} + V \rightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x,t)$, dimana $k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = 2\pi f$
- Gunakan fungsi gelombang $\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} = \cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)$
- $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -i\omega e^{i(kx-\omega t)}, \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} = ike^{i(kx-\omega t)}, \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 e^{i(kx-\omega t)}$
- Schrodinger Equation: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \rightarrow H\psi(x,t) = E\psi(x,t)$
- Dimana Hamiltonian (energi kinetik+potensial), $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$

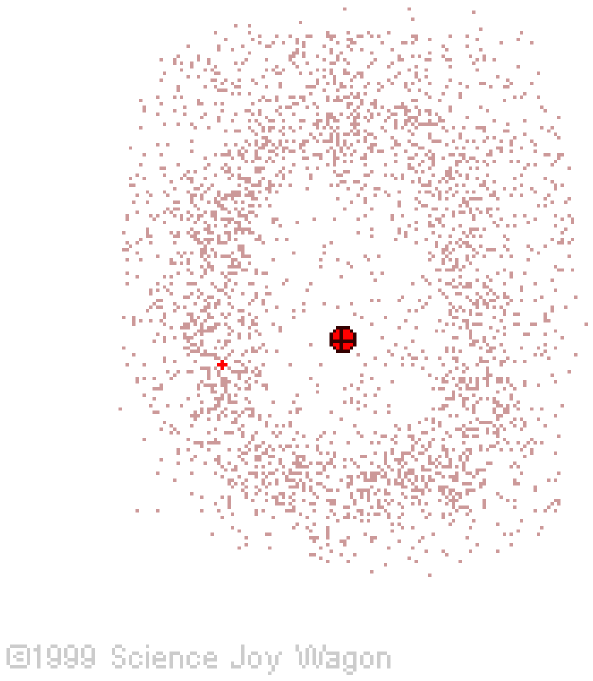
Born: Probabilistic Interpretation

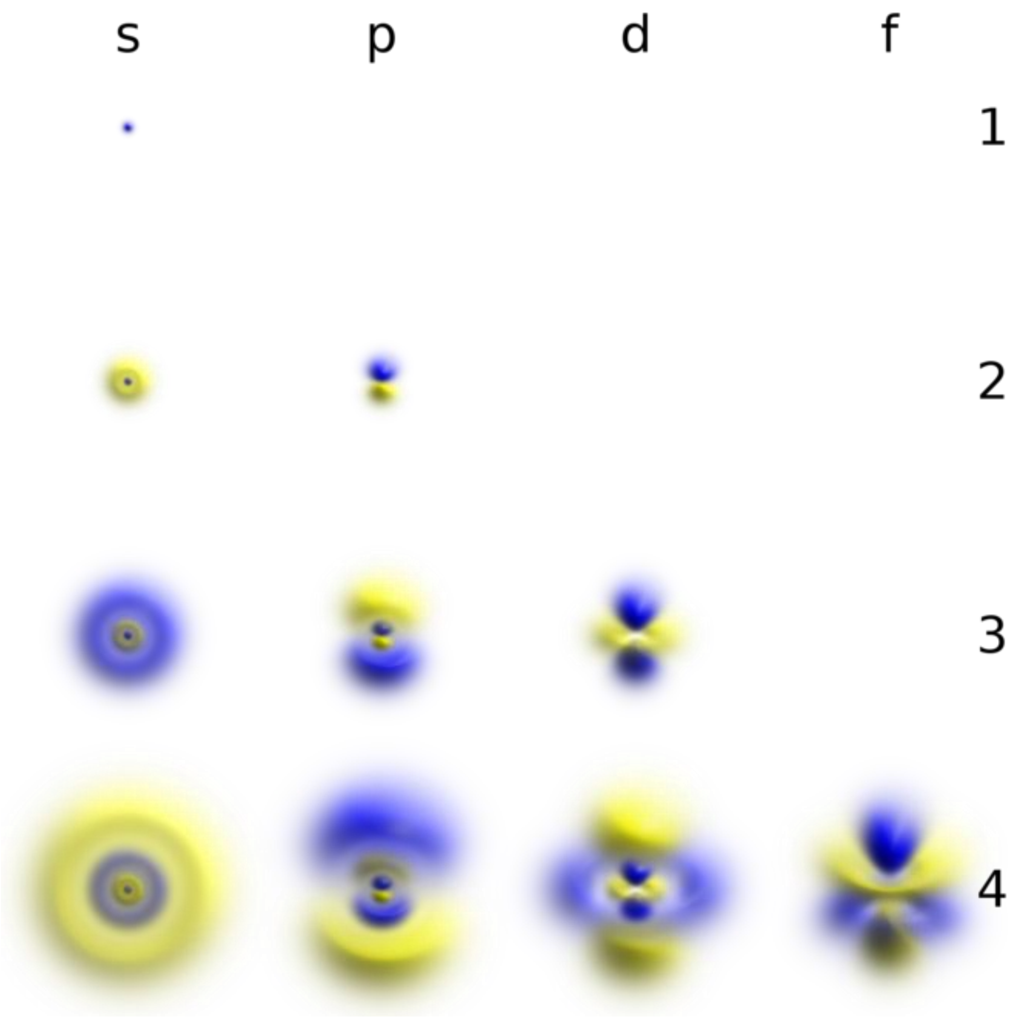
- Makhluk apakah wave function ini?
- Born: peluang menemukan partikel: $P(x,t) = \psi^*(x,t)\psi(x,t)$
- Peluang menemukan partikel diantar x dan $x + dx$: $P(x,t)dx = \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx$
- Posisi rata-rata: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx$
- Dengan postulat: $p \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ dan $\mathrm{E} \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, dimana p dan E adalah operator
- Momentum rata-rata: $\bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)p\psi(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} -i\hbar\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)dx$
- Energi rata-rata: $\bar{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)E\psi(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)dx$
- $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -i\omega\psi(x,t) = -\frac{iE}{\hbar}\psi(x,t)$, $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} = ik\psi(x,t) = \frac{ip}{\hbar}\psi(x,t)$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Pauli: Exclusion Principle

