

# Inferens

Økonometri A

---

Bertel Schjerning

Fordelingen af OLS estimatoren (W4.1)

Hypotesetestning med en parameter (W4.2-W4.3)

- t-test

- p-værdier

- Konfidensintervaller

Test af lineære kombinationer (W4.4)

Multiple lineær hypoteser (W4.5)

- F-test

Sammenhæng mellem fordelinger

# Motivation

---

## Hvad ved vi om OLS indtil videre?

OLS estimatoren er en *estimator* ("estimations maskine"):

Input (Data)			Output (Estimator)
Sample 1: $\{(y_1, X_1), \dots, (y_n, X_n)\}$			$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots)_1$
$\vdots$	$\rightarrow$	<b>OLS</b>	$\rightarrow \vdots$
Sample k: $\{(y_1, X_1), \dots, (y_n, X_n)\}$			$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots)_k$

OLS estimatorerne er med andre ord stokastiske, og vi har vist at

$$\hat{\beta}_j \sim F\left(\beta_j, \frac{\sigma^2}{SSR_j}\right)$$

$$\hat{\beta} \sim F(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

Men vi ved stadig ikke hvordan  $\hat{\beta}_j$  er fordelt.

# Motivation: Skal vi bruge fordelingen af OLS estimaterne?

Typisk vil vi gerne bruge estimationer til at *teste hypoteser*:

- **Fx:** Er der et positivt afkast af DatØk uddannelsen?
- **Fx:** Er afkastet højere end for Datalogi?

**Indtil videre:** Vi har estimeret effekten af fx uddannelse på lønnen.

**Men:** Vi vil også gerne vide, om det estimat, vi får, lige så vel kunne skyldes *stikprøveusikkerheden*.

For at kunne svare på sådanne spørgsmål, er det *ikke* nok at kende:

- **Middelværdi** af  $\hat{\beta}_j$
- **Varians** af  $\hat{\beta}_j$

**Vi skal også kende fordelingen!**

# Motivation: Eksempler på hypoteser

Vi kunne eksempelvis være interesseret i at undersøge om:

- $\beta_j = 0$  (*ingen effekt af variabel*)
- $\beta_j = a$  (*parameter lig en given værdi*)
- $\beta_j \leq a$  (*parameter mindre eller lig en værdi*)
- $\beta_j = \beta_h$  (fx:  $\beta_{\text{DatØk}} = \beta_{\text{DataLogi}}$ )
- $k_j\beta_j + k_h\beta_k = a$  (*lineær restriktion på  $\beta$* )
- $f(\beta) = a$ , hvor  $f(\cdot)$  er en funktion af parametrene

## Procedure for hypotesetestning:

1. **Definer nulhypotesen  $H_0$  og alternativhypotesen  $H_1$ .**

*Vi opretholder hypotesen  $H_0$ , indtil den er modbevist.*

2. **Udregn teststørrelsen i din stikprøve.**

*Vi har brug for en teststørrelse ("test statistic"), som vi kender den teoretiske fordeling af, forudsat at  $H_0$  er sandt.*

3. **Beregn sandsynligheden for at observere teststørrelsen, hvis  $H_0$  er sand.**

4. **Afvis  $H_0$ , hvis sandsynligheden er tilstrækkelig lille.**

*Det er os, der vælger, hvad vi mener med "lille". Dette vender vi tilbage til.*

## **Fordelingen af OLS estimatoren**

---



## Fordelingen af OLS: Normalitet

### Ny antagelse:

MLR.6 Fejlleddene  $u$  er uafhængige af de forklarende variable  $X$  og er normalfordelt med middelværdi 0 og varians  $\sigma^2$ :

$$u \sim N(0, \sigma^2)$$

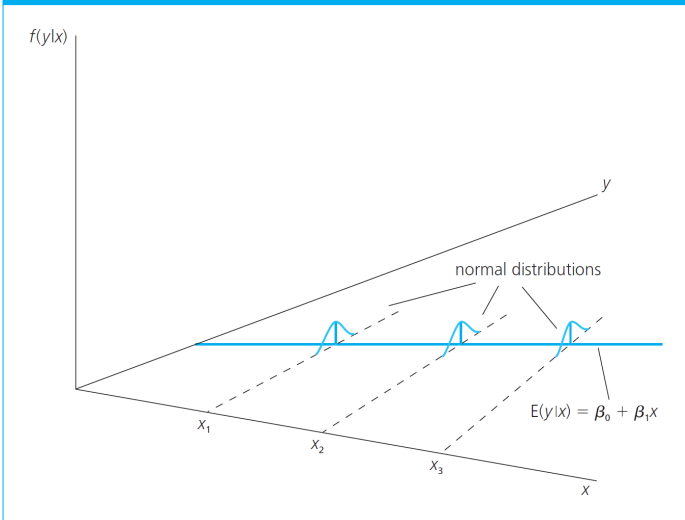
**MLR.1-MLR.6** kaldes de klassiske lineære model antagelser (CLM).

