

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт машиностроения, материалов и транспорта
Высшая школа автоматизации и робототехники

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

Аппроксимация нелинейной зависимости

по дисциплине «Нечёткие системы обработки информации

в мехатронике и робототехнике»

Выполнил
студент гр. 3341506/10401

Паньков И.С.

Проверил
ассистент

Абросимов Э.А.

«__» _____ 2022 г.

Санкт-Петербург

2022

Цель работы

Цель работы — изучить особенности нечёткого моделирования в среде MATLAB и приобрести навыки разработки систем нечёткого вывода в интерактивном режиме с использованием пакета Fuzzy Logic Toolbox.

Задание

1 Ознакомиться с порядком проектирования и исследования нечётких систем в среде MATLAB по учебно-методическому пособию.

2 При помощи пакета расширения Fuzzy Logic Toolbox разработать системы нечёткого вывода типов Мамдани и Сугено для аппроксимации нелинейной зависимости, описываемой следующей функцией:

$$y = \sin^2(x_1 - 2x_2) \cdot e^{-|x_2|}, \quad x_1 \in [0; \pi], \quad x_2 \in [-1; 1]. \quad (1)$$

3 Для количественной оценки качества аппроксимации при помощи систем нечёткого вывода типов Мамдани и Сугено заданной нелинейной зависимости (1) определить соответствующие значения среднеквадратической ошибки.

4 Исследовать изменение качества аппроксимации при изменении типа функций принадлежности термов входных и выходной (для системы Мамдани) переменных.

5 Исследовать изменение качества аппроксимации при изменении количества термов в описании входных переменных.

6 Сделать выводы из проделанной работы, в которых отразить:

- область возможного применения пакета Fuzzy Logic Toolbox в интерактивном режиме для решения прикладных задач;
- особенности систем нечёткого вывода типов Мамдани и Сугено с точки зрения их практического использования;
- влияние на качество аппроксимации нелинейной зависимости количества и типа функций принадлежности термов входных переменных.

7 Подготовить отчёт по лабораторной работе.

Ход работы

Исходная нелинейная зависимость (1) описывает поверхность, график которой представлен на рисунке 1.

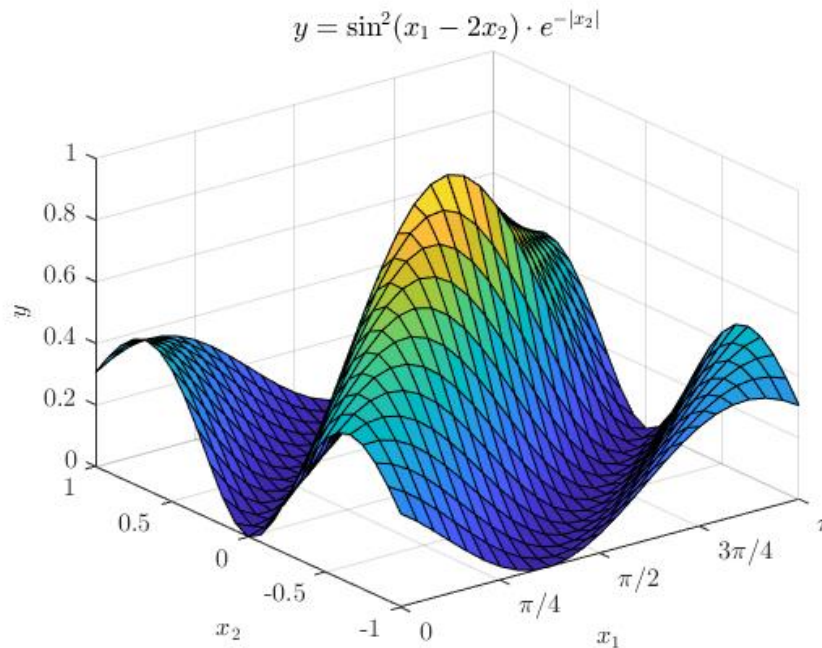


Рисунок 1 — Поверхность исходной нелинейной зависимости

Для аппроксимации зависимости разработаем системы нечёткого вывода типов Мамдани и Сугено. Поскольку поверхность достаточно сложна для описания, будем создавать систему сразу с пятью термами входных переменных, воспользовавшись их стандартным именованием: negative-big, negative-middle, zero, positive-middle и positive-big. Также в целях упрощения системы для начала рассмотрим только треугольные функции принадлежности. Графики функций принадлежности входных переменных $\mu(x_1)$ и $\mu(x_2)$ представлены на рисунке 2.