- Pauli: Setiap partikel identic dengan spin=1/2 (fermion), tidak dapat menempati quantum state yang sama
- Orbitals atom mengikuti schrodinger equation



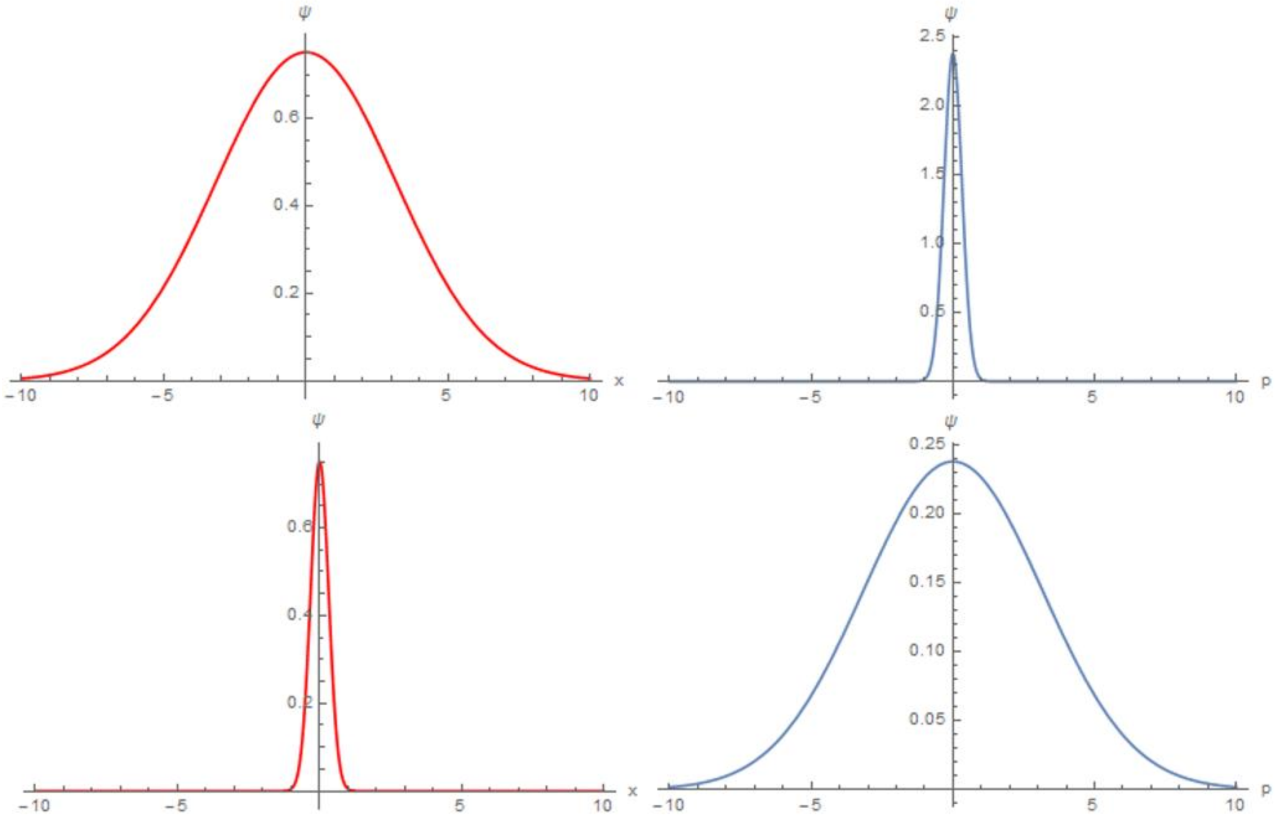


Uji Pemahaman

- Sebuah qubit memiliki wave function $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$ Berapakah peluang mengukur 1?

Heisenberg: Uncertainty Principle

- Mengatur fundamental limit akurasi 2 variable fisika yang tidak komutatif (misalnya posisi dan momentum)→ $\Delta\hat{p}\Delta\hat{x} \geq \hbar/2$
- Bentuk umum: $\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle|$
- Dimana $[A, B] = AB - BA$
- $\Delta\hat{p}\Delta\hat{x} \geq \frac{1}{2}|\langle[p, x]\rangle| = \frac{\hbar}{2}$



Heisenberg: Matrix Mechanics

- Hubungan yang bersifat tidak komutatif membuat banyak orang kebingungan, sampai mereka menyadari suatu teori matematika yang jarang digunakan yaitu matriks
- Mekanisme quantum mechanics dengan menggunakan wave function (Schrodinger picture) dapat direpresentasikan secara matrix (Heisenberg picture)
- Heisenberg Equation:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

- Dimana A adalah observables

	Schrodinger Picture	**Heisenberg Picture**
Wave function	Berubah	Konstan
Observables / Operators	Konstan	Berubah

Uji Pemahaman

- Apakah pauli-y gate, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ dan pauli-x gate, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ komutatif?

