CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
God's People for God's Glory

Notasi Bracket

Hendrik Santoso Sugiarto

IBDA4221 – Selected Topic in Computer Technology

Quantum Computing

Capaian Pembelajaran

- Bracket
- Operator
- Bentuk Matriks
- Formalisme

Bracket

God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Notasi Dirac

- Notasi dirac disebut juga dengan bracket notation, karena terdiri dari 2 macem vektor kompleks yaitu:
  - ket $|\beta\rangle$ yang menghuni state space
  - bra $\langle\alpha|$ yang menghuni dual space
- Inner product dari bra dan ket adalah bra(c)ket:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha| \cdot |\beta\rangle$$

- Proyeksi ket $|\beta\rangle$ pada basis $|\alpha\rangle$ menghasilkan sebuah inner product $\langle\alpha|\beta\rangle$ yang merupakan sebuah yang wavefunction yang terletak pada koordinat $\alpha \rightarrow \Psi(\alpha)$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Space

Karakteristik	Dirac Space	Euclidean Space
Penghuni	Objek kuantum	Objek klasik
Dimensi	Bisa sampai ∞	3
Aljabar	Kompleks	Real
Elemen	Ket	Vektor
Penjumlahan	$\|\psi_1\rangle + \|\psi_2\rangle = \|\psi_3\rangle \in \mathbb{C}$	$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_3 \in \mathbb{R}^3$
Perkalian skalar	$a\|\psi\rangle \in \mathbb{C}$	$a\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
Perkalian matriks	$A\|\psi\rangle \in \mathbb{C}$	$A\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
Inner product	$\langle\phi\|\psi\rangle \in \mathbb{C}$	$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \in \mathbb{R}^3$
Outer product	$\|\psi\rangle\langle\phi\| \in \mathbb{C}$	$\vec{r}_1 \otimes \vec{r}_2 = \in \mathbb{R}^3$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Ket Space

- Physical state direpresentasikan oleh sebuah complex vector yang disebut dengan ket
- State ket berisi informasi lengkap tentang seluruh physical state
- 2 ket dapat dijumlahnya dan hasilnya adalah ket yang lain

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$$

- Sebuah ket dikalikan dengan sebuah bilangan kompleks akan menghasilkan ket lain:

$$|\alpha'\rangle = c|\alpha\rangle$$

- Jika $c = 0$ maka ket ini adalah null ket

Addition

- Komutatif

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$$

- Asosiatif

$$(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle = |\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle)$$

- Inverse

$$|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = 0$$

- Null ket

$$0 + |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Scalar Multiplication

- Asosiatif

$$a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle$$

- Distributif

$$(a+b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle$$
$$a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle$$

- Identitas

$$1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$$

Uji Pemahaman

- Berapakah $(a + b)(|0\rangle + |1\rangle)$

Kombinasi Linear (Superposisi)

- Ket apapun dapat ditulis sebagai kombinasi linear N-dimensi ruang vektor ortonormal

$$|\psi\rangle = \sum_{i}^{n} c_i|u_i\rangle = c_1|u_i\rangle + c_2|u_2\rangle + \cdots + c_n|u_n\rangle$$

Uji Pemahaman

- Apakah bentuk dari $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$
  - pada basis $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ dan $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
  - pada basis $|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ dan $|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$
- Apakah bentuk dari $|\psi\rangle = |0\rangle$
  - pada basis $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ dan $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
  - pada basis $|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ dan $|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

Bra Space

- Untuk setiap ket, terdapat sebuah bra yang terletak pada dual space
- Bra adalah semacam bayangan cermin dari ket
- Sehingga terdapat one-to-one dual correspondence antara bra dan ket:

$$|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|$$
$$|\alpha'\rangle, |\alpha''\rangle, \dots \leftrightarrow \langle\alpha'|, \langle\alpha''|, \dots$$
$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow \langle\alpha| + \langle\beta|$$
$$c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \leftrightarrow c_\alpha^* \langle\alpha| + c_\beta^*\langle\beta|$$

Inner Product

- Inner product dari bra dan ket adalah sebuah scalar kompleks:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha| \cdot |\beta\rangle$$
$$\langle\alpha|\beta+\gamma\rangle = \langle\alpha| \cdot (|\beta\rangle + |\gamma\rangle)$$