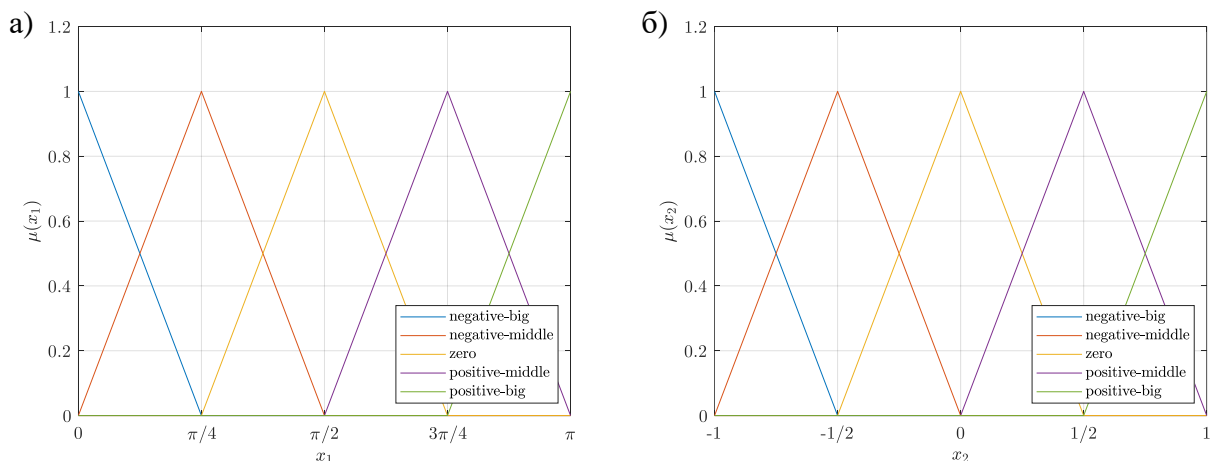


Рисунок 2 — Функции принадлежности входных переменных: а) — $\mu(x_1)$, б) — $\mu(x_2)$

Для создания системы типа Мамдани необходимо также определить функции принадлежности выходной переменной. Определим, как и в предыдущем случае, пять треугольных функций принадлежности. График функций принадлежности входной переменной $\mu(y)$ представлен на рисунке 3.

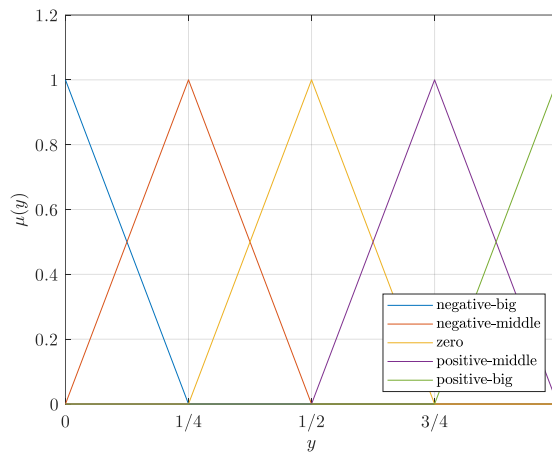


Рисунок 3 — Функции принадлежности выходной переменной $\mu(y)$

Для системы Мамдани с пятью термами входных и выходных переменных определим следующую базу правил нечётких продукций:

- 1 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = \text{positive-big}$;
- 2 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = \text{zero}$;
- 3 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = \text{zero}$;
- 4 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = \text{zero}$;
- 5 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = \text{zero}$;
- 6 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = \text{negative-middle}$;
- 7 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = \text{negative-middle}$;
- 8 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 9 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 10 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 11 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 12 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 13 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = \text{negative-big}$.

Поверхность, полученная в результате аппроксимации исходной зависимости системой нечёткого вывода типа Мамдани с треугольными функциями принадлежности переменных на входах и на выходе представлена на рисунке 4.

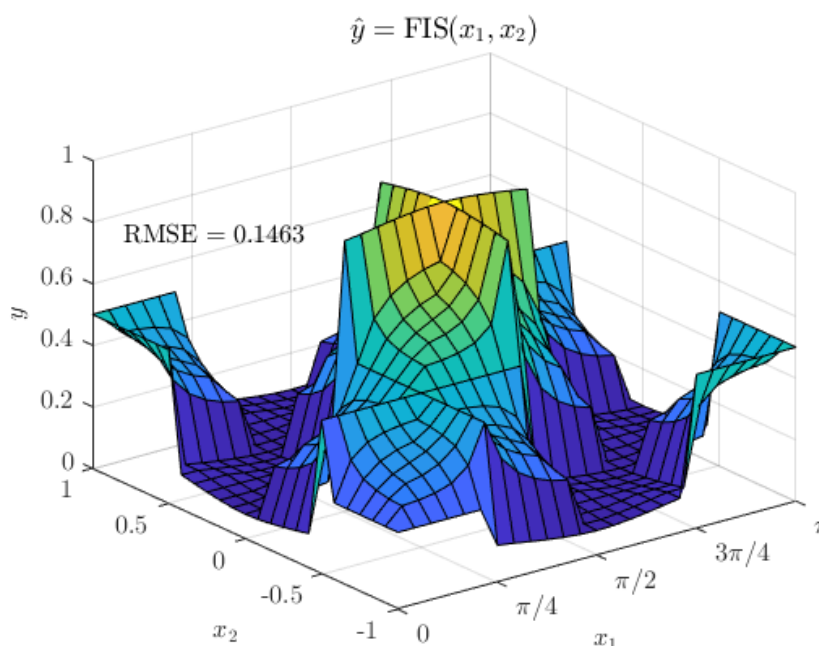


Рисунок 4 — Аппроксимация системы нечёткого вывода типа Мамдани

Для создания системы типа Сугено необходимо определить выражения для выходной переменной при различных значениях входной переменной. Обратим внимание, что поверхность в указанной области определения входных переменных является центрально симметричной относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $(0; \pi/2)$ плоскости $x_1 O x_2$ и имеет характерные зоны: «хребет», ограниченный сверху функцией $e^{-|x_2|}$, «впадины», касающиеся «нулевой» плоскости семейством прямых

$$\sin(x_1 - 2x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = \pm \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

и «крылья», восходящие из «впадин» при удалении от «хребта».