Under MLR.1-MLR.6 er:

$$y|\mathbf{x} \sim N(\mathbf{x}\beta, \sigma^2)$$

# Fordelingen af OLS: Normalitet

FIGURE 4.1 The homoskedastic normal distribution with a single explanatory variable.



## Er antagelse MLR.6 rimelig?

- **Det afhænger af problemstillingen:**

For nogle modeller er antagelsen om normalitet i fejleddene realistisk, mens den i andre er problematisk.

- **Normalfordelingen kan være en god antagelse, når:**

$u$  er summen af mange små, uafhængige faktorer  
(*Centrale grænseværdi sætning*).

- **Urealistisk, når:**  $y$  kun kan antage et begrænset antal værdier (som binære eller kategoriske variable).

- **Ultimativt et empirisk spørgsmål** (afhænger af data/kontekst).

- **Testbar antagelse:** Antagelsen om normalfordeling kan testes.

**Vigtigt:** MLR.6 er kun nødvendig, når vi arbejder med små stikprøver (mere om det i W.5)

## Fordelingen af OLS: Normalitet

**Teorem 4.1:** OLS estimator med **kendt**  $\sigma^2$  er normalfordelt

Under antagelse af MLR.1–MLR.6 er OLS estimatoren normalt fordelt:

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

For den enkelte  $\beta_j$  har vi:

$$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \text{Var}(\hat{\beta}_j))$$

og

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{sd(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma / \sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}} \sim N(0, 1)$$

## Fordelingen af OLS: t-fordelingen

Variansen af  $\hat{\beta}$  indeholder den ukendte parameter  $\sigma^2$ , som vi erstatter med  $\hat{\sigma}^2$ . Dette fører til:

**Teorem 4.2:** OLS estimator med **ukendt**  $\sigma^2$  er t-fordelt

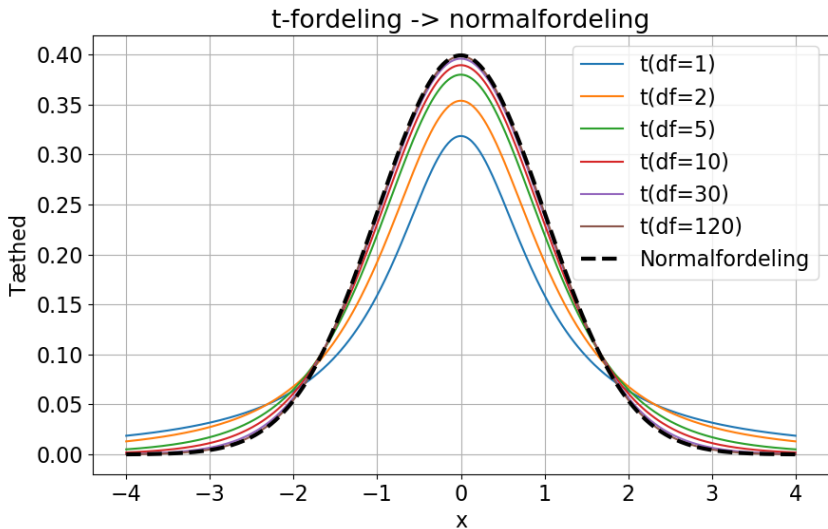
Under CLM antagelserne (MLR.1-MLR.6) gælder:

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma} / \sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}} \sim t_{n-k-1}$$

- $n - k - 1$ : Frihedsgrader (**df**, degrees of freedom).
- $k + 1$ : Antallet af  $\beta$ -parametre, som estimeres.

**Bemærk:**  $t$ -fordelingen konvergerer mod normalfordelingen, når antallet af frihedsgrader er "stor" ( $n - k - 1 > 120$ ).

## Fordelingen af OLS: t-fordelingen og frihedsgrader



# Hypotesetestning med en parameter

---

# Hypotesetestning med en parameter

Med Teorem 4.2 kan vi teste hypoteser om en parameter i populationsregressionsmodellen:

$$H_0 : \beta_j = a$$

hvor  $a$  er en konstant. Vi anvender følgende **t-teststørrelse**:

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - a}{se(\hat{\beta}_j)}$$

- Nulhypotesen postulerer, at parameteren er lig en bestemt værdi.
- Hvis  $H_0$  er sand, følger teststørrelsen en t-fordeling.