- Terdapat 2 sifat dari inner product:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$
$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$$

- 2 ket $|\alpha\rangle$ dan $|\beta\rangle$ disebut orthogonal jika $\langle\alpha|\beta\rangle$ =0
- Pada normalized ket dimana $|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{|\alpha\rangle}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}$, maka $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Uji Pemahaman

- Berapakah $\langle\psi|\psi\rangle$, dimana $|\psi\rangle$ ternormalisasi
- Berapakah $\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle$, dimana $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(i|0\rangle + \sqrt{2}|1\rangle\right)$
- https://learn.qiskit.org/course/introduction/describing-quantum-computers

Outer Product

- Outer product dari ket dan bra adalah sebuah matriks:

$$|\beta\rangle\langle\alpha|$$

- Associative axiom:

$$(|\beta\rangle\langle\alpha|)|\gamma\rangle = |\beta\rangle(\langle\alpha|\gamma\rangle)$$
$$(\langle\beta|)(X|\alpha\rangle) = (\langle\beta|X)(|\alpha\rangle)$$

- Jika $X = |\beta\rangle\langle\alpha|$ maka $X^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta|$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Uji Pemahaman

- Operator Hadamard adalah:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\langle 0| - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\langle 1|$$

- Apakah hasil operator berikut terhadap:
  - $|0\rangle$
  - $|1\rangle$
  - $|+\rangle$
  - $|-\rangle$
- Manakah yang mengalami interferensi?

Operator

God's People for God's Glory
CALVIN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Operator

- Setiap observables (fenomena yang diukur), seperti momentum dan spin, dapat direpresentasikan oleh sebuah operator terhadap vector space ($A|\alpha\rangle$)
- Operator selalu beroperasi pada sebuah ket dari sisi kiri, dan menghasilkan ket baru:
$$|\psi\rangle = X|\alpha\rangle$$
- Operator selalu beroperasi pada sebuah bra dari sisi kanan, dan menghasilkan bra baru:
$$\langle\phi| = \langle\alpha|X$$
- Dimana dual correspondence antara dua operator ini adalah:
$$\langle\alpha|X \leftrightarrow X^{\dagger}|\alpha\rangle$$
$$\langle\alpha|X|\beta\rangle \leftrightarrow \langle\beta|X^{\dagger}|\alpha\rangle^{*}$$

Operator

- Sebuah operator disebut Hermitian jika:

$$X = X^{\dagger}$$

- Operators X dan Y adalah sama jika:

$$\mathrm{X}|\alpha\rangle = Y|\alpha\rangle$$

- Sebuah operator disebut null operator jika:

$$\mathrm{X}|\alpha\rangle = 0$$

- Operator pada kuantum selalu bersifat linear:

$$X(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle) = c_\alpha X|\alpha\rangle + c_\beta X|\beta\rangle$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Uji Pemahaman

- Apakah nilai ekspektasi dari operator $M_0 = |0\rangle\langle 0|$ pada state $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$?
- Apakah nilai ekspektasi dari operator $M_1 = |1\rangle\langle 1|$ pada state $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$?

Addition

- Beberapa operators dapat dijumlahkan
- Penjumlahan bersifat komutatif:

$$X + Y = Y + X$$

- Penjumlahan bersifat asosiatif:

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$

Multiplication

- Beberapa operators dapat dikalikan
- Perkalian bersifat non-komutatif:

$$XY \neq YX$$

- Perkalian bersifat asosiatif:

$$X(YZ) = (XY)Z = XYZ$$

- Dual correspondence pada perkalian:

$$XY|\alpha\rangle = X(Y|\alpha\rangle) \leftrightarrow \left(\langle\alpha|Y^\dagger\right)X^\dagger = \langle\alpha|Y^\dagger X^\dagger$$
$$(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Eigen