Для описания «впадин» и «хребта» потребуются четыре константы:

$$\begin{aligned} y = 0, & & y = 1/\sqrt{e} \approx 0,6, \\ y = 1, & & y = 1/e \approx 0,4, \end{aligned} \quad (3)$$

а для описания «крыльев» зададим две плоскости, проходящие через пары точек и прямых $(0; 1; 1/2)$ и $x_1 - 2x_2 = 0$; $(\pi; -1; 1/2)$ и $x_1 - 2x_2 = \pi$ соответственно.

Пересечения прямых с границами области определения заданной функции даст нам вместе с уже известными точками две тройки точек:

$$\begin{aligned} A' &= (0; 1; 1/2), & A'' &= (\pi; -1; 1/2), \\ B' &= (0; 0; 0), & B'' &= (\pi; 0; 0), \\ C' &= (2; 1; 0), & C'' &= (\pi - 2; -1; 0). \end{aligned} \quad \text{и} \quad (4)$$

По этим точкам несложно найти уравнения плоскостей, подставив значения в определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 - x_{1A} & x_2 - x_{2A} & y - y_A \\ x_{1B} - x_{1A} & x_{2B} - x_{2A} & y_B - y_A \\ x_{1C} - x_{1A} & x_{2C} - x_{2A} & y_C - y_A \end{vmatrix}, \quad (5)$$

и выразив из полученного выражения y явно. В результате некоторых простейших математических преобразований получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} y &= -x_1/4 + x_2/2, \\ y &= x_1/4 - x_2/2 - \pi/4. \end{aligned} \quad (6)$$

Для системы Сугено с пятью термами входных переменных определим следующую базу правил нечётких продукций:

- 1 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = 1$;
- 2 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = 1/\sqrt{e}$;
- 3 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = 1/\sqrt{e}$;
- 4 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = 1/e$;
- 5 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = 1/e$;
- 6 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = 0$;
- 7 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = 0$;
- 8 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = 0$;
- 9 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = 0$.
- 10 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = -x_1/4 + x_2/2$;
- 11 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = x_1/4 - x_2/2 - \pi/4$.

Поверхность, полученная в результате аппроксимации исходной зависимости системой нечёткого вывода типа Сугено с треугольными функциями принадлежности переменных на входах представлена на рисунке 5.

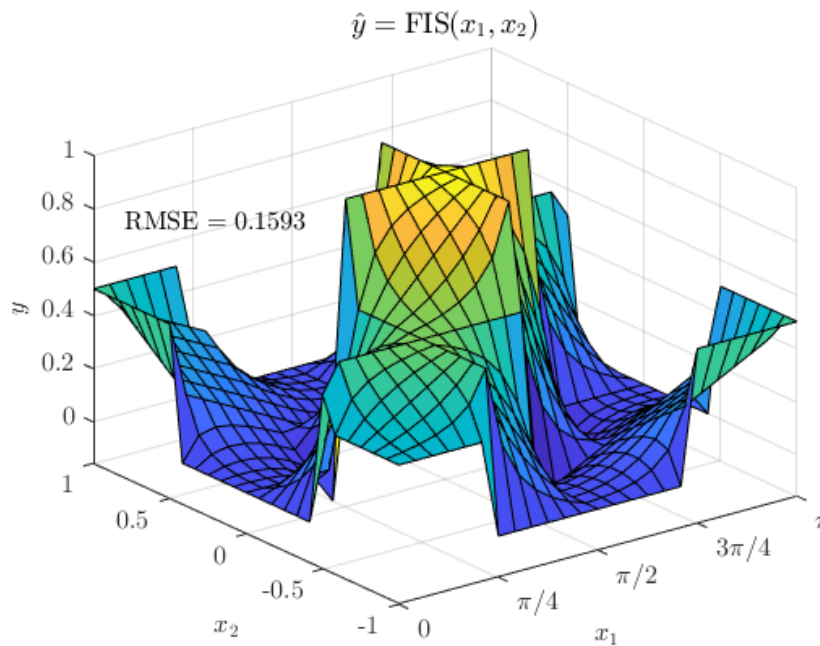


Рисунок 5 — Аппроксимирующая поверхность системы нечёткого вывода типа Сугено

Для оценки качества аппроксимации зависимости оценим среднеквадратичную ошибку аппроксимации (англ. Root Mean Square Error, RMSE). Её величина вычисляется по формуле

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{M \cdot N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2} \quad (7)$$

где M и N — количество контрольных точек вдоль осей входных переменных;

$y_{ij} \equiv y(x_{1ij}, x_{2ij})$ — значения исходной функции в контрольных точках;

$\hat{y}_{ij} \equiv \text{FIS}(x_{1ij}, x_{2ij})$ — значения аппроксимирующей функции в контрольных точках;

Для разработанных систем нечёткого вывода типов Мамдани и Сугено с треугольными функциями принадлежности получаем следующие значения среднеквадратичных ошибок аппроксимации:

$$\text{RMSE}_{\text{Mamdani}} = 0,1463, \quad \text{RMSE}_{\text{Sugeno}} = 0,1593. \quad (8)$$

Как видно, для данной конфигурации количества термов и функций принадлежности качество аппроксимации системы типа Мамдани оказалось выше.