**Spørgsmål:** Teststørrelsen er 0 når  $\hat{\beta}_j = a$ , men hvornår er t-teststørrelsen "*stor nok*" til at afvise  $H_0$  til fordel for en alternativhypotese?



# Valg af alternativhypotese

Vi kan fastlægge forskellige alternative hypoteser:

- **Ensidet alternativ:**  $H_1 : \beta_j > a$  eller  $H_1 : \beta_j < a$
- **Dobbeltsidet alternativ:**  $H_1 : \beta_j \neq a$

Det relevante alternativ afhænger af problemstillingen.

**Eksempel:** I lønregressionen kan vi være interesseret i at undersøge:

- $H_0 : \beta_{edu} = 0$
- $H_1 : \beta_{edu} > 0$  eller  $H_1 : \beta_{edu} \neq 0$

De fleste Python-pakker, såsom `statsmodels`, beregner som standard en t-test for hver parameter, altså so test for hypotesen

$$H_0 : \beta_j = 0 \text{ og } H_1 : \beta_j \neq 0$$

# Lønregression: Python eksempel

```
# Code: Se 04_inference/04_inference_examples.ipynb
```

OLS Regression Results for Dependent Variable: lwage

=====

Number of Observations: 1078

Degrees of Freedom: 1073 (Residual), 5 (Model)

R-squared: 0.2058

TSS: 111.2507, RSS: 88.3507, ESS: 22.9000

=====

Variable	Coefficient	Std. Error	t	P> t	95% Conf. Interval
const	4.2699	0.0466	91.7066	0.0000	[ 4.1786, 4.3613 ]
educ	0.0270	0.0027	10.1735	0.0000	[ 0.0218, 0.0322 ]
experience	0.0428	0.0102	4.1983	0.0000	[ 0.0228, 0.0628 ]
experience2	-0.0018	0.0007	-2.3782	0.0176	[ -0.0032, -0.0003 ]
experience3	0.0286	0.0154	1.8543	0.0640	[ -0.0017, 0.0588 ]

=====

## Kritisk niveau for t-teststørrelsen

Når vi fastlægger, hvor stor t-teststørrelsen skal være, for at vi afviser  $H_0$ , balancerer vi to typer af fejl:

- Type I (falsk positiv): Vi afviser  $H_0$  selvom  $H_0$  er sand.
- Type II (falsk negativ): Vi afviser ikke  $H_0$  selvom  $H_0$  er falsk.

I økonometri fastlægger vi typisk det “kritiske niveau” for t-teststørrelsen, hvor vi afviser  $H_0$  ved at svare på:

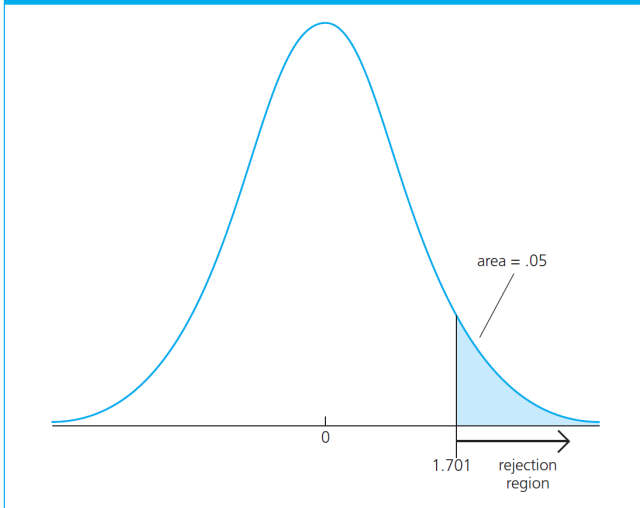
- Med hvilken sandsynlighed vil vi riskere at afvise en sand  $H_0$ ?
- Dvs. sandsynligheden for type I fejl.

Typisk tillader vi en sandsynlighed for type I fejl på 10%, 5% eller 1%.

## Kritisk niveau for t-teststørrelsen: $H_1 : \beta_j > 0$

Enkeltsidet alternativ, signifikansniveau 5%, 28 frihedsgrader:

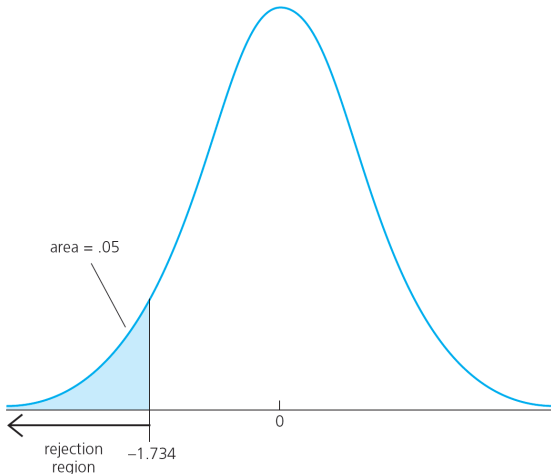
FIGURE 4.2 5% rejection rule for the alternative  $H_1: \beta_j > 0$  with 28 df.



## Kritisk niveau for t-teststørrelsen: $H_1 : \beta_j < 0$

Enkeltsidet alternativ, signifikansniveau 5%, 18 frihedsgrader:

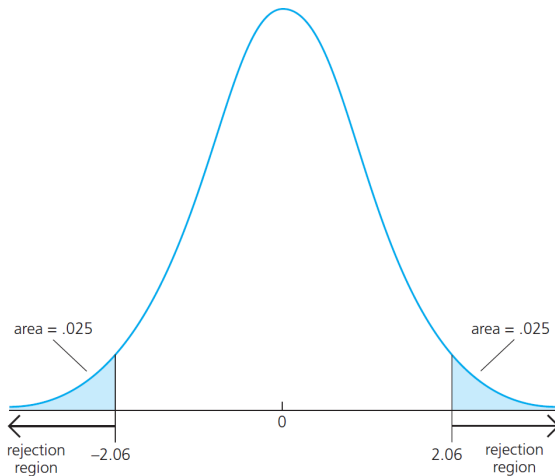
FIGURE 4.3 5% rejection rule for the alternative  $H_1 : \beta_j < 0$  with 18 df.



## Kritisk niveau for t-teststørrelsen: $H_1 : \beta_j \neq 0$

Dobbeltsidet alternativ, signifikansniveau 5% (2.5% i hver side):

FIGURE 4.4 5% rejection rule for the alternative  $H_1: \beta_j \neq 0$  with 25 *df*.



## Lønregression: Python eksempel (igen)

Er t-teststørrelsen for experience3 stor nok til at afvise H0?

Kritisk værdi for t-tests på 5% signifikansniveau: +/- 1.96

OLS Regression Results for Dependent Variable: lwage

=====

Number of Observations: 1078

Degrees of Freedom: 1073 (Residual), 5 (Model)

R-squared: 0.2058

TSS: 111.2507, RSS: 88.3507, ESS: 22.9000

=====

Variable	Coefficient	Std. Error	t
const	4.2699	0.0466	91.7066
educ	0.0270	0.0027	10.1735
experience	0.0428	0.0102	4.1983
experience2	-0.0018	0.0007	-2.3782
experience3	0.0286	0.0154	1.8543

=====

I stedet for at lægge os fast på et kritisk niveau for t-teststørrelsen, kan vi også spørge:

- Givet  $H_0$ , hvad er sandsynligheden for at observere en teststørrelse ( $T$ ), som er mindst lige så stor som den vi faktisk observerer ( $t$ )?

Svaret giver **p-værdien**. Definition:

- Dobbelt sidedt alternativ  $H_1 : \beta_j \neq a$ :

$$P(|T| > |t|) = 2P(T > |t|)$$

- Enkeltsidet alternativ  $H_1 : \beta_j > a$

$$P(T > t)$$

p-værdien viser på hvilket niveau vi kan afvise  $H_0$ .



## Beregning af p-værdi i dobbelt-sidet test

Vi tester  $H_0 : \beta_j = a$  mod  $H_1 : \beta_j \neq a$ . Under  $H_0$  er sandsynligheden for, at teststørrelsen  $T$  ligger uden for intervallet  $[-|t|, |t|]$ :

$$P(|T| \geq |t|) = P(T \geq |t|) + P(T \leq -|t|)$$

Da t-fordelingen er **symmetrisk**, har vi  $P(T \leq -|t|) = P(T \geq |t|)$ , så vi kan nøjes med at beregne den ene sandsynlighed og gange med 2:

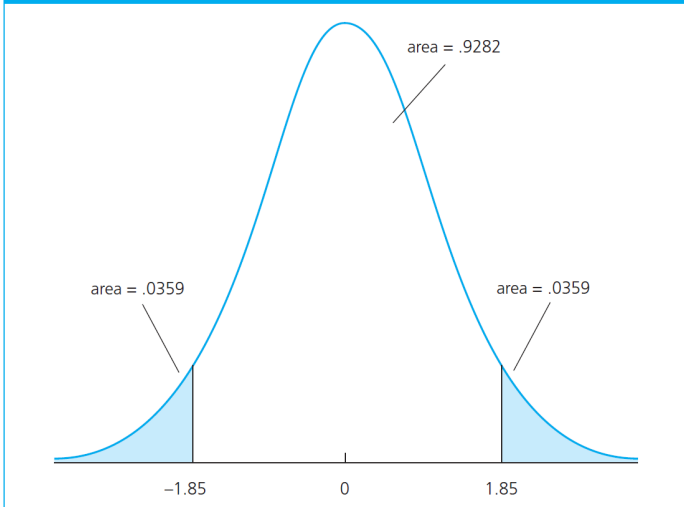
$$\text{p-værdi} = 2 \cdot P(T \geq |t|) = 2 \cdot (1 - \text{CDF}(|t|; n - k - 1))$$

hvor  $\text{CDF}(t; n - k - 1) = P(T \leq t)$  er den kumulative fordelingsfunktion (CDF) for t-fordelingen med  $n - k - 1$  frihedsgrader.

**Bemærk:** Symmetrien gør, at vi kun behøver at beregne sandsynligheden for én hale.

## p-værdier for $H_1 : \beta_j \neq 0$

FIGURE 4.6 Obtaining the  $p$ -value against a two-sided alternative, when  $t = 1.85$  and  $df = 40$ .



# Lønregression: Python eksempel (igen)

p-værdi for t-tests kan beregnes ved opslag i t-fordeling

```
# Dobbelt sidede p-værdier for t-test kan beregnes som:  
p_values = 2 * (1 - stats.t.cdf(np.abs(t_stat), df=n - k))
```

OLS Regression Results for Dependent Variable: lwage

```
=====
```

Number of Observations: 1078  
Degrees of Freedom: 1073 (Residual), 5 (Model)  
R-squared: 0.2058  
TSS: 111.2507, RSS: 88.3507, ESS: 22.9000

```
=====
```

Variable	Coefficient	Std. Error	t	P> t
const	4.2699	0.0466	91.7066	0.0000
educ	0.0270	0.0027	10.1735	0.0000
experience	0.0428	0.0102	4.1983	0.0000
experience2	-0.0018	0.0007	-2.3782	0.0176
experience3	0.0286	0.0154	1.8543	0.0640

```
=====
```

**Quiz:** Antag at vi har følgende regressionsmodel

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

og vi ønsker at teste hypotesen  $H_0 : \beta_2 = 0$  mod alternativhypotesen  $H_1 : \beta_2 \neq 0$ . Vi finder at

$$\hat{\beta}_2 = 0.56 \text{ og } p\text{-value} = 0.086$$

Hvad er p-værdien, hvis vi havde testet mod  $H_1 : \beta_2 > 0$ ?

1. p-værdi=0.086
2. p-værdi=0.043
3. p-værdi=0.172

## Definition:

Konfidenstintervallet for  $\beta_j$  er  $[\underline{b}_j; \bar{b}_j]$ , hvor

$$\begin{aligned}\underline{b}_j &= \hat{\beta}_j - c \cdot se(\hat{\beta}_j) \\ \bar{b}_j &= \hat{\beta}_j + c \cdot se(\hat{\beta}_j),\end{aligned}$$

hvor  $c$  fx er 97.5 fraktilen i en t-fordeling med  $n - k - 1$  frihedsgrad.

## Fortolkning:

Hvis vi kunne gentage estimationen med forskellige datasæt udtrukket fra samme population, så ville den sande parameter i 95% af tilfældene ligge indenfor konfidensintervallet.

- Vi siger at den sande værdi af  $\beta$  med 95% sikkerhed ligger indenfor konfidensintervallet.

# Lønregression: Python eksempel (igen)

```
# Code: Se 04_inference/04_inference_examples.ipynb
```

OLS Regression Results for Dependent Variable: lwage

Number of Observations: 1078

Degrees of Freedom: 1073 (Residual), 5 (Model)

R-squared: 0.2058

TSS: 111.2507, RSS: 88.3507, ESS: 22.9000

Variable	Coefficient	Std. Error	t	P> t	95% Conf. Interval
const	4.2699	0.0466	91.7066	0.0000	[ 4.1786, 4.3613 ]
educ	0.0270	0.0027	10.1735	0.0000	[ 0.0218, 0.0322 ]
experience	0.0428	0.0102	4.1983	0.0000	[ 0.0228, 0.0628 ]
experience2	-0.0018	0.0007	-2.3782	0.0176	[ -0.0032, -0.0003 ]
experience3	0.0286	0.0154	1.8543	0.0640	[ -0.0017, 0.0588 ]



- **Jupyter Notebook:** `04_inference_examples.ipynb`
- **Python Module:** `mymlr.py`
- **Part 1:** t-test, p-værdier og konfidensintervaller
- Hypotesetestning i model for timeløn, uddannelse og erfaring

Las os alle teste

# Statistisk signifikans vs økonomisk signifikans

Statistisk signifikans er ikke ensbetydende med at estimatet er økonomisk relevant

Nogle gange er et resultat statistisk signifikant, men koefficienten er så lille, at den ikke har nogen praktisk signifikans.

Økonomisk signifikans skal vurderes ud fra parameterestimatets størrelse relativt til:

- Den gennemsnitlige værdi af  $y$ .
- I forhold til tidligere studier.
- Andre relevante sammenligninger (f.eks. afkast af uddannelse sammenlignet med afkast af erfaring).

## Husk:

- Statistisk signifikans er vigtige, men glem ikke at fortolk  $\hat{\beta}$ .



4 eksempler:

1.  $\hat{\beta}_1 = 0.005$ ,  $se(\hat{\beta}_1) = 0.005$ ,  $t = 1$ ,  $CI = [-0.005; 0.015]$ .

2.  $\hat{\beta}_1 = 0.005$ ,  $se(\hat{\beta}_1) = 0.001$ ,  $t = 5$ ,  $CI = [0.003; 0.007]$ .

3.  $\hat{\beta}_1 = 0.150$ ,  $se(\hat{\beta}_1) = 0.150$ ,  $t = 1$ ,  $CI = [-0.150; 0.450]$ .

4.  $\hat{\beta}_1 = 0.150$ ,  $se(\hat{\beta}_1) = 0.030$ ,  $t = 5$ ,  $CI = [0.090; 0.210]$ .

## Statistisk signifikans vs økonomisk signifikans

4 eksempler:

1.  $\hat{\beta}_1 = 0.005$ ,  $se(\hat{\beta}_1) = 0.005$ ,  $t = 1$ ,  $CI = [-0.005; 0.015]$ .

2.  $\hat{\beta}_1 = 0.005$ ,  $se(\hat{\beta}_1) = 0.001$ ,  $t = 5$ ,  $CI = [0.003; 0.007]$ .

3.  $\hat{\beta}_1 = 0.150$ ,  $se(\hat{\beta}_1) = 0.150$ ,  $t = 1$ ,  $CI = [-0.150; 0.450]$ .

4.  $\hat{\beta}_1 = 0.150$ ,  $se(\hat{\beta}_1) = 0.030$ ,  $t = 5$ ,  $CI = [0.090; 0.210]$ .

2 og 4 er statistisk *signifikante*, men 2 er (nok) for lille til at have praktisk økonomisk betydning.

1 og 3 er *insignifikante*, men 1 er stadig brugbart. Her kan vi med rimelig sikkerhed afvise at effekten er stor. (skarpt 0).

Med 3 kan vi ikke afvise ret meget (upræcist 0)

## Test af lineære kombinationer

---

## Lineære kombinationer af parametre: Eksempel

Vi kan også teste hypoteser vedrørende lineære kombinationer af parametrene:

- $H_0 : \beta_1 = \beta_2$
- $H_0 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2$
- $H_0 : \beta_1 - \beta_2 = \beta_3$

Disse hypoteser involverer flere parametre, men kun **en restriktion**.

### Eksempel: Cobb-Douglas produktionsfunktionen

$$Y_i = A L_i^\alpha K_i^\beta U_i$$

$$\text{Tag log:} \quad \Rightarrow \log Y_i = a_0 + \alpha \log L_i + \beta \log K_i + u_i.$$

Hypotese:  $H_0 : \alpha + \beta = 1$  (konstant skalaafkast)

Kan man bruge t-testet?

## Lineære kombinationer af parametre: Eksempel

Det er let at udregne  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ .

Det er lidt mere besværligt at udregne  $se(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$ , da

$$var(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = var(\hat{\alpha}) + var(\hat{\beta}) + 2cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

Vi kan dog snyde OLS til at gøre det for os ved at omskrive modellen:

$$\begin{aligned}\log Y_i &= a_0 + \alpha \log L_i + \beta \log K_i + u_i \\ &= a_0 + (\alpha + \beta) \log L_i + \beta(\log K_i - \log L_i) + u_i \\ &= a_0 + \theta \log L_i + \beta \log(K_i/L_i) + u_i\end{aligned}$$

Vi kan regressere  $\log Y$  på  $\log L$  og  $\log(K/L)$ .

Vi er tilbage i hypotesetestning med en parameter med  $H_0 : \theta = 1$  (konstant skalaafkast).



- **Jupyter Notebook:** `04_inference_examples.ipynb`
- **Python Module:** `mymlr.py`
- **Part 2:** Returns to scale in French manufacturing
- Hypotese test med lineære restriktioner på en eller flere parametre

Las os alle teste

## Multiple lineær hypoteser

---

# Test af multiple lineær hypoteser

Ved tests af hypoteser, som indeholder mere end 1 restriktion, kan vi ikke “snyde” OLS til at bruge t-testen.

Model med 4 forklarende variable:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + u. \quad (1)$$

Eksempler på multiple hypoteser:

1.  $H_0 : \beta_3 = 1$  (en restriktion).
2.  $H_0 : \beta_3 = 1, \beta_2 = \beta_1$  (to restriktioner).
3.  $H_0 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1, \beta_4 = 0$  (to restriktioner).
4.  $H_0 : \beta_1 = 0, \beta_2 = 2, \beta_3 = 1, \beta_4 = 0$  (fire restriktioner).

$H_0$ : restriktionerne holder. Alternativhypotesen:  $H_0$  er ikke opfyldt.



## Test af multiple lineær hypoteser

Under  $H_0$  er den sande model en **restrikeret** version af ligning (1).

Med eksemplerne på forrige slide er den restrikerede model:

1.  $y - x_3 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_4 x_4 + u.$
2.  $y - x_3 = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + \beta_4 x_4 + u.$
3.  $y - x_1 = \beta_0 + \beta_2(x_2 - x_1) + \beta_3(x_3 - x_1) + u.$
4.  $y - 2x_2 - x_3 = \beta_0.$

Bemærk: Den restrikerede model er stadig lineær i parametrene.

# Test af multiple lineær hypoteser

Under  $H_0$  er den sande model en **restrikeret** version af ligning (1).

Med eksemplerne på forrige slide er den restrikerede model:

1.  $y - x_3 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_4 x_4 + u.$
2.  $y - x_3 = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + \beta_4 x_4 + u.$
3.  $y - x_1 = \beta_0 + \beta_2(x_2 - x_1) + \beta_3(x_3 - x_1) + u.$
4.  $y - 2x_2 - x_3 = \beta_0.$

Bemærk: Den restrikerede model er stadig lineær i parametrene.

## Ide til test:

- Under  $H_0$  vil den restrikerede model forklarer data ligeså godt som den urestrikerede.
- Hvis  $H_0$  ikke er sand, vil den restrikerede model forklarer data dårligere. Derved vil  $SSR$  stige og  $R^2$  falde.

# Test af multiple lineær hypoteser

Teststørrelsen for multiple hypoteser

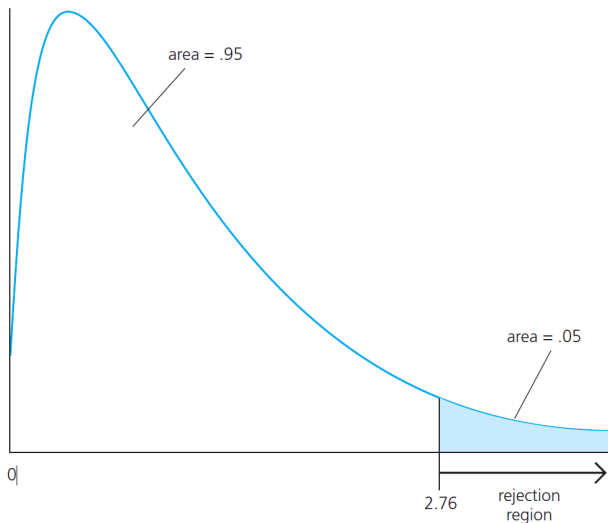
$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n - k - 1)} = \frac{(R_{ur}^2 - R_r^2)/q}{(1 - R_{ur}^2)/(n - k - 1)}$$

Husk:  $R^2 = 1 - SSR/SST$

- Tælleren er altid positiv. Variationen i residualerne er størst, når modellen er restrikeret.
- $q$  antal restriktioner.
- $n - k - 1$  antal frihedsgrader i den urestrikerede model.
- Hvis MLR.1-MLR.6 er opfyldt, så er

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n - k - 1)} \sim F(q, n - k - 1).$$

FIGURE 4.7 The 5% critical value and rejection region in an  $F_{3,60}$  distribution.



# Test af multiple lineær hypoteser

Afsluttende bemærkninger om F-testen:

- Vi kan sagtens bruge F-testen til også at enkelte parametre og lineære kombinationer. Det er det Stata gør med *test* kommandoen.
- Ved test af enkelte parameter når den dobbeltsidede t-test og F-testen ens konklusion.
- Stata og Statsmodels beregner som standard F-testen for  $H_0 : \beta_1 = 0, \dots, \beta_k = 0$
- Nogle gange kan ovenstående  $H_0$  ikke afvises, selvom enkelte  $\beta$  er signifikant forskellige fra 0.
  - Ved et 5% signifikansniveau vil  $\hat{\beta}$  i gennemsnit være signifikant selvom  $H_0 : \beta = 0$  er sand i...

# Lønregression: Stata eksempel

```
reg lwage educ experience experience2 experience3
```

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	1,078
				F(4, 1073)	=	69.53
Model	22.8999718	4	5.72499296	Prob > F	=	0.0000
Residual	88.3507171	1,073	.082339904	R-squared	=	0.2058
				Adj R-squared	=	0.2029
Total	111.250689	1,077	.103296833	Root MSE	=	.28695

lwage	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
educ	.0270326	.0026572	10.17	0.000	.0218188	.0322464
experience	.042783	.0101905	4.20	0.000	.0227874	.0627786
experience2	-.0017684	.0007436	-2.38	0.018	-.0032276	-.0003093
experience3	.0000286	.0000154	1.85	0.064	-1.66e-06	.0000588
_cons	4.269921	.0465607	91.71	0.000	4.178561	4.361282

# Lønregression: Stata eksempel

```
test educ
```

```
( 1)  educ = 0
```

```
      F( 1, 1073) = 103.50
```

```
      Prob > F = 0.0000
```

```
test experience3
```

```
( 1)  experience3 = 0
```

```
      F( 1, 1073) = 3.44
```

```
      Prob > F = 0.0640
```

```
test experience+experience2+experience3=0
```

```
( 1)  experience + experience2 + experience3 = 0
```

```
      F( 1, 1073) = 18.73
```

```
      Prob > F = 0.0000
```

```
test experience experience2 experience3
```

```
( 1)  experience = 0
```

```
( 2)  experience2 = 0
```

```
( 3)  experience3 = 0
```

```
      F( 3, 1073) = 54.65
```

```
      Prob > F = 0.0000
```



- **Jupyter Notebook:** `04_inference_examples.ipynb`
- **Python Module:** `mymlr.py`
- **Part 3:** Test af multiple lineære hypoteser (F-test)

Las os alle teste



# Sammenhæng mellem fordelinger

---

## Lidt om sammenhængen mellem fordelinger

Antag at vi har to variable ( $Y_1$  og  $Y_2$ ), som begge er standard normalfordelte og uafhængige. Så gælder

- $Y_1 + Y_2$  er også normalfordelt.
- $Y_1^2 + Y_2^2$  er  $\chi^2$  fordelt med to frihedsgrader.
- Generelt er summen af  $k$  kvadrerede uafhængige standard normalfordelte variable  $\chi^2$  fordelt med  $k$  frihedsgrader.

Dvs. når vi antager at  $u$  er normalfordelt og estimerer variansen af OLS som

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - k - 1} \sum (\hat{u})^2,$$

så er  $\hat{\sigma}^2$  en sum af kvadrede normalfordelte variable og dermed  $\chi^2$  fordelt (med  $n - k - 1$  frihedsgrader).

## t-fordelingen

t-fordelingen fremkommer, når vi deler en normalfordelt variabel med kvadratroden af noget som er  $\chi^2$  fordelt.

Husk formlen for t-test-størrelsen

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - a}{\hat{\sigma} \sqrt{SST_j(1 - R_j^2)}}$$

Her deler  $\hat{\beta}_j$  vi som er normalfordelt med  $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ , hvor  $\hat{\sigma}^2$  er  $\chi^2$  fordelt.

## F-fordelingen

F-fordelingen fremkommer, når vi deler to  $\chi^2$  fordelte variable med hinanden.

Husk formlen for F-test-størrelsen

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n - k - 1)}.$$

$SSR$  er summen af de kvadrerede residualer ( $SSR = \sum(\hat{u})^2$ ) fra hhv. den restrikerede og urestrikerede model.

Da vi antager at  $\hat{u}$  er normalfordelt er  $SSR$   $\chi^2$  fordelt, og dermed er  $F$  F-fordelt.

## Opsumming

---

OLS estimaterne er stokastiske variable.

- Forskellige stikprøver giver forskellige estimater

Inferens handler om, hvor sikrer vi kan være på at OLS estimaterne afspejler de sande parameter.

- Fx om estimaterne er signifikant forskellige fra vores 0-hypotese.

Overordnet strategi for hypotesetestning:

- Opskriv en teststørrelse, som burde være 0 under  $H_0$ .
- Anerkend at teststørrelse kan være forskellige fra nul pga. stikprøveusikkerhed.
- Find fordelingen af teststørrelsen givet  $H_0$ , stikprøvestørrelse mv.
- Find kritiske værdier, p-værdier givet teststørrelse og fordelingen.