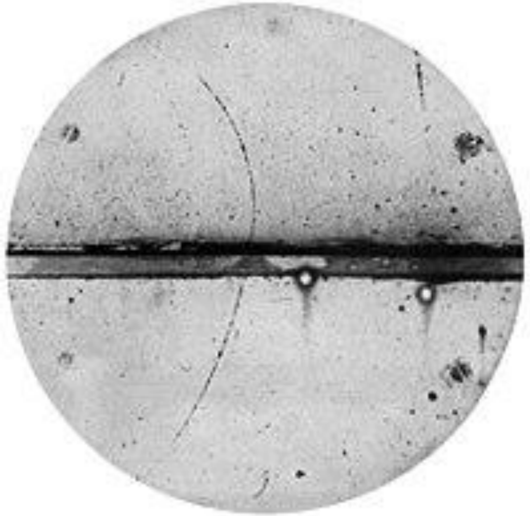
Dirac: Bracket Notation

- Notasi bracket $\langle\psi|\psi\rangle$ terdiri dari bra $\langle\psi|$ dan ket $|\psi\rangle$ yang merupakan wave function (complex vector) yang hidup di Hilbert Space
- Ket $|\psi\rangle$ dapat direpresentasikan dalam vektor basis lain: $|\psi\rangle = \sum_i^N c_i|u_i\rangle$
- $\langle\phi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_N^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \int \phi^*(x,t)\psi(x,t)dx$ adalah dot product antara $|\phi\rangle$ dan $|\psi\rangle$
- Maka peluang i adalah $\langle u_i|\psi\rangle = c_i^* c_i$, dimana $|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1$
- Jika terdapat operator A: $\langle\psi|A|\psi\rangle$ dimana $A|\psi\rangle$ merupakan operasi A terhadap $|\psi\rangle$
- Formalisme notasi ini akan dibahas lebih detail di pertemuan berikutnya

Dirac: Relativistic Quantum Mechanics

- Persamaan Schrodinger bersifat non-relativistic
- Persamaan Dirac: $\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - (mc/\hbar)^2\right)\psi = 0$
- Memprediksi keberadaan positron
- Bentuk medan relativistik membuka paradigma baru: quantum field theory

Cloud chamber photograph by C. D. Anderson of the first positron ever identified. A 6 mm lead plate separates the chamber. The deflection and direction of the particle's ion trail indicate that the particle is a positron.