Исследуем влияние типа функции принадлежности на качество аппроксимации исходной зависимости системами нечёткого вывода. Для этого проанализируем различные комбинации типов функций принадлежности, добавив к рассмотрению гауссовы функции принадлежности. Сравнение функций принадлежности термов входных и выходных переменных представлено на рисунке 6.

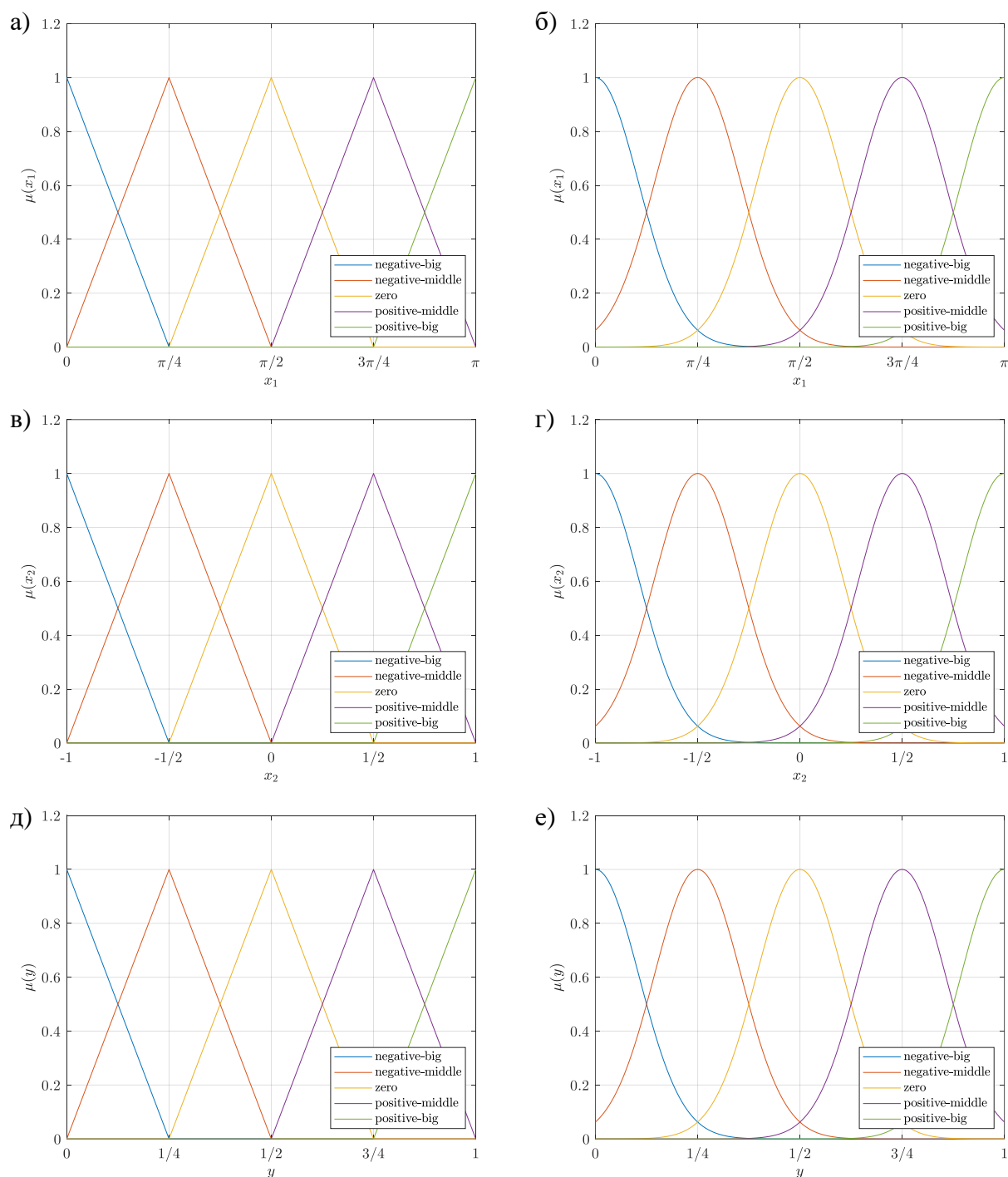


Рисунок 6 — Функции принадлежности переменных: а) — $\mu(x_1)$ с треугольными функциями, б) — $\mu(x_1)$ с гауссовыми функциями, в) — $\mu(x_2)$ с треугольными функциями, г) — $\mu(x_2)$ с гауссовыми функциями, д) — $\mu(y)$ с треугольными функциями (система типа Мамдани), е) — $\mu(y)$ с гауссовыми функциями (система типа Мамдани)

Сравнение поверхностей, полученных в результате аппроксимации системами нечёткого вывода представлено на рисунке 7. Сравнение качества аппроксимации систем нечёткого вывода представлено в таблице .