- Terdapat bentuk ket khusus (eigenkets) dimana hasil dari sebuah operator adalah suatu nilai (eigenvalues):

$$A|\alpha'\rangle = a'|a'\rangle, A|\alpha''\rangle = a''|a''\rangle, \ldots$$

- Jika A adalah Hermitian, maka:

$$\langle a''|A = a''^{*}\langle a''|$$

- Hitung operator dari kiri dan kanan:

$$\langle a'|A|\alpha'\rangle = a'\langle a'||a'\rangle$$
$$\langle a'|A|\alpha'\rangle = a'^{*}\langle a'||a'\rangle$$
$$a = a^{*} \rightarrow real$$

- Hitung selisih inner product antar eigen:

$$0 = \langle a''|A|a'\rangle - \langle a''|A|a'\rangle = \left(a' - a''^{*}\right)\langle \alpha''|\alpha'\rangle$$
$$\langle \alpha''|\alpha'\rangle = 0 \rightarrow \mathrm{orthogonal}$$

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Uji Pemahaman

- Berapakah eigenvalue dari operator Hadamard:
- $H = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\langle 0| - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\langle 1|$

Closure

- Setiap ket apapun $|\alpha\rangle$ dapat juga ditulis sebagai vektor pada basis N eigenkets dari observables A:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

- Dimana $c_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle$
- Karena $|\alpha\rangle$ adalah ket apapun, maka kita memiliki completeness relation atau closure :

$$\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1$$

Projection

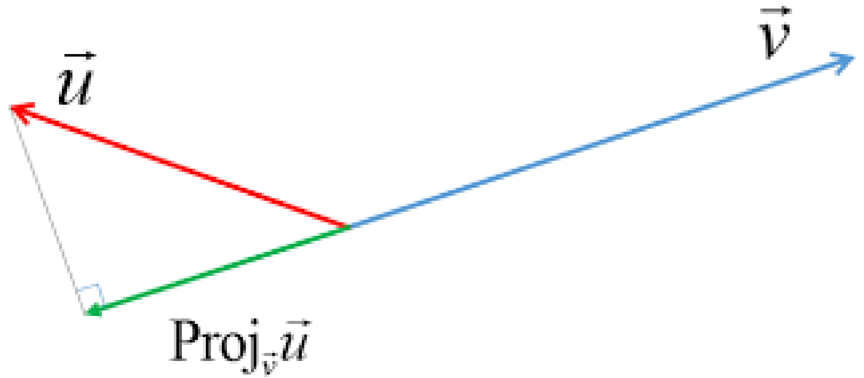
- Jika $|\alpha\rangle$ normalized, maka:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \left\langle\alpha\left|\left(\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|\right)\right|\alpha\right\rangle = \sum_{a'}|\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum_{a'}|c_{a'}|^2 = 1$$

- Dimana $|a'\rangle\langle a'|$ adalah projection operator terhadap ket $|\alpha\rangle$ menuju base ket $|a'\rangle$:

$$(|a'\rangle\langle a'|)|\alpha\rangle = |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = c_{a'}|a'\rangle$$

- Proyeksi ket $|\alpha\rangle$ terhadap basis observable a' adalah sebuah wavefunction pada koordinat $a' \rightarrow \Psi(a') = \langle a'|\alpha\rangle$



CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Uji Pemahaman

- $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ terletak pada basis $|0\rangle$ dan $|1\rangle$
- Gunakan proyeksikan $|\psi\rangle$ terhadap basis $|+\rangle$ dan $|-\rangle$

Bentuk Matriks

Bentuk Matriks

- Sebuah operator X terhadap ket $|\alpha\rangle$ dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks:

$$\langle a'|X|\alpha\rangle = \sum_{a''} \langle a'|X|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Sebuah operator X terhadap bra $\langle\alpha|$ dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks:

$$\langle\alpha| = \left(\langle\alpha|a^{(1)}\rangle \quad \langle\alpha|a^{(2)}\rangle \quad \dots\right) = \left(\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* \quad \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* \quad \dots\right)$$

$$\langle\alpha|X|a'\rangle = \sum_{a''} \langle\alpha|a''\rangle\langle a''|X|a'\rangle$$

$$\left(\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* \quad \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* \quad \dots\right) \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Perkalian Matriks

- Jika matriks X Hermitian, maka:

$$\langle a''|X|a'\rangle = \langle a''|X^\dagger|a'\rangle^* = \langle a''|X|a'\rangle^*$$