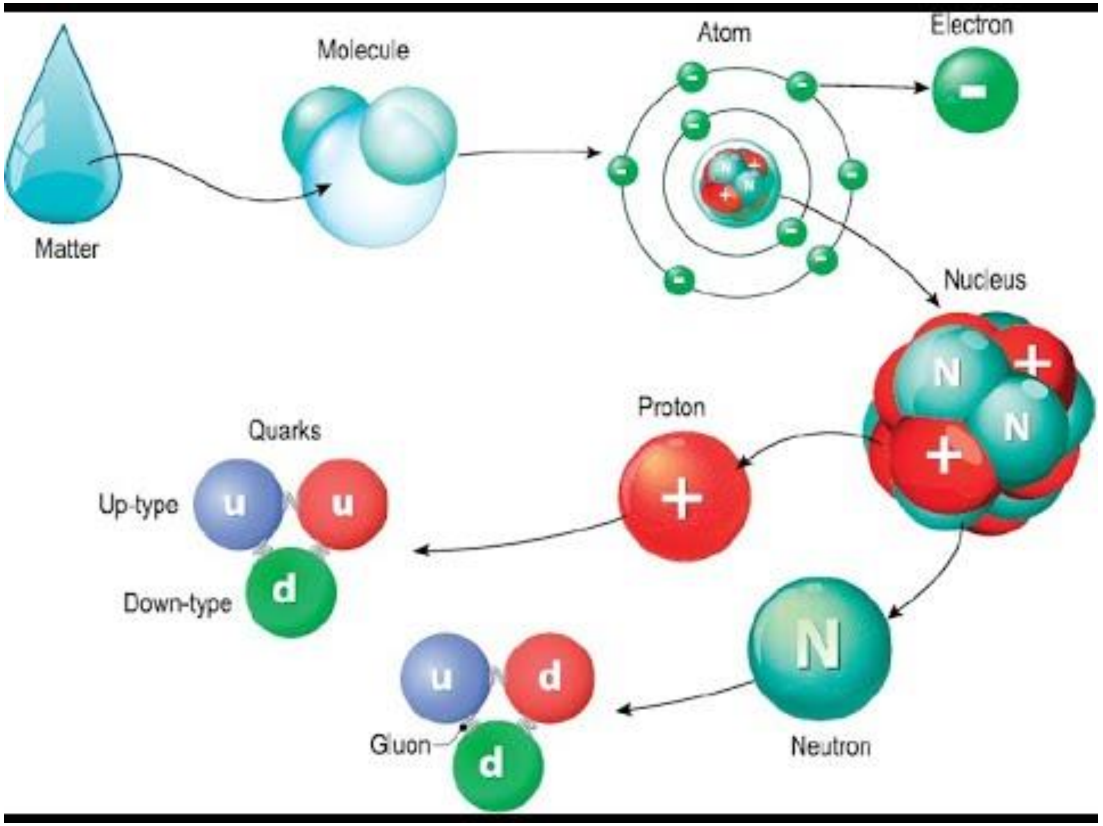


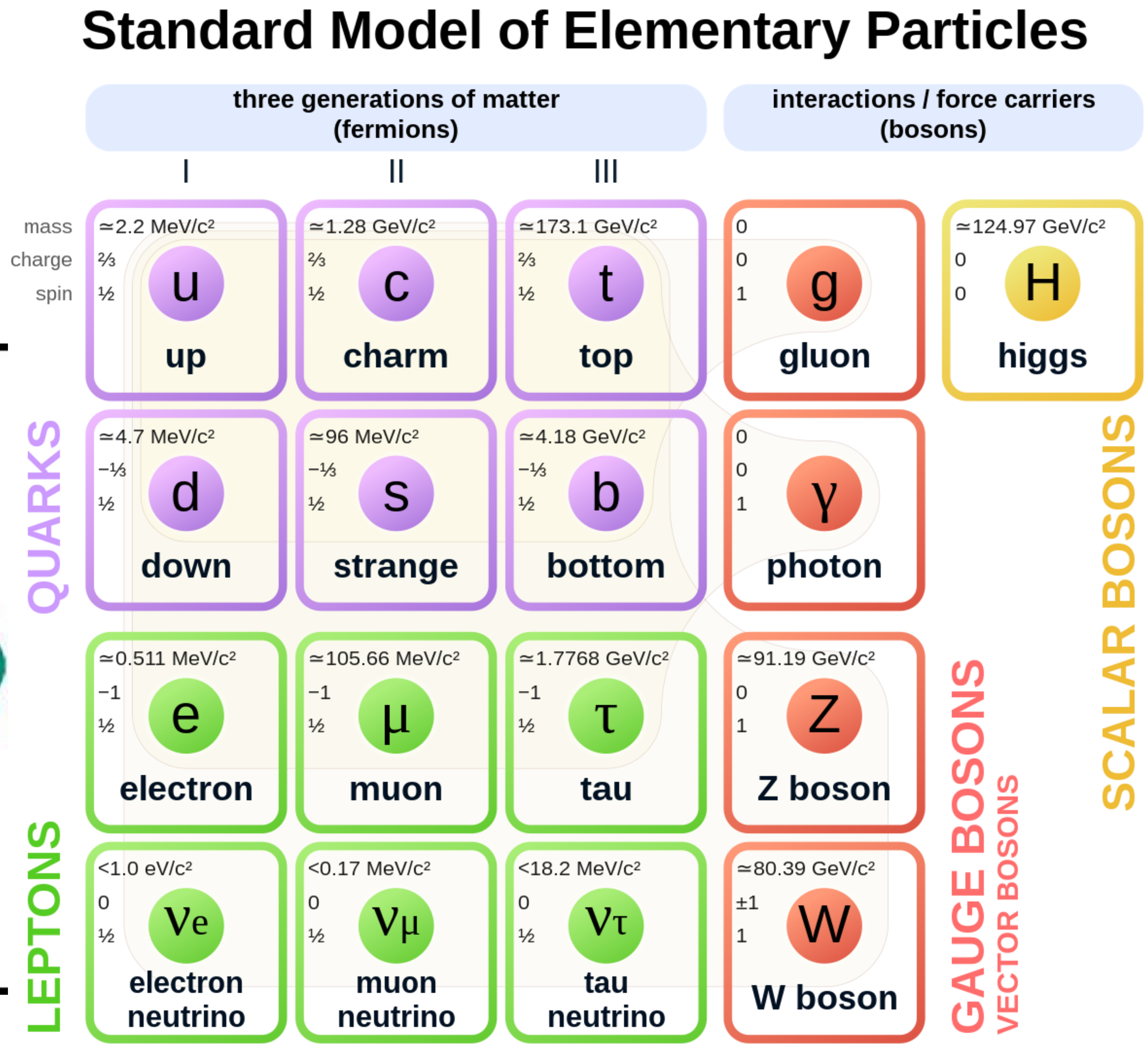
Uji Pemahaman

- Basis qubit R dan L didefinisikan sebagai:
  - $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$
  - $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- Apakah representasi superposisi qubit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ dalam basis R dan L?

Standard Model

- Materi dibentuk oleh fermion
- Interaksi dibentuk oleh boson





Aktivitas

- Menghitung peluang pengukuran di qiskit
- https://learn.qiskit.org/course/introduction/what-is-quantum

WaveFunction

WaveFunction

- Teori kuantum dimulai dengan penemuan:
  - Sifat kuanta (paket) dari radiasi: radiasi planck, efek fotoelektrik
  - Sifat superposisi dari partikel: pola interferensi
- Maka terdapat 2 pendekatan teori kuantum:
  - Konsep wave-particle duality: de Broglie
    - Menghasilkan pendekatan wavefunction sebagai fungsi gelombang: Schrodinger
  - Konsep diskrit: Bohr
    - Menghasilkan pendekatan wavefunction sebagai vektor kompleks: Heisenberg

WaveFunction sebagai Fungsi Gelombang

- Interpretasi Probabilistic (Born):
  - Peluang menemukan partikel dengan volume $d\boldsymbol{r} \equiv dxdydz$ pada lokasi $\boldsymbol{r} \equiv (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ pada waktu t adalah:

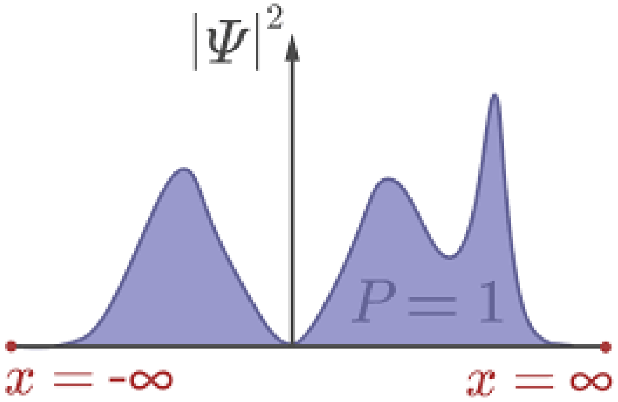
$$P(\boldsymbol{r}, t) = |\Psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 d\boldsymbol{r} = \Psi^*(\boldsymbol{r}, t)\Psi(\boldsymbol{r}, t)d\boldsymbol{r}$$