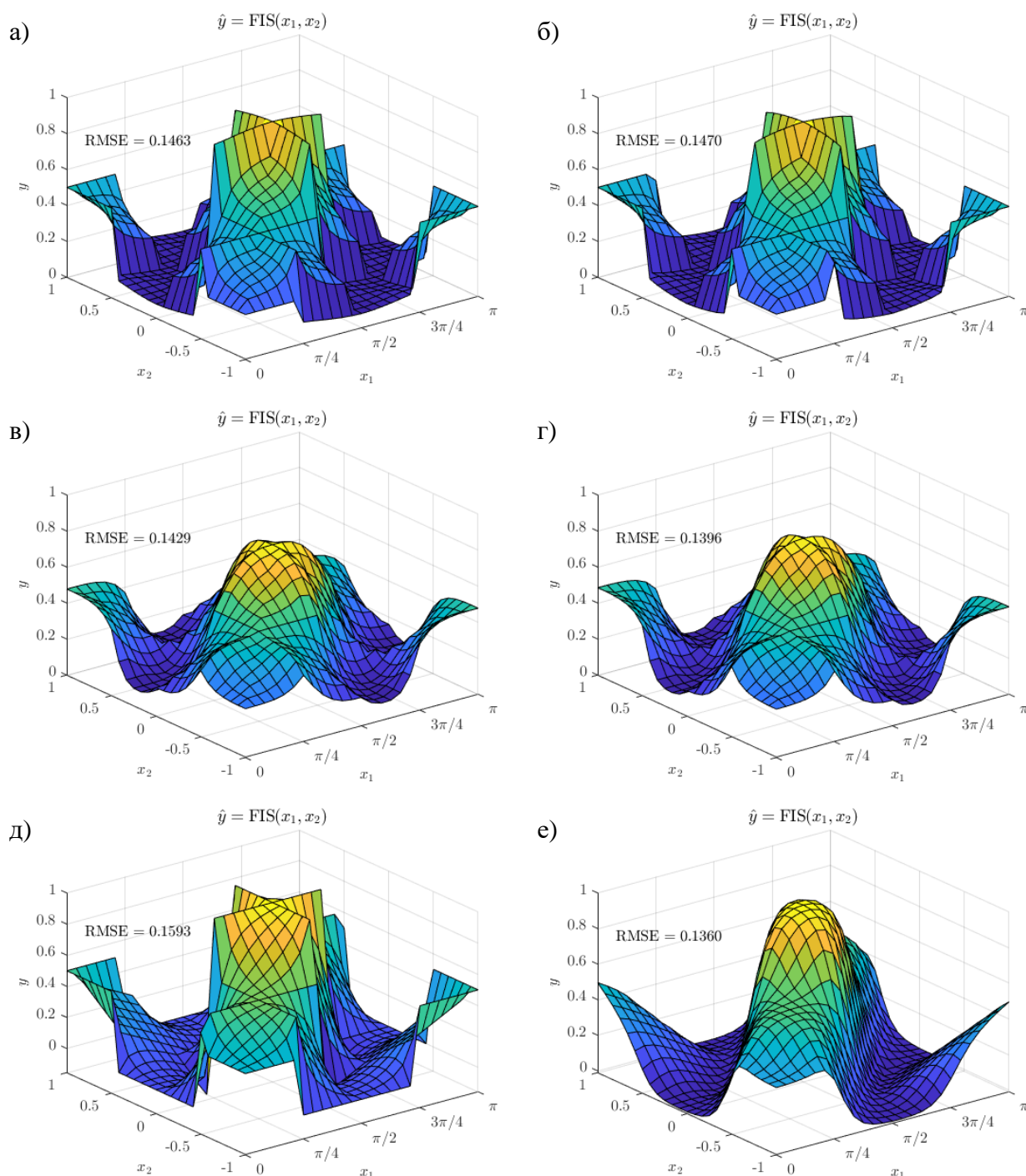


Рисунок 7 — Аппроксимирующие поверхности систем нечёткого вывода с различными типами функций принадлежности термов входных и выходных переменных:

- а) — системы типа Мамдани с треугольными функциями на входах и на выходе,
- б) — системы типа Мамдани с треугольными функциями на входах и гауссовыми функциями на выходе, в) — системы типа Мамдани с гауссовыми функциями на входах и треугольными функциями на выходе, г) — системы типа Мамдани с гауссовыми функциями на входах и на выходе, д) — системы типа Сугено с треугольными функциями на входах, е) — системы типа Сугено с гауссовыми функциями на входах

Таблица 1 — Результаты сравнение качества аппроксимации систем нечёткого вывода с различными типами функций принадлежности термов входных и выходных переменных

Тип системы нечёткого вывода	Тип функций принадлежности на входах	Тип функций принадлежности на выходе	Среднеквадратическая ошибка аппроксимации
Мамдани	треугольные	треугольные	RMSE = 0,1463
Мамдани	треугольные	гауссовы	RMSE = 0,1470
Мамдани	гауссовы	треугольные	RMSE = 0,1429
Мамдани	гауссовы	гауссовы	RMSE = 0,1396
Сугено	треугольные	—	RMSE = 0,1593
Сугено	гауссовы	—	RMSE = 0,1360

Как видно из результатов сравнения, тип функции принадлежности выходной переменной для систем типа Мамдани достаточно слабо влияет на качество аппроксимации. В то же самое время тип функции принадлежности входных переменных оказывает значительное влияние на качество аппроксимации и для систем типа Сугено позволяет существенно повысить её точность.

Исследуем влияние количества термов функций принадлежности входных переменных на качество аппроксимаций. Поскольку, как уже отмечалась ранее, поверхность довольно сложна для описания, её аппроксимация с учётом ключевых особенностей входными переменными с тремя термами невозможна. По этой причине добавим к рассмотрению только системы с семью термами входных переменных. При этом отметим, что изменения не коснутся выходных переменных: их количество и значения останутся прежними.

Воспользуемся стандартными именованиями термов входных переменных для новых систем нечёткого вывода, назвав их *negative-big*, *negative-middle*, *negative-small*, *zero*, *positive-small*, *positive-middle* и *positive-big*. Поскольку ранее было отмечено, что гауссовы функции принадлежности на входах системы дают более высокое качество аппроксимации, рассматриваться будут только эти функции. Сравнение функций принадлежности с различным количеством термов входных переменных представлены на рисунке 8.

Поскольку у новых систем нечёткого вывода изменились функции принадлежности входных переменных, необходимо составить новые базы правил нечётких продукций.

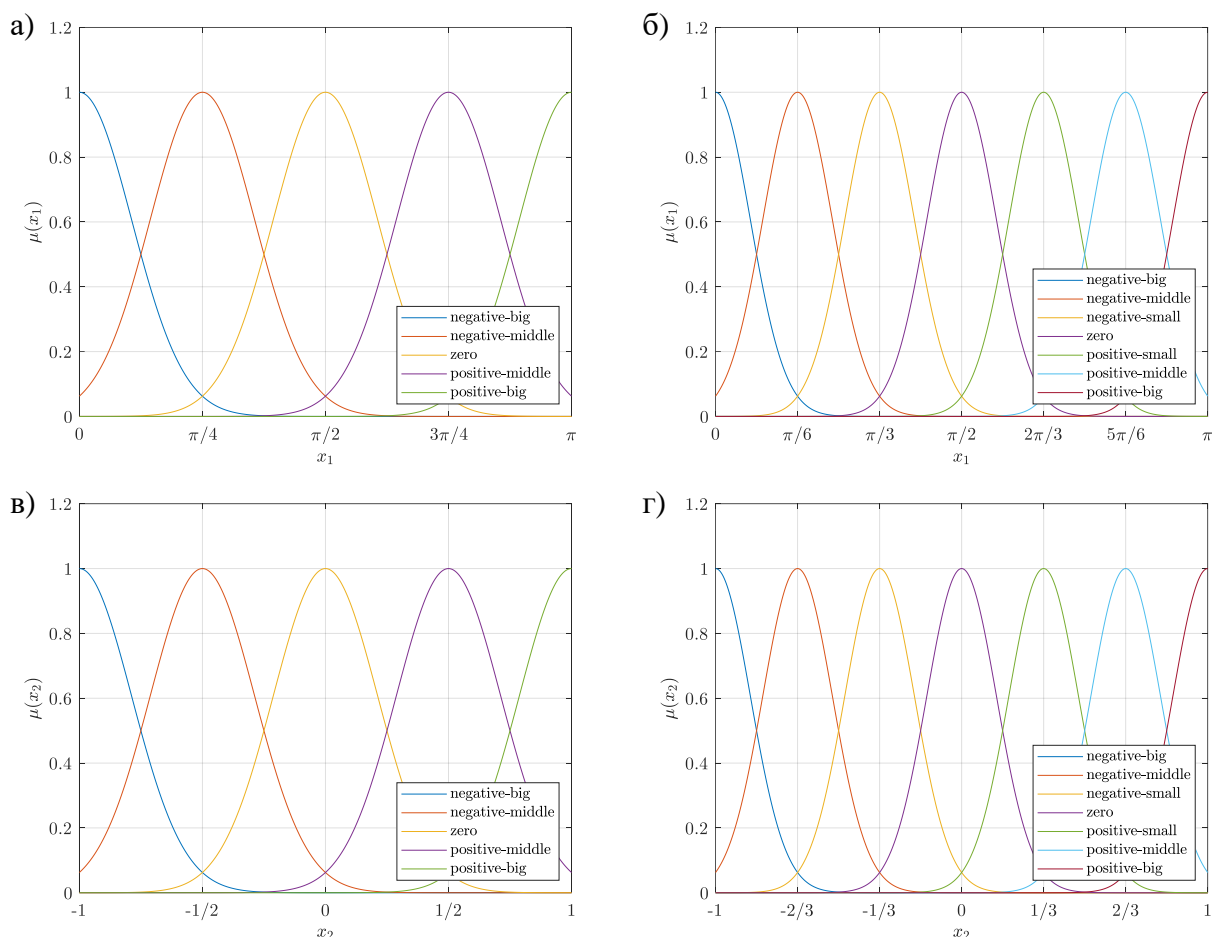


Рисунок 8 — Функции принадлежности переменных: а) — $\mu(x_1)$ с пятью термами, б) — $\mu(x_1)$ с семью термами, в) — $\mu(x_2)$ с пятью термами, г) — $\mu(x_2)$ с семью термами

Для системы Мамдани с семью термами входных и выходных переменных определим следующую базу правил нечётких продукций:

- 1 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = \text{positive-big}$;
- 2 Если $x_1 = \text{negative-small}$ и $x_2 = \text{negative-small}$, то $y = \text{positive-middle}$;
- 3 Если $x_1 = \text{positive-small}$ и $x_2 = \text{positive-small}$, то $y = \text{positive-middle}$;
- 4 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = \text{zero}$;
- 5 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = \text{zero}$;
- 6 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = \text{zero}$;
- 7 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = \text{zero}$;
- 8 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 9 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 10 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = \text{negative-middle}$;
- 11 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = \text{negative-middle}$;

- 12 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = \text{negative-middle}$;
- 13 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = \text{negative-middle}$;
- 14 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 15 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 16 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 17 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 18 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{positive-small}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 19 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{negative-small}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 20 Если $x_1 = \text{negative-small}$ и $x_2 = \text{positive-small}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 21 Если $x_1 = \text{positive-small}$ и $x_2 = \text{negative-small}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 22 Если $x_1 = \text{negative-small}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 23 Если $x_1 = \text{positive-small}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 24 Если $x_1 = \text{negative-small}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = \text{negative-big}$;
- 25 Если $x_1 = \text{positive-small}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = \text{negative-big}$;

Для системы Сугено с семью термами входных переменных определим следующую базу правил нечётких продукций:

- 1 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = 1$;
- 2 Если $x_1 = \text{negative-small}$ и $x_2 = \text{negative-small}$, то $y = 1/\sqrt{e}$;
- 3 Если $x_1 = \text{positive-small}$ и $x_2 = \text{positive-small}$, то $y = 1/\sqrt{e}$;
- 4 Если $x_1 = \text{negative-middle}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = 1/e$;
- 5 Если $x_1 = \text{positive-middle}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = 1/e$;
- 6 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = 1/e$;
- 7 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = 1/e$;
- 8 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = 0$;
- 9 Если $x_1 = \text{zero}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = 0$;
- 10 Если $x_1 = \text{negative-small}$ и $x_2 = \text{positive-small}$, то $y = 0$;
- 11 Если $x_1 = \text{positive-small}$ и $x_2 = \text{negative-small}$, то $y = 0$;

12 Если $x_1 = \text{negative-small}$ и $x_2 = \text{negative-big}$, то $y = 0$;

13 Если $x_1 = \text{positive-small}$ и $x_2 = \text{positive-big}$, то $y = 0$;

14 Если $x_1 = \text{negative-big}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = 0$;

15 Если $x_1 = \text{positive-big}$ и $x_2 = \text{zero}$, то $y = 0$.

16 Если $x_1 = \text{negative-small}$ и $x_2 = \text{positive-middle}$, то $y = -x_1/4 + x_2/2$;

17 Если $x_1 = \text{positive-small}$ и $x_2 = \text{negative-middle}$, то $y = x_1/4 - x_2/2 - \pi/4$.

Сравнение поверхностей, полученных в результате аппроксимации системами нечёткого вывода представлено на рисунке 9. Сравнение качества аппроксимации систем нечёткого вывода представлено в таблице .

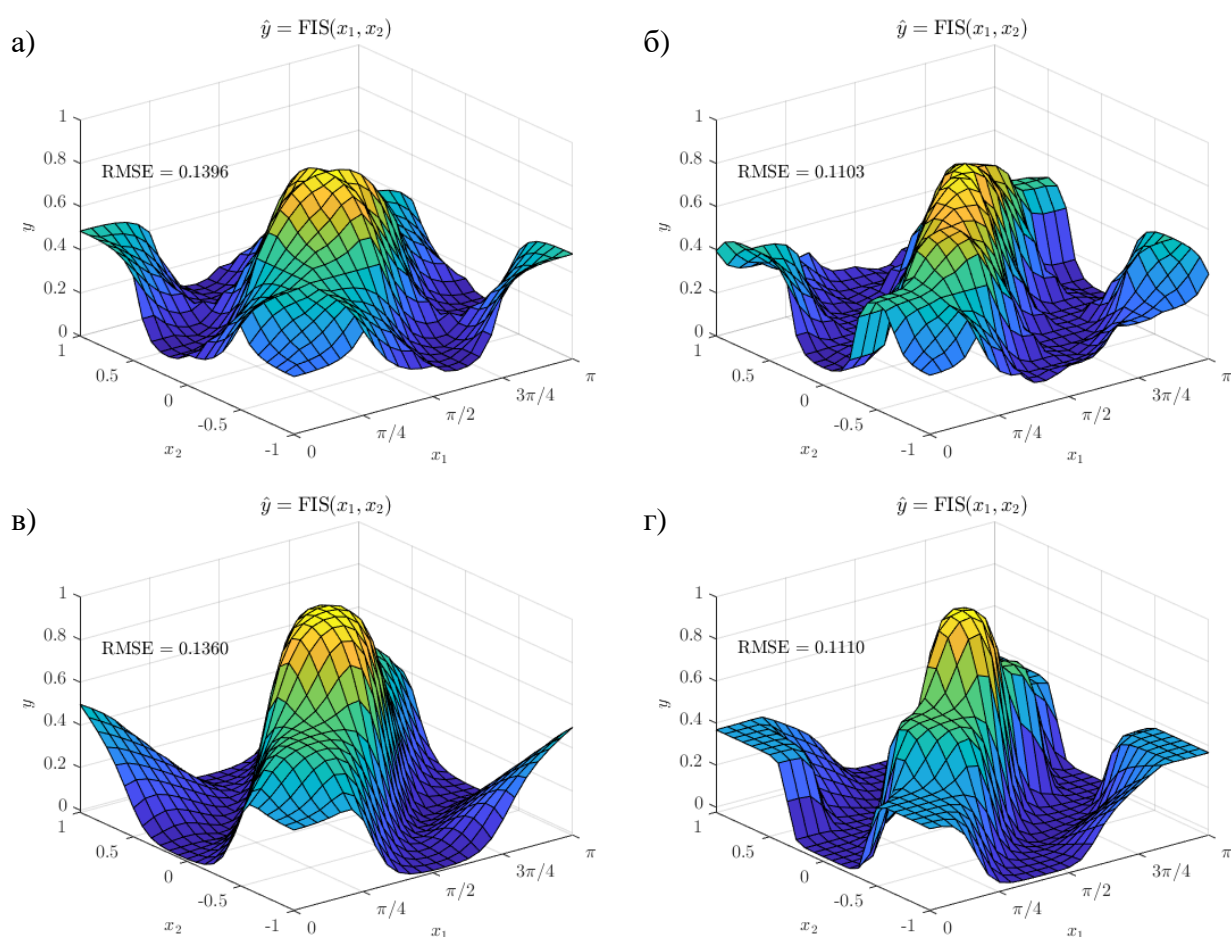


Рисунок 9 — Аппроксимирующие поверхности систем нечёткого вывода с различным количеством термов входных переменных:

- а) — системы типа Мамдани с пятью термами входных переменных,
- б) — системы типа Мамдани с семью термами входных переменных,
- в) — системы типа Сугено с пятью термами входных переменных,
- г) — системы типа Сугено с семью термами входных переменных

Таблица 2 — Результаты сравнение качества аппроксимации систем нечёткого вывода с различным количеством термов входных переменных

Тип системы нечёткого вывода	Тип функций принадлежности на входе	Количество термов на входе	Количество правил продукций	Среднеквадратическая ошибка аппроксимации
Мамдани	гауссовы	5	13	RMSE = 0,1396
Мамдани	гауссовы	7	25	RMSE = 0,1103
Сугено	гауссовы	5	11	RMSE = 0,1360
Сугено	гауссовы	7	17	RMSE = 0,1110

Как видно из результатов сравнения, увеличение количества термов входных переменных позволяет увеличить качество аппроксимации как для систем типа Мамдани, так и для систем типа Сугено, но также требует расширения базы правил нечётких продукций.

Выводы

Пакет Fuzzy Logic Toolbox предоставляет инструменты для создания систем нечёткого вывода и их редактирования с возможностью визуализации изменений в реальном времени. Это может быть полезным для упрощения разработки баз правил нечётких продукций, подбора количества термов нечётких переменных, типов функций принадлежности, весовых коэффициентов. Однако стоит заметить, что некоторые возможности пакета (например, визуализация зависимости выхода от входа) остаются удобными лишь при сравнительно небольшом количестве входных переменных.

Системы нечёткого вывода типа Мамдани позволяют абстрагироваться от поставленной задачи, поскольку оперируют нечёткими переменными как на входе, так и на выходе, что упрощает задачу по разработке системы в ряде случаев. В то же время системы нечёткого вывода типа Сугено требуют анализа конкретной задачи для формирования дополнительных математических зависимостей на выходе системы, что делает процесс разработки системы более сложным, но в некоторых случаях позволяет получить более высокое качество аппроксимации.

На качество аппроксимации системы нечёткого вывода влияют многие параметры, в том числе количество термов входных переменных и типы их функций принадлежности. Увеличение количества термов входных переменных позволяет улучшить качество аппроксимации, по крайней мере, до какого-то предела, но может требовать увеличения базы правил нечётких продукций. Усложнение функций принадлежности термов входных переменных может влиять на качество аппроксимации (и в некоторых случаях достаточно серьёзно), но зависит от конкретной задачи.

23:36

20 октября 2022 г.