- Jika matriks $Z = XY$, artinya:

$$\langle a''|Z|a'\rangle = \langle a''|XY|a'\rangle = \sum_{a'''} \langle a''|X|a'''\rangle\langle a'''|Y|a'\rangle$$

- Inner Product:

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle \beta|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = \left(\langle a^{(1)}|\beta\rangle^* \quad \langle a^{(2)}|\beta\rangle^* \quad \ldots\right)\begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Outer Product:

$$|\beta\rangle\langle\alpha| = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \ldots \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Uji Pemahaman

- Apakah closure relation dari computational basis ($|0\rangle, |1\rangle$) dalam bentuk matriks?

Uji Pemahaman

- Sebuah operator berbentuk matriks 3x3 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Temukan eigenvector dan eigenvaluesnya

Formalisme

Postulat Kuantum (Bransden & Joachain)

1. Seluruh informasi mengenai suatu sistem direpresentasikan oleh state vector $|\Psi\rangle$
2. Prinsip superposisi. $|\Psi\rangle = c_1|\Psi_1\rangle + c_2|\Psi_2\rangle$
3. Setiap dynamical variable dideskripsikan oleh linear operator.
4. Hasil dari pengukuran untuk variabel A adalah eigen value dari operator A
5. Ekspektasi dari hasil pengukuran berkali-kali terhadap variabel A terhadap sistem dengan wavefunction $|\Psi\rangle$ adalah $\langle A\rangle = \frac{\langle\Psi|A|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}$
6. Wavefunction dapat diekspresikan secara kombinasi linear dari eigenfunction dari A
7. Perubahan wavefunction mengikuti persamaan schrodinger $i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle$, dimana H adalah operator energi total (Hamiltonian) dari sistem tersebut

CALVIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Postulat 1

- Wavefunction $|\Psi\rangle$ dan $c|\Psi\rangle$ merepresentasikan state yang sama, biasanya nilai c dipilih agar wavefunction ternormalisasi:

$$\int |\Psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 d\boldsymbol{r} = 1$$

- Dimana $P(\boldsymbol{r}, t) = |\Psi(\boldsymbol{r}, t)|^2$ dapat diinterpretasi sebagai position probability density

Postulat 2

- Jika wavefunction $|\Psi_1\rangle$dan $|\Psi_2\rangle$ adalah state dari sistem maka:

$$|\Psi\rangle = c_1|\Psi_1\rangle + c_2|\Psi_2\rangle$$

- Juga merupakan state dari sistem

Postulat 3

- Operator A adalah linear jika memiliki sifat:

$$A(c_1|\Psi_1\rangle + c_2|\Psi_2\rangle) = c_1 A|\Psi_1\rangle + c_2 A|\Psi_2\rangle$$

Postulat 4

- Wavefunction $|\psi_n\rangle$ adalah eigenfunction dari operator A jika:

$$A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

- Jika operator A adalah Hermitian maka eigenvalue a_n adalah bilangan real:

$$\langle\psi_n|A|\psi_n\rangle = a_n\langle\psi_n|\psi_n\rangle$$
$$\langle(A\psi_n)|\psi_n\rangle = a_n^*\langle\psi_n|\psi_n\rangle$$
$$a_n = a_n^*$$

Mathematics:	Hermitian	Eigenvector	Real Eigenvalue

$$A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

Physics:	Observable	State of the System	Measurement

Postulat 5

- Jika wavefunction $|\Psi\rangle$ ternormalisasi maka $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ dan $\langle A\rangle = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$
- Jika operator A adalah Hermitian maka ekspektasi $\langle A\rangle$ adalah bilangan real

Postulat 6

- Untuk himpunan eigenfunctions $\{\psi_n\}$:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$$

Postulat 7

- Hamiltonian operator dari sebuah sistem adalah:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m_i} + V(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N, t)$$

- Dimana operator momentum $\boldsymbol{p}_i = i\hbar\nabla_i$

Uji Pemahaman

- Apakah hasil pengukuran yang mungkin dari operator pauli-z $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dan Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Tuhan Memberkati