  - Dimana total peluang adalah 1:

$$\int |\Psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 d\boldsymbol{r} = 1$$

  - Total peluang tidak berubah (probability conservation):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int P(\boldsymbol{r}, t)d\boldsymbol{r} = 0$$



WaveFunction sebagai Fungsi Gelombang

- Superposisi & Interferensi (sifat gelombang):
  - Berbeda dengan gelombang klasik (suara, cahaya), Ψ adalah fungsi kompleks
  - Linear kombinasi dari beberapa wavefunction juga merupakan wavefunction dari system

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$$

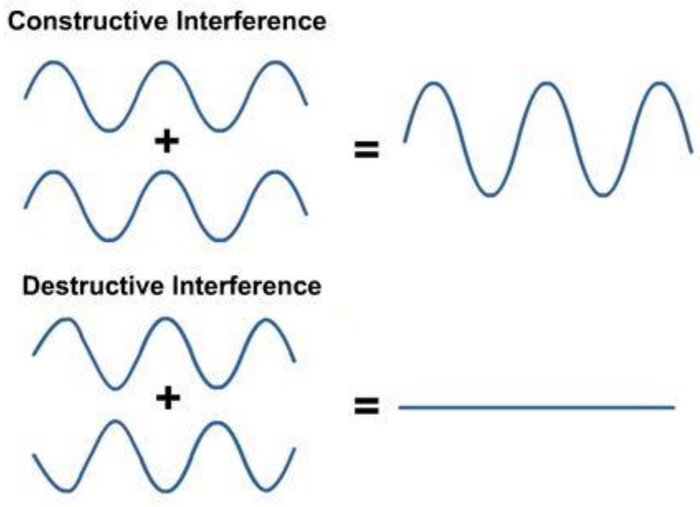
- Momentum & Energi (sifat partikel):
  - Plane wave untuk gerakan free particle pada 1 dimensi:

$$\Psi(x) = Ae^{\{i[kx-\omega t]\}}$$

  - Maka operator momentum & energi terhadap $\Psi(x)$:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) = \hbar k\Psi(\mathrm{x,t}) = p_x\Psi(\mathrm{x,t})$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \hbar\omega\Psi(\mathrm{x,t}) = E\Psi(\mathrm{x,t})$$



Fourier Transform

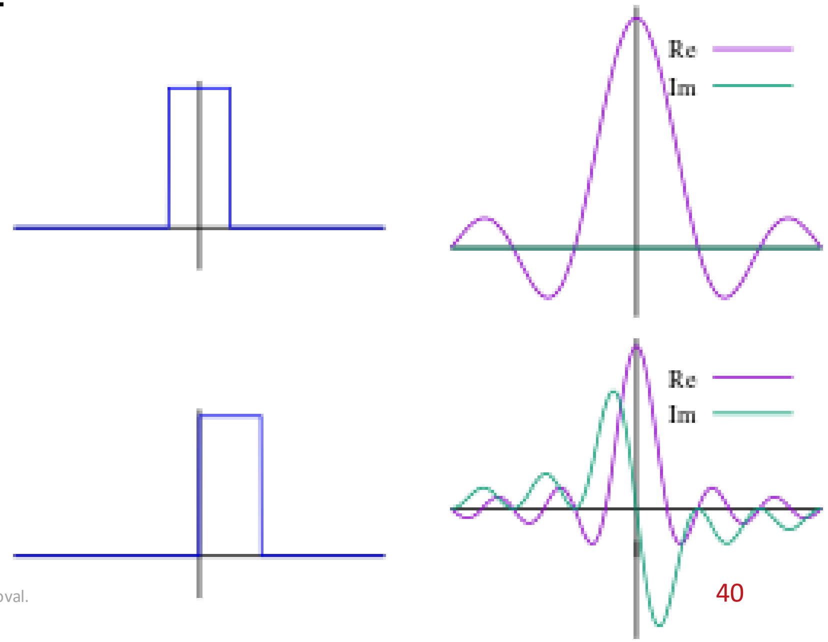
- Fourier transform dari wavefunction $\Psi(x,t)$ adalah:

$$\Phi(p_x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ip_x x}{\hbar}} \Psi(x,t)dx}{2\pi\hbar}$$

- Dimana $\Phi(p_x,t)$ merupakan wavefunction pada momentum space dan mutual fourier transform dari $\Psi(x,t)$

$$\Psi(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ip_x x}{\hbar}} \Phi(p_x,t)dp_x}{2\pi\hbar}$$

- Maka Posisi-Momentum adalah complementary variables
- Waktu-Energi juga merupakan complementary variables



Persamaan Schrodinger

- Persamaan umum:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t) = H\Psi(\boldsymbol{r},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,z,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\right]\Psi(x,y,z,t)$$

- 1D:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+V(x)\right]\Psi(x,t)$$

Classical Limit (Ehrenfest Theorem)

- Dengan menggunakan persamaan Schrodinger:
  - Perubahan ekspektasi posisi:

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{d}{dt}\int \Psi^*(\boldsymbol{r},t)x\Psi(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r} = \int \Psi^*(\boldsymbol{r},t)x\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \int \frac{\partial\Psi^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}x\Psi(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}$$

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{i\hbar}{2m}\int [\Psi^* x(\nabla^2\Psi) - (\nabla^2\Psi^*)x\Psi]d\boldsymbol{r} = -\frac{i\hbar}{m}\int \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}d\boldsymbol{r}$$

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{\langle p_x\rangle}{m}$$

  - Perubahan ekspektasi momentum:

$$\frac{d}{dt}\langle p_x\rangle = \frac{d}{dt}\int \Psi^*(\boldsymbol{r},t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r} = -i\hbar\left[\int \Psi^*\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial t}d\boldsymbol{r} + \int \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial x}d\boldsymbol{r}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\langle p_x\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\int\left[\Psi^*\left(\nabla^2\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) - (\nabla^2\Psi^*)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right]d\boldsymbol{r} - \int \Psi^*\left[\frac{\partial}{\partial x}(V\Psi) - V\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right]d\boldsymbol{r} = -\int \Psi^*\frac{\partial V}{\partial x}\Psi d\mathbf{r}$$

$$\frac{d}{dt}\langle p_x\rangle = -\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$

- Menjadi hukum Newton:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}$$

Energy Eigenvalue

- Jika E merupakan eigenvalue dari persamaan schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t) = H\Psi(\boldsymbol{r},t) = E\Psi(\boldsymbol{r},t)$$

- Jika potensial V tidak bergantung pada waktu, maka komponen posisi dan waktu dari $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{t})$ separable:

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})f(t)$$

- Maka terdapat 2 persamaan eigen:

$$\cancel{\psi(\boldsymbol{r})}i\hbar \frac{\partial}{\partial t}f(t) = \cancel{\psi(\boldsymbol{r})}Ef(t)$$

$$\cancel{f(t)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r}) = \cancel{f(t)}E\psi(\boldsymbol{r})$$

- Dimana:
  - $f(t)$ adalah eigenfunction dari operator energi $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
  - $\psi(\boldsymbol{r})$ adalah eigenfunction dari operator Hamiltonian $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\right]$
  - Dan keduanya memiliki eigenvalue E
- Probability density:

$$P(\boldsymbol{r},t) = \Psi^*(\boldsymbol{r},t)\Psi(\boldsymbol{r},t) = \psi^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E^*)t}$$

- Probability conservation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int P(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r} = 0$$

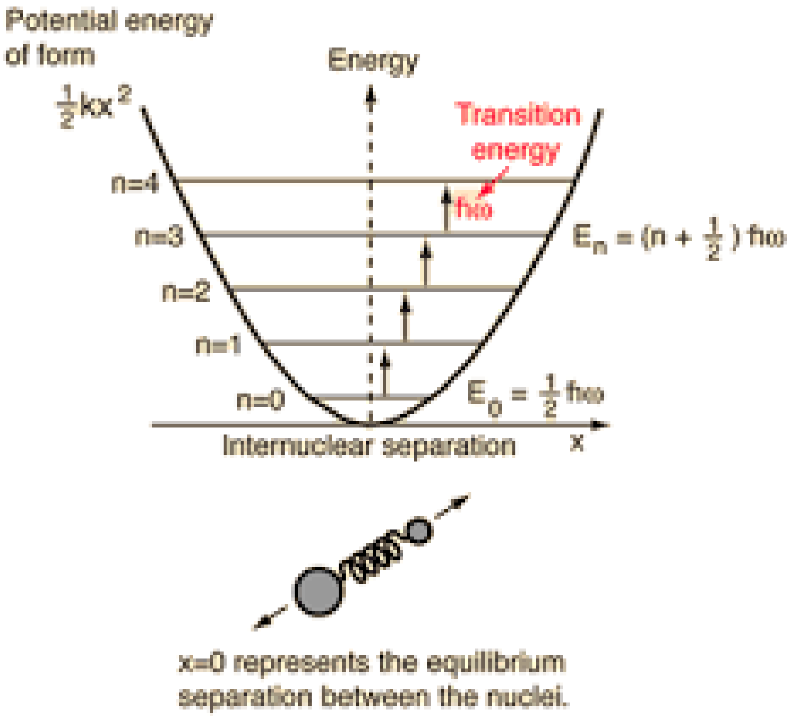
$$(E - E^*)\int \Psi^*(\boldsymbol{r},t)\Psi(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r} = 0$$

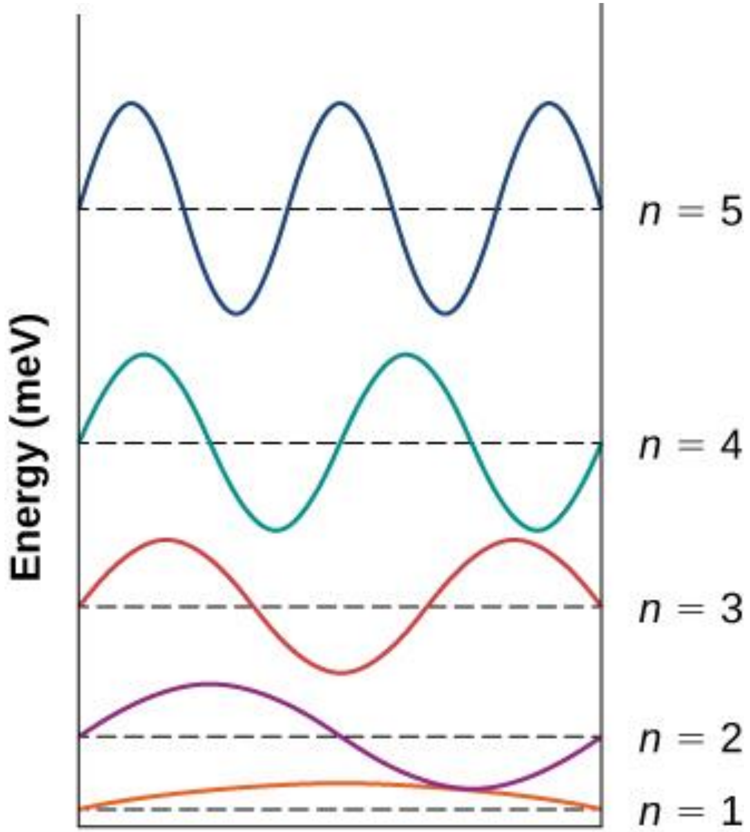
- Maka $(E - E^*)$ harus 0 → eigenvalue E adalah bilangan real

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Kuantisasi Energi

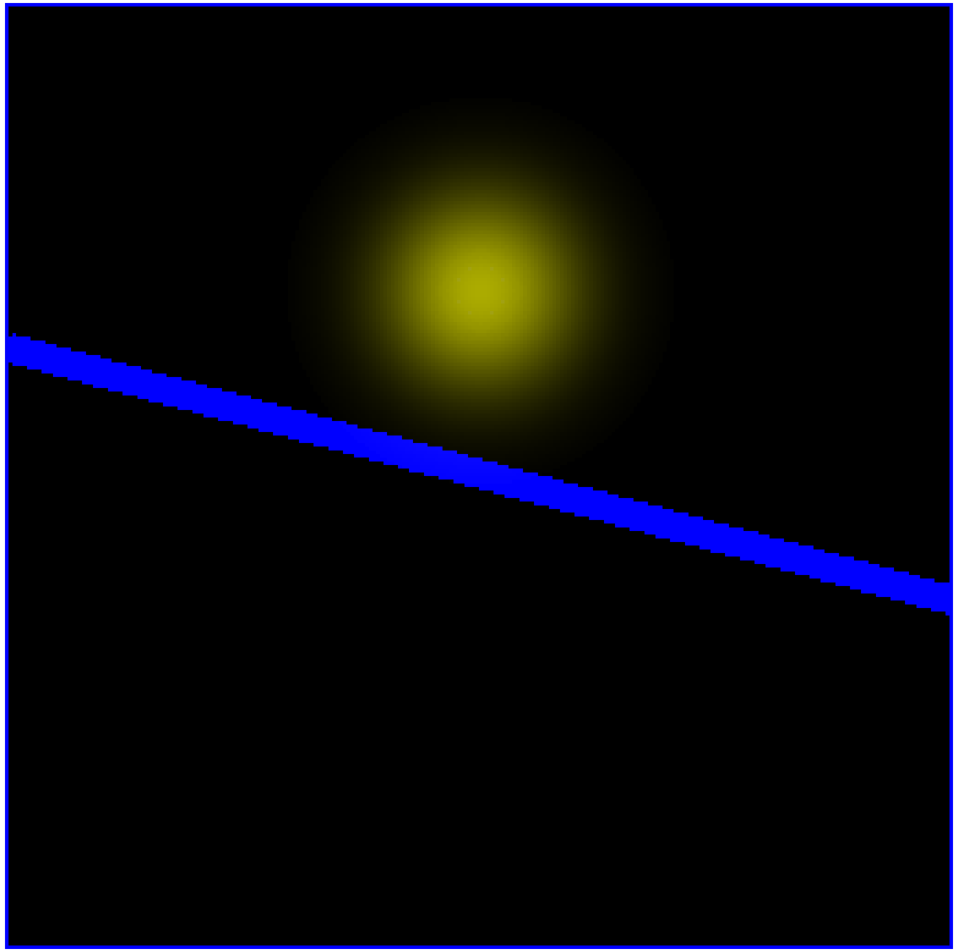
- Beberapa jenis potensial menghasilkan kuantisasi energi:
  - Infinite Potential ($V = \begin{cases} 0, 0 \leq x \leq L \\ \infty, x < 0, x > L \end{cases}$)
  - Harmonic Oscillator ($V = \frac{1}{2}kx^2$)





Quantum Tunneling

- Ketika wave packet menabrak dinding, sebagian terpantulkan dan sebagian menembus dinding (tunneling)



Uji Pemahaman

- Superconducting Qubit (IBM) menggunakan mekanisme anharmonic oscillator untuk membuat qubit. Mengapa bukan harmonic oscillator yang dipilih?

Komutator

God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Komutator

- Persamaan Schrodinger:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \rightarrow \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}H\Psi$$

- Ekspektasi operator A:

$$\langle A\rangle = \int \Psi^*(\boldsymbol{r},t)A\Psi(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}$$

- Perubahan terhadap A:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{d}{dt}(\Psi^* A\Psi) = \frac{d\Psi^*}{dt}A\Psi + \Psi^* A\frac{d\Psi}{dt} = \frac{i}{\hbar}\Psi^*(HA - AH)\Psi = \frac{i}{\hbar}\Psi^*[H,A]\Psi$$

- Dimana komutator didefinisikan sebagai:

$$[A,B] = AB - BA$$

- 2 operator disebut komutatif jika $\langle AB - BA\rangle = 0$
  - Misal: energi-momentum

$$\Psi^*\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\Psi\right) - \Psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi\right) = (Ep - pE)\Psi^*\Psi = 0$$

- 2 operator disebut anti-komutatif jika $\langle AB - BA\rangle \neq 0$
  - Misal: posisi-momentum

$$\Psi^*\left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)(x\Psi)\right) - \Psi^* x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi\right) \neq 0$$

Sifat Komutator

$$[A, A] = 0$$
$$[A, B] = -[B, A]$$
$$[A, c] = 0 \ (c \ is \ number)$$
$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$$
$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$
$$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + [C, [A, B]] = 0$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Uji Pemahaman

- Buktikan sifat komutator sebelumnya

Poisson Bracket

- Classical Hamiltonian:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

- Poisson Bracket pada basis posisi dan momentum adalah:

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial p}$$

- Poisson Bracket terhadap Hamiltonian adalah:

$$\frac{dQ}{dt} = \{Q,H\} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$\{p,H\} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial p} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{dp}{dt}$$

$$\{x,H\} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{p}{m} = \frac{dx}{dt}$$

- Untuk conserved quantity Q:

$$\frac{dQ}{dt} = \{Q,H\} = 0$$

$$\{H,H\} = 0 \rightarrow energy\ conservation$$

$$\{p,H\} = 0 \rightarrow momentum\ conservation$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Dari klasik ke kuantum

- Komutator [] adalah versi kuantum dari Poisson Bracket {}:

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[A, B]$$

$$\{x, p\} = 1 \rightarrow [x, p] = i\hbar$$

- Persamaan Heisenberg:

$$\frac{dQ}{dt} = \{Q, H\} \rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[Q, H] = \frac{i}{\hbar}[H, Q]$$

- Energy Conservation:

$$\{H, H\} = 0 \rightarrow [\mathrm{H}, \mathrm{H}] = 0$$

- Momentum Conservation (jika $V(x) = 0$):

$$\{p, H\} = 0 \rightarrow [p, H] = 0$$

Spatial Translations

- Operator U_T mengubah wavefunction ψ menjadi ψ': $\psi'(\boldsymbol{r}) = U_T(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{r})$
- Dimana ψ' adalah wavefunction sistem yang digeser sejauh $\boldsymbol{x} \rightarrow \psi'(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x})$
- Misalkan kita geser sebesar infinitesimal $\delta\boldsymbol{x}$

$$\psi'(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{r}) - \delta\boldsymbol{x} \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{r}) = (I - \delta\boldsymbol{x} \cdot \nabla)\psi(\boldsymbol{r}) = U_T(\delta\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{r})$$

- $U_T(\delta\boldsymbol{x}) = I - \delta\boldsymbol{x} \cdot \nabla = I - \frac{i}{\hbar}\delta\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}$, dimana $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$ adalah momentum operator
- Misalkan kita menggeser n kali dimana $n \rightarrow \infty$

$$U_T(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\rightarrow\infty}\left(I - \frac{i}{\hbar}\frac{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p})}{n}\right)^n = e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}}$$

- Jika Hamiltonian **invariant terhadap translasi** apapun, maka:

$$H' = U_T(\boldsymbol{x})HU_T^\dagger(\boldsymbol{x}) = \left(I - \frac{i}{\hbar}\delta\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}\right)H\left(I + \frac{i}{\hbar}\delta\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}\right) = H - \frac{i}{\hbar}\delta\boldsymbol{x} \cdot [\boldsymbol{p}, H] = H$$

- Maka $[\boldsymbol{p}, H] = 0 \rightarrow$ **momentum conservation**

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Simetri

- Untuk operator U_S apa saja yang dapat mengubah wavefunction Ψ menjadi wavefunction Ψ' secara simetri: $\Psi = U_S\Psi$
- Dimana $U_S(\delta\boldsymbol{\theta}) = I + i\epsilon F_S$ adalah transformasi simetri terhadap kordinat θ
- Selama H **invariant terhadap operasi simetri**, maka:

$$H' = U_S(\boldsymbol{\theta})HU_T^{\dagger}(\boldsymbol{\theta}) = (I + i\epsilon F_S)H(I - i\epsilon F_S) = H + i\epsilon[F_S, H] = H$$

- Maka $[F_S, H] = 0 \rightarrow$ **Operator F_S akan conserved**

Symmetry → Conservation

Transformations	Unobservables	Conservation laws and selection rules
Translation in space $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \Delta$	Absolute position in space	Momentum
Translation in time $t \to t + \tau$	Absolute time	Energy
Rotation $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'$	Absolute direction in space	Angular momentum
Space inversion $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$	Absolute left or right	Parity
Time reversal $t \to -t$	Absolute sign of time	Kramers degeneracy
Sign reversion of charge $e \to -e$	Absolute sign of electric charge	Charge conjugation
Particle substitution	Distinguishability of identical particles	Bose or Fermi statistics
Gauge transformation $\psi \to \mathrm{e}^{iN\theta}\psi$	Relative phase between different normal states	Particle number

Dirac Notation

- Notasi dirac dapat digunakan untuk memudahkan hidup kita:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^* \Psi_2 d\boldsymbol{r}$$

- Untuk kasus diskrit, integral bisa menjadi summation:

$$\int \Psi^* \Psi d\boldsymbol{r} = 1 \rightarrow \sum \Psi^* \Psi = 1$$

- $\sum \ \Psi^* \Psi$ adalah definisi dari inner product dari 2 vektor kompleks
  - Jika Ψ adalah proyeksi sebuah vektor kompleks ($|\Psi\rangle$) terhadap posisi ($\boldsymbol{r} = x, y, z$), $\Psi = \langle \boldsymbol{r} | \psi \rangle$
  - Maka $\sum \ \Psi^* \Psi = \sum \ \langle \Psi | \boldsymbol{r} \rangle \langle \boldsymbol{r} | \psi \rangle \ = \langle \Psi | \Psi \rangle$
- Detail dari notasi ini akan kita pelajari di pertemuan berikutnya

Aktivitas

- Mengamati perilaku operator gate di qiskit
- https://quantum-computing.ibm.com/composer/docs/iqx/guide/creating-superpositions

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Tuhan Memberkati

God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY