Algoritma Kuantum

Hendrik Santoso Sugiarto

IBDA4221 – Selected Topic in Computer Technology

Quantum Computing

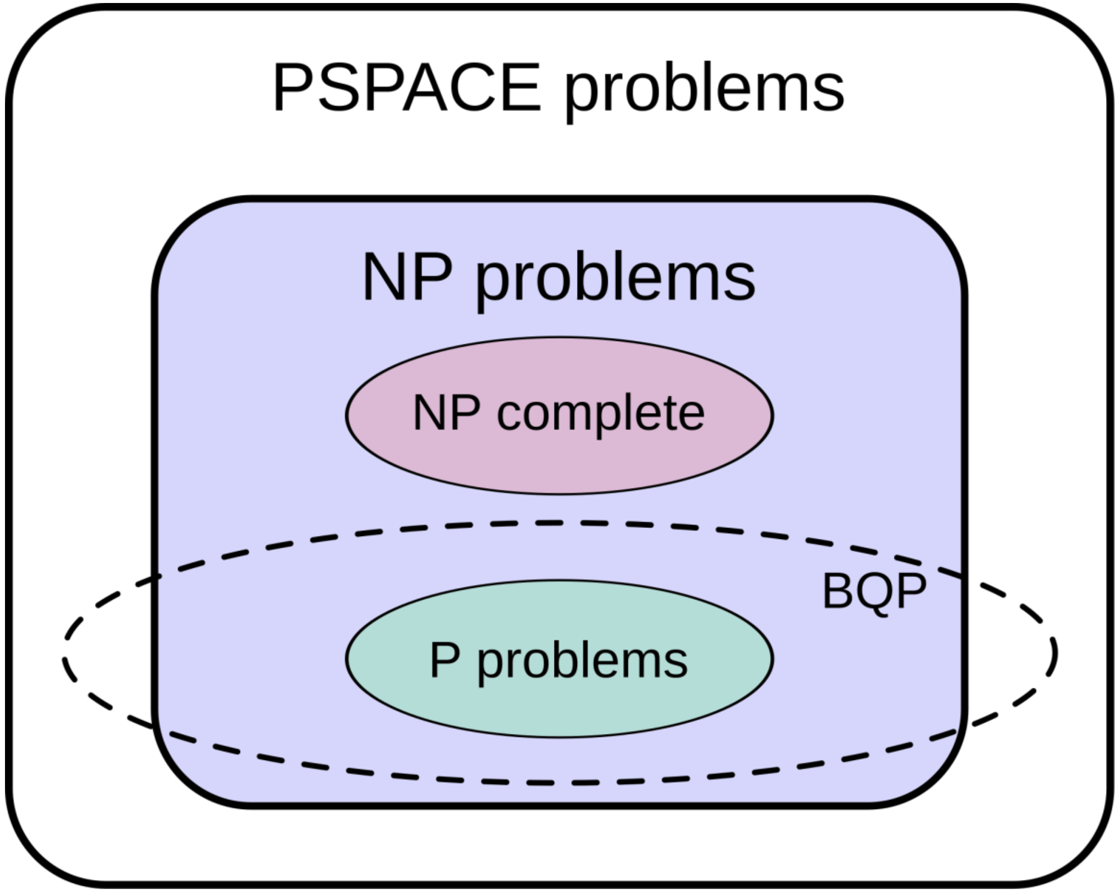
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
God's People for God's Glory

Capaian Pembelajaran

- Algoritma Deutsch-Josza
- Algoritma Berstein-Vazirani
- Algoritma Simon (Pengayaan)

Algoritma Kuantum

- Algoritma yang memanfaatkan komputasi kuantum untuk menyelesaikan permasalahaan dengan jauh lebih efisien dibanding komputasi klasik
- Kategori algoritma kuantum:
  - Quantum Fourier Transform: DJ, BV, Simon, QPE, Shor
  - Amplitude amplification: Grover
  - Quantum Walks
- Jenis problem algoritma kuantum:
  - Bounded error quantum polynomial time (BPQ)
  - Hybrid quantum/classical: QAOA, VQE, CQE



Deutsch Problem

Deutsch-Jozsa Problem

- Misalkan terdapat sebuah oracle (black box computer):
$$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$
- Dimana fungsi ini menggunakan n-bit binary input dan menghasilkan 0 atau 1 output.
- Fungsi ini menghasilkan antara constant (0 atau 1 untuk seluruh kemungkinan input) atau balanced (1 untuk setengah kemungkinan input dan 0 untuk sisanya)
- Tugas kita untuk memprediksi apakah fungsi ini constant ataukah balanced

Contoh

- n=1
- Jika $f(0) = f(1) = 0 \rightarrow f$ constant
- Jika $f(0) = 0, f(1) = 1 \rightarrow f$ balanced

- n=2
- Jika $f(00) = f(01) = f(10) = f(11) = 0 \rightarrow f$ constant
- Jika $f(00) = f(10) = 0, f(01) = f(11) = 1 \rightarrow f$ balanced

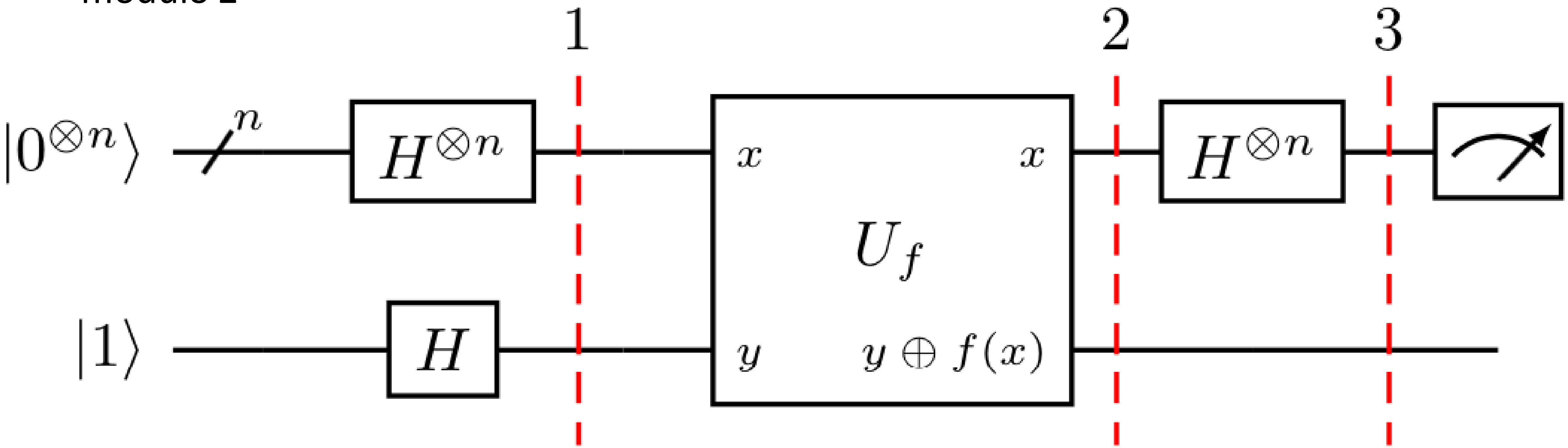
CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Solusi Klasik

- Pada best case, 2 queries dapat menentukan fungsi f balanced
- Misalnya kita memperoleh $f(0,0,0,\ldots) \rightarrow 0$ dan $f(0,0,0,\ldots) \rightarrow 1$, maka kita langsung mengetahui bahwa fungsi ini balanced karena menghasilkan 2 output yang berbeda
- Pada worst case, kita harus cek sebanyak $2^n + 1$ kali untuk menentukan f constant

Solusi Kuantum

- Dengan komputer kuantum, kita dapat memecahkan masalah ini hanya sekali memanggil fungsi f, dimana f diimplementasikan sebagai oracle kuantum yang memetakan state $|x\rangle|y\rangle$ menuju $|x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$, dimana $\oplus$ adalah penjumlahan modulo 2



Deutsch Algorithm

- Deutsch Algorithm adalah Deutsch-Jozsa Algorithm untuk kasus n=1→harus cek $f(0) = f(1)$
- Ini ekuivalen dengan cek $f(0) \oplus f(1)$, jika 0 →f constant, jika 1 → f balanced
- Kita mulai dari 2 qubit $|1\rangle|0\rangle$ lalu menggunakan H-gate terhadap kedua qubit:

$$|yx\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)$$

- Lalu menggunakan CU gate dimana qubit pertama adalah qubit kontrol:

$$CU|yx\rangle = \left|\big(y \oplus f(x)\big)x\right\rangle = (|f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle)|0\rangle + (|f(1)\rangle - |1 \oplus f(1)\rangle)|1\rangle$$

$$CU|-+\rangle = |-\rangle \otimes (-1)^{f(0)} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle\right)$$

- Jika kita menggunakan H-gate pada qubit pertama:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|0\rangle - (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(1 + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\right)|0\rangle + \left(1 - (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\right)|1\rangle\right)$$

Pengukuran akhir

- Pengukuran pada state akhir dari qubit pertama akan mendapatkan beberapa kemungkinan:
- Jika $f(0) \oplus f(1) = 0$ maka $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}((1+1)|0\rangle + (1-1)|1\rangle) = |0\rangle$
- Jika $f(0) \oplus f(1) = 1$ maka $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}((1-1)|0\rangle + (1+1)|1\rangle) = |1\rangle$
- Jadi jika mengukur $|0\rangle$ maka $f(0) \oplus f(1) = 0$ → constant
- Jadi jika mengukur $|1\rangle$ maka $f(0) \oplus f(1) = 1$ → balanced

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Algoritma Deutsch-Jozsa

God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Deutsch-Jozsa Problem

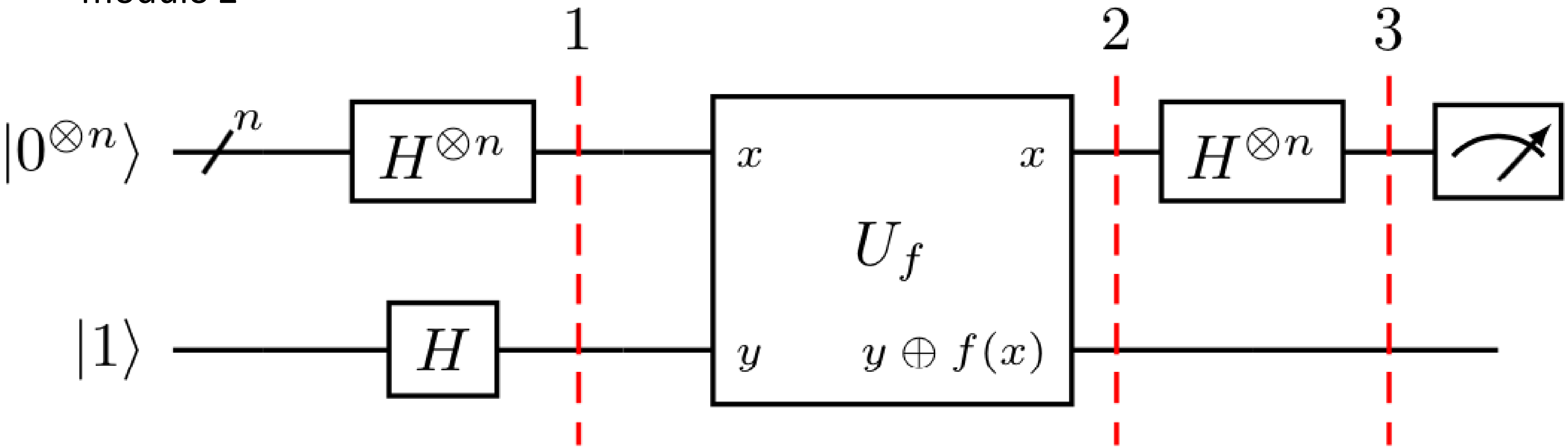
- Misalkan terdapat sebuah oracle (physical device yang tersembunyi):
$$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$
- Dimana fungsi ini menggunakan n-bit binary input dan menghasilkan 0 atau 1 output.
- Fungsi ini menghasilkan antara constant (0 atau 1 untuk seluruh kemungkinan input) atau balanced (1 untuk setengah kemungkinan input dan 0 untuk sisanya)
- Tugas kita untuk memprediksi apakah fungsi ini constant ataukah balanced
- Deutsch-Jozsa adalah generalisasi (n-bit extension) dari Deutsch problem (n=1)

Solusi Klasik

- Pada best case, 2 queries dapat menentukan fungsi f balanced
- Misalnya kita memperoleh $f(0,0,0,\dots) \rightarrow 0$ dan $f(0,0,0,\dots) \rightarrow 1$, maka kita langsung mengetahui bahwa fungsi ini balanced karena menghasilkan 2 output yang berbeda
- Pada worst case, kita harus cek sebanyak $2^n + 1$ kali untuk menentukan f constant

Solusi Kuantum

- Dengan komputer kuantum, kita dapat memecahkan masalah ini hanya sekali memanggil fungsi f, dimana f diimplementasikan sebagai oracle kuantum yang memetakan state $|x\rangle|y\rangle$ menuju $|x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$, dimana $\oplus$ adalah penjumlahan modulo 2



Oracle

- Oracle dapat dilihat sebagai unitary yang melakukan mapping $O_f|x\rangle|y\rangle = |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$

$$O_f|x\rangle|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|0 \oplus f(x)\rangle - |x\rangle|1 \oplus f(x)\rangle)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle), jika\ f(x) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle(|1\rangle - |0\rangle), jika\ f(x) = 1 \end{cases}$$

$$= (-1)^{f(x)}|x\rangle|y\rangle$$

- Oracle independent terhadap $|y\rangle$, dimana mirip sebuah phase oracle

$$P_f|x\rangle = (-1)^{f(x)}|x\rangle$$

Hadamard pada n-qubits

- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
- Untuk $x \in \{0,1\}$:

$$H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^x|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((-1)^{0\cdot x}|0\rangle + (-1)^{1\cdot x}|1\rangle\right)$$

- Untuk $x \in \{0,1\}^n$:

$$H^{\oplus n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k\in\{0,1\}^n}(-1)^{k\cdot x}|k\rangle$$

- Contoh $|x\rangle = |01\rangle$

$$H|0\rangle \otimes H|1\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle = (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k\in\{0,1\}^n}(-1)^{k\cdot x}|k\rangle = \frac{1}{2}\left((-1)^0|00\rangle + (-1)^1|01\rangle + (-1)^0|10\rangle + (-1)^1|11\rangle\right)$$

Uji Pemahaman

- Apa sajakah semua kemungkinan Hadamard pada 1-qubit?
- Apa sajakah semua kemungkinan Hadamard pada 2-qubit?

Deutsch-Josza Algorithm

- Siapkan 2 register (pertama: n-qubit diinisiasi $|0\rangle$, kedua: 1-qubit diinisiasi $|1\rangle$)

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Gunakan oracle $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle(|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit di register pertama

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1}(-1)^{x\cdot k}|k\rangle\right] = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left[\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}(-1)^{x\cdot k}\right]|k\rangle$$

- Ukur qubit pertama

$$\langle\psi_3|0\rangle^{\otimes n} = \left|\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}\right|^2 = \begin{cases} 1\ if\ f(x) \rightarrow constant \\ 0\ if\ f(x) \rightarrow balanced \end{cases}$$

Phase

- Constant Oracle: tidak mempengaruhi global phase input

$$H^{\otimes n}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{after } U_f} H^{\otimes n}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

- Balanced Oracle: phase kickback menciptakan superposisi seimbang antara fase positif dan fase negatif

$$U_f\frac{1}{\sqrt{2^n}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

Contoh: 2-bit balanced

- Misalnya terdapat fungsi $f(x_0, x_1) = x_0 \oplus x_1$ dimana:
  - $f(0,0) = 0$
  - $f(0,1) = 1$
  - $f(1,0) = 1$
  - $f(1,1) = 0$
- Bentuk dari phase oraclenya adalah

$$U_f|x_1x_0\rangle = (-1)^{f(x_1,x_0)}|x\rangle$$

2-qubit DJ Algorithm

- Siapkan 2 register (pertama: 2-qubit diinisiasi $|0\rangle$, kedua: 1-qubit diinisiasi $|1\rangle$)

$$|\psi_0\rangle = |00\rangle|1\rangle$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Gunakan oracle $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle = |x\rangle|y \oplus x_0 \oplus x_1\rangle$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}|-\rangle \otimes |-\rangle \otimes |-\rangle$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit di register pertama

$$|\psi_3\rangle = |1\rangle|1\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Ukur register pertama

$$P(11) = 100\%$$

Uji Pemahaman

- Cobalah 2-qubit DJ untuk fungsi $f(x_0, x_1)$ dimana:
  - $f(0,0) = 0$
  - $f(0,1) = 0$
  - $f(1,0) = 0$
  - $f(1,1) = 0$

Uji Pemahaman

- Cobalah 2-qubit DJ untuk fungsi $f(x_0, x_1)$ dimana:
  - $f(0,0) = 1$
  - $f(0,1) = 1$
  - $f(1,0) = 1$
  - $f(1,1) = 1$

Aktivitas

- 2-qubit DJ
- 3-qubit DJ

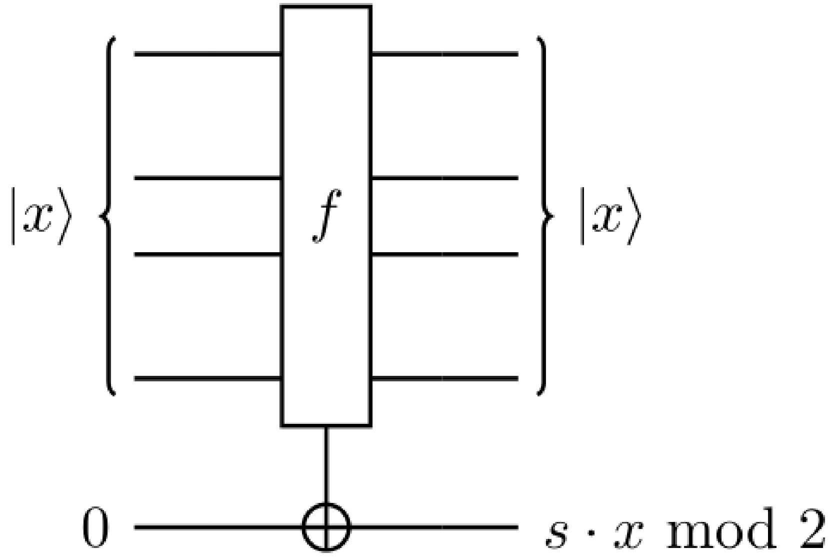
Algoritma Berstein-Vazirani

Berstein-Vazirani Problem

- Algoritma Berstein-Vazirani adalah extension dari algoritma Deutsch-Jozsa
- Misalkan terdapat sebuah oracle dengan input string (x) dan output 0 atau 1

$$f(\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}) \rightarrow 0\ atau\ 1\ dimana\ x_n\ adalah\ 0\ atau\ 1$$

- Jika diberikan input x, $f(x) = s \cdot x\ mod\ 2$, kita harus menemukan s



Solusi Klasik

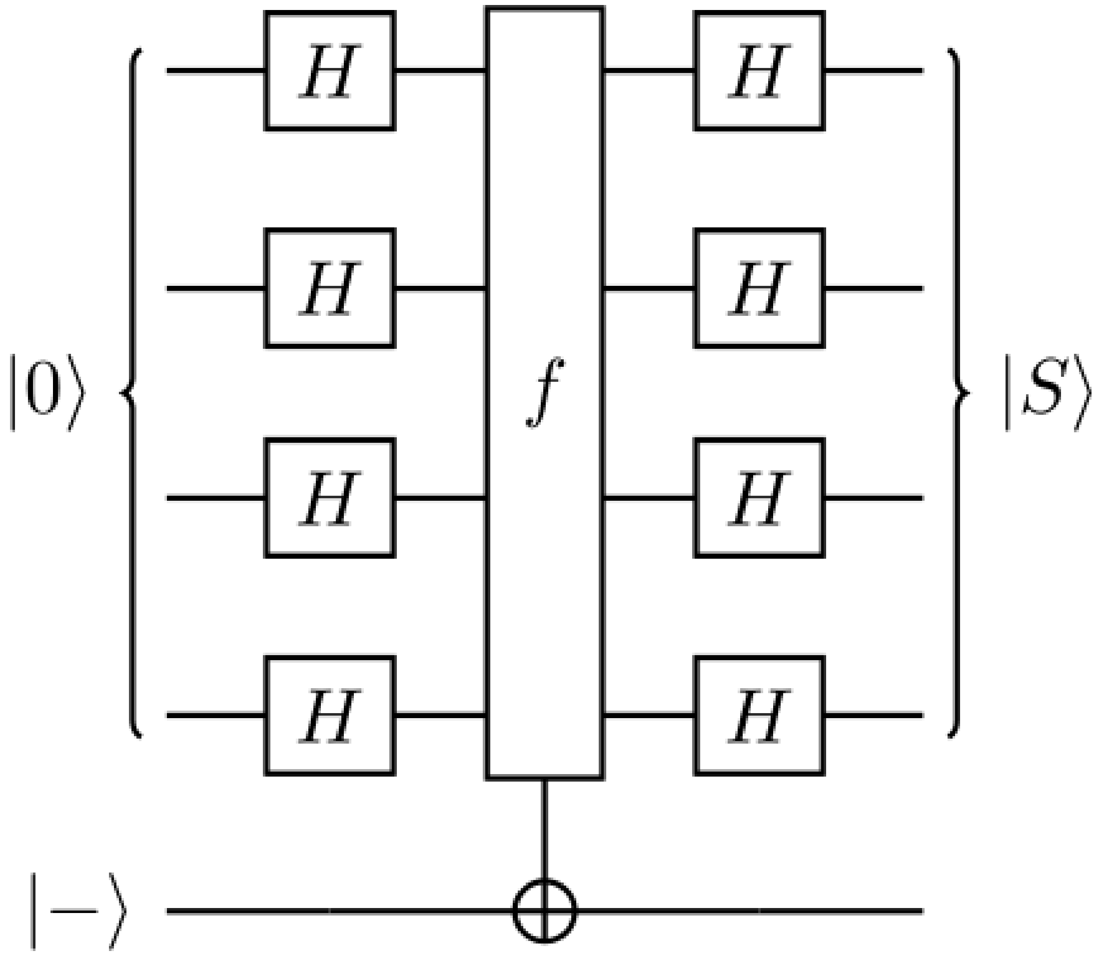
- Oracle akan menghasilkan:

$$f_s(x) = s \cdot x \; mod \; 2$$

- Untuk setiap input x, string tersembunyi akan muncul melalui query
- Dimana setiap query menampilkan bit s yang berbeda
- Jadi perlu memanggil fungsi $f_s(x)$ sebanyak n kali

Solusi Kuantum

- Dengan komputer kuantum, kita dapat memecahkan masalah ini hanya sekali memanggil fungsi f



Bernstein-Vazirani Algorithm

- Siapkan 2 register (pertama: n-qubit diinisiasi $|0\rangle$, kedua: 1-qubit diinisiasi $|1\rangle$)

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Gunakan oracle $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle = |x\rangle|y \oplus s \cdot x \bmod 2\rangle$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle(|0 \oplus s \cdot x \bmod 2\rangle - |1 \oplus s \cdot x \bmod 2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{s\cdot x}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit di register pertama

$$|\psi_3\rangle = H^{\otimes n}\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{2^n}(-1)^{s\cdot x}|x\rangle = |s\rangle$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Contoh 2-qubit

- Siapkan 2 register (pertama: 2-qubit diinisiasi $|00\rangle$, kedua: 1-qubit diinisiasi $|1\rangle$)

$$|\psi_0\rangle = |00\rangle|1\rangle$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Gunakan oracle $|x\rangle|y\rangle \to |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle = |x\rangle(|0 \oplus 11 \cdot x \bmod 2\rangle - |1 \oplus 11 \cdot x \bmod 2\rangle)$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{2^2-1}(-1)^{11\cdot x}|x\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}\left((-1)^{11\cdot 00}|00\rangle + (-1)^{11\cdot 01}|01\rangle + (-1)^{11\cdot 10}|10\rangle + (-1)^{11\cdot 11}|11\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit di register pertama

$$|\psi_3\rangle = H^{\otimes 2}\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) = |11\rangle$$

Contoh 3-qubit s=101

Aktivitas

- 3-qubit BV algorithm

Algoritma Simon

Simon's Problem

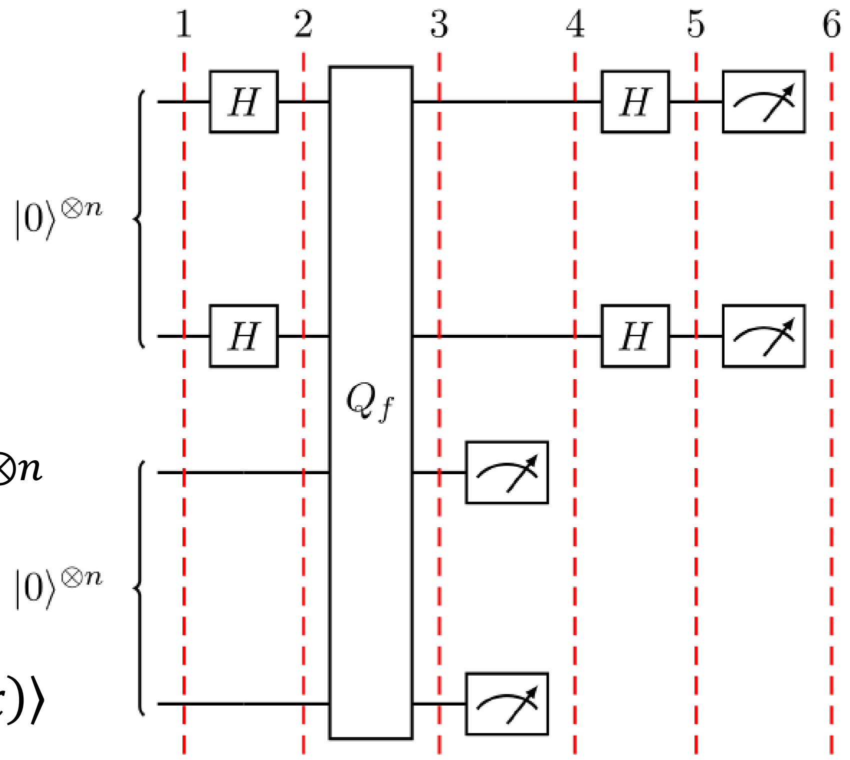
- Algoritma Simon adalah algoritma kuantum pertama yang menunjukan peningkatan eksponensial dibanding algoritma klasik
- Jika terdapat blackbox f yang memiliki 2 kemungkinan: one-to-one atau two-to-one:
  - One-to-one: contoh fungsi dengan 4 input
$$f(1) \rightarrow 1, f(2) \rightarrow 2, f(3) \rightarrow 3, f(4) \rightarrow 4$$
  - Two-to-one: contoh fungsi dengan 4 input
$$f(1) \rightarrow 1, f(2) \rightarrow 2, f(3) \rightarrow 1, f(4) \rightarrow 2$$

- Dapatkah kita memprediksi apakah f itu one-to-one atau two-to-one

Solusi Klasik

- Untuk akurasi 100% kita perlu cek $2^{n-1} + 1$ kali:
  - $f(00 \dots 0) \rightarrow x_1$
  - $f(00 \dots 1) \rightarrow x_2$
  - …
  - $f(11 \dots 1) \rightarrow x_{2^n}$

Simon Algorithm



- Siapkan 2 register

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}$$

- Gunakan Hadamard gate pada register pertama

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle|0\rangle^{\otimes n}$$

- Gunakan oracle $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle|f(x)\rangle$$

- Ukur register kedua, maka register pertama akan menjadi

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |x \oplus b\rangle)$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit di register pertama

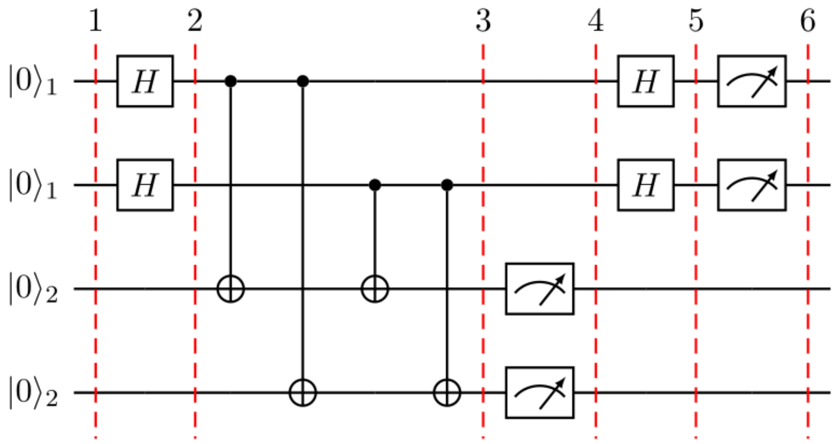
$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} [(-1)^{x\cdot z} + (-1)^{y\cdot z}]|z\rangle$$

- Ukur register pertama, dan menghasilkan output jika:

$$(-1)^{x\cdot z} = (-1)^{y\cdot z} \rightarrow x\cdot z = (x \oplus b)\cdot z \rightarrow b\cdot z = 0\ mod\ 2$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Contoh 2-qubit (b=11)



- Siapkan 2 register

$$|\psi_1\rangle = |00\rangle|00\rangle$$

- Gunakan Hadamard gate pada register pertama

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)|00\rangle$$

- Gunakan oracle $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle|00\rangle + |01\rangle|11\rangle + |10\rangle|11\rangle + |11\rangle|00\rangle)$$

- Ukur register kedua, maka register pertama akan menjadi

$$|11\rangle \rightarrow |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|00\rangle \rightarrow |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

- Gunakan Hadamard gate pada setiap qubit di register pertama

$$|11\rangle \rightarrow |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|00\rangle \rightarrow |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

- Ukur register pertama, dan menghasilkan output jika:

$$|11\rangle \rightarrow b \cdot 11 = 0 \;\&\; b \cdot 00 = 0 \rightarrow b = 11$$

Aktivitas

- 3-qubit (b=110) S-Algorithm

Tuhan Memberkati

God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY