Asymptotiske egenskaber ved OLS

Økonometri A

Bertel Schjerning

Program

Motivation

Konsistens (W5.1)

Asympotisk fordeling af OLS (W5.2)

Asympotisk efficiens af OLS (W5.3)

Lagrange Multiplier (LM) test

Motivation

Motivation: Små og store stikprøver

Indtil videre har vi behandlet de **eksakte** egenskaberne ved OLS.

Dvs. egenskaber som holder uanset størrelsen af stikprøve (n), hvor vi har vist at

- MLR.1-MLR.4 $\Rightarrow$ OLS er middelret
- MLR.1-MLR.5 $\Rightarrow$ OLS er BLUE + formel for varians.
- MLR.1-MLR.6 $\Rightarrow$ OLS er normalfordelt, og vi kan lave inferens med t- og F-test.

Disse resultater gælder for alle n, også når n er lille.

I denne lektion vil vi undersøge egenskaberne ved OLS når n går mod uendelig.

- Særligt kan vi undvære MLR.6 når $n \to \infty$

Konsistens

Konsistens

Definition (se Appendix C-3):

Lad W_n være en estimator af θ baseret på n observationer $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Så er W_n en **konsistent estimator** for θ, hvis

$$P(|W_n - \theta| > \varepsilon) \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Vi skriver også, at W_n konvergerer i sandsynlighed mod θ

$$p \lim W_n = \theta$$

Hvis dette ikke gælder, siger vi, at W_n er **inkonsistent**.

Konsistens er en egenskab for estimatoren, når $n \to \infty$.

Vi kræver normalt at en estimator skal være konsistent.

Konsistens vs. middelret

Det kan være nyttigt at tænke på konsistens, som bestående af to dele:

- $E(W_n) \to \theta \quad \text{for} \quad n \to \infty$
- $var(W_n) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$

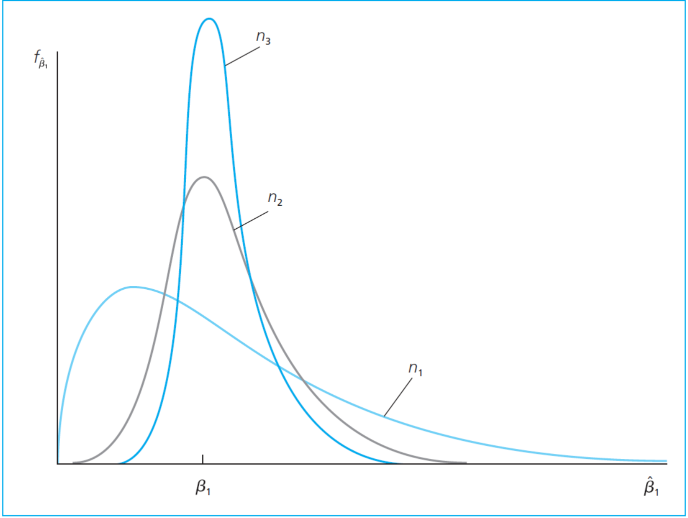
Det betyder at konsistens ikke er det samme som middelret.

Vi kan fx have:

- Middelrette estimatorer, som ikke bliver mere koncenteret omkring θ ($var(W_n) \not\to 0$)
- Konsistente estimatorer, hvor $E(W_n) \neq \theta$ som for alle "$n < \infty$"

Konsistens vs. middelret

FIGURE 5.1 Sampling distributions of $\hat{\beta}_1$ for sample sizes $n_1 < n_2 < n_3$.



Store tals lov

Lad $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ være uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable med $E(Y_i) = \mu$. Da er gennemsnittet $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum Y_i$ en konsistent estimator for μ.

$$p\lim \bar{Y}_n = \mu$$

Regneregler for $p\lim(\cdot)$ og $E(\cdot)$

Regneregler for $p\lim$:

1. For alle kontinuerte funktioner g: $p\lim(g(W_n)) = g(p\lim(W_n))$
2. Hvis $p\lim(G_n) = \alpha$ og $p\lim(W_n) = \beta$, så:
    2.1 $p\lim(G_n + W_n) = \alpha + \beta$
    2.2 $p\lim(G_n \cdot W_n) = \alpha \cdot \beta$
    2.3 $p\lim\left(\frac{G_n}{W_n}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$, hvis $\beta \neq 0$

Regneregler for forventninger:

- $E[G_n + W_n] = E[G_n] + E[W_n]$
- Men $E[g(W_n)] \neq g(E[W_n])$, medmindre g er lineær
- Hvis g er konveks, så gælder $E[g(W_n)] \geq g(E[W_n])$
- Forventninger påvirkes af varians (Jensen's ulighed)
- Plims tillader ikke-lineære transformationer, fordi variansen forsvinder i grænsen.

Mere om sandsynlighedsgrænser

Lad F_n være en funktion af $Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n$ stokatiske variable.

Hvis $P(|F_n - \theta| < \varepsilon) \to 1$ når $n \to \infty$, så er $p\lim F_n = \theta$.

Eksempler:

$F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$	Konvergerer mod middelværdien, så $p\lim F_n = \mu$
$F_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	Konvergerer ikke, men går mod uendelig, så der findes ingen sandsynlighedsgrænse.

Mere om sandsynlighedsgrænser

Vi kommer til at bruge følgende egenskaber af $p\lim$:

$$p\lim \frac{1}{n}\sum_i Y_i = E(Y)$$

$$p\lim \frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \text{Var}(Y)$$

$$p\lim \frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) = \text{Cov}(Y, X)$$

Sandsynlighedsgrænse for hældningskoefficienten i SLR:

$$p\lim \left[\frac{\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X})^2}\right] = \frac{p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})\right)}{p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X})^2\right)} = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}$$

OLS er konsistent

For at opnå at OLS er unbiased, skal vi bruge MLR.1-MLR.4.
Men for at opnå konsistens, kan vi slækkke på MLR.4.

MLR.4 Den betingede middelværdi af fejlleddet skal være 0:
$E(u|x_1, x_2, x_2, ..., x_k) = 0.$
På matrixform: $E(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \mathbf{0}$

MLR.4' Fejlleddet har middelværdi 0 og er *ukorreleret* med alle x_j
$E(u) = 0$ og $cov(x_j, u) = 0$ for alle $j = 1, 2, ..., k$
På matrixform: $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ og $Cov(\mathbf{u}, \mathbf{X}) = 0$

Teorem 5.1: OLS estimatoren er konsistent

Under antagelse MLR.1-MLR.3 og MLR.4' er OLS estimatoren $\hat{\beta}_j$ en konsistent estimator for β_j for alle $j = 0, 1, \ldots, k$.

OLS er konsistent: Bevis (SLR)

Sandsynlighedsgrænse for $\hat{\beta}_1$ i SLR

$$p\lim \hat{\beta}_1 = \beta_1 + p\lim \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u(x_i - \bar{x})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \beta_1 + \frac{p\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u(x_i - \bar{x})}{p\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Under MLR.2, MLR.3 og MLR.4' har vi

- $p\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = cov(u, x) = 0 \quad$ (MLR.4')
- $p\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = var(x) \neq 0 \quad$ (MLR.3)

Derfor

$$p\lim \hat{\beta}_1 = \beta_1$$

- For SLR er $\hat{\beta}_1$ konsistent for β_1 under MLR.1-MLR.3 og MLR.4'.
- Hvad med MLR?

OLS er konsistent: Bevis (MLR) 1/2

Indsæt $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$ (MLR.1) i OLS-estimatoren:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}) \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \\
&= \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}
\end{aligned}$$

Her bruger vi antagelsen om ingen perfekt multikollinearitet (MLR.3), som sikrer, at $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ er inverterbar.

OLS er konsistent Bevis (MLR) 2/2

Nu tager vi $p\lim$ af OLS-estimatoren:

$$p\lim \hat{\boldsymbol{\beta}} = p\lim \left(\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right)$$

Vi normaliserer $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ ved n, så sandsynlighedsgrænsen eksisterer:

$$p\lim \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(p\lim \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \cdot p\lim \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

Da $p\lim \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u} = 0$ (MLR.4' og MLR.2), og $p\lim \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X}$ er en positiv definit matrix med fuld rang (MLR.3), får vi:

$$p\lim \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(p\lim \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \cdot 0 = \boldsymbol{\beta}$$

OLS-estimatoren er altså konsistent under MLR.1-MLR.3 og MLR.4'.

Hvornår er OLS inkonsistent?

OLS er inkonsistent, hvis

$$\text{cov}(u, x_j) \neq 0$$

hvilket sker, når MLR.4' ikke holder. Dette indebærer, at fejlleddet u er korreleret med mindst en af de forklarende variable.

Den resulterende **asymptotiske bias** er givet ved:

$$p \lim \hat{\beta}_j - \beta_j = \frac{\text{cov}(\hat{r}_{ij}, u)}{\text{var}(\hat{r}_{ij})}$$

hvor $\hat{r}_j$ er residualerne fra en regression af x_j på alle de andre $x'er$.

Problemet forsvinder ikke, selvom $n \to \infty$, da biasen er asymptotisk.

Konsistens vs. middelret

Quiz:

Antag at $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ og $\hat{\sigma}^2$ er estimaterne fra en simple lineær regressionsmodel, som opfylder SLR.1-SLR.5.

Afgør om følgende alternative estimatorer er middelrette og/eller konsistente:

1. $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1)^2$.

2. $\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=50}^{n} y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=50}^{n} x_i(x_i - \bar{x})}$
   (OLS estimatoren, hvor man ikke bruger de første 50 obs.).

3. $\check{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{50} y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{50} x_i(x_i - \bar{x})}$
   (OLS estimatoren, hvor man kun anvender de første 50 obs.).

Asympotisk fordeling af OLS

Asymptotisk fordeling af OLS

Teorem 5.2: OLS estimatoren er asymptotisk normalfordelt

Under antagelse MLR.1-MLR.5 gælder følgende:

1. $\sqrt{n}(\hat{\beta}_j - \beta_j) \overset{a}{\sim} N(0, \sigma^2/a_j^2)$, hvor
   $a_j^2 = p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2\right) = \text{Var}(\hat{r}_j)$

2. $\hat{\sigma}^2$ er en konsistent estimator for $\sigma^2 = \text{Var}(u)$.

3. $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{sd(\hat{\beta}_j)} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ og $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Teorem 5.2 viser, at MLR.6 ikke er nødvendig, når datasættet er "stort", da estimatoren er asymptotisk normalfordelt uden antagelsen om normalfordelte fejlled.

Asymptotisk fordeling af OLS (Matrixform)

Teorem 5.2: OLS estimatoren er asymptotisk normalfordelt

Under antagelse MLR.1-MLR.5 gælder følgende:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \stackrel{a}{\sim} N\left(0, \sigma A^{-1}\right),$$

hvor $\hat{\beta}$ er OLS-estimatoren, σ^2 er variansen af fejlleddet u og $A = p\lim \frac{1}{n}(X'X) = p\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' x_i) = E(x_i' x_i)$ er en ikke singulær matrix (MLR.3), som ikke afhænger af n

- $\hat{\sigma}^2$ er en konsistent estimator for $\sigma^2 = \text{Var}(u)$.
- $\stackrel{a}{\sim}$ er en forkortelse for "asymptotisk fordelt som"
- $sd(\hat{\beta})$ findes som kvadratroden af diagonal elementerne i $\sigma^2(X'X)^{-1}$, som er en konstistent estimator for den asymptotiske varians-kovarians matrix for β

Asympotisk fordeling af OLS

Hvorfor ganger vi med $\sqrt{n}$?

Ihukom formlen for den estimerede varians af OLS

$$var(\hat{\beta}_j|X) = \frac{\hat{\sigma}^2}{SSR_j} = \frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1 - R_j^2)}$$

Når $n \to \infty$ gælder

- $\hat{\sigma}^2 \to \sigma^2$
- $R_j^2 \to \alpha \in (0, 1)$
- $SST_j \to n \cdot var(x_j)$

Dvs. variansen af OLS konvergerer mod 0 med hastighed $1/n$.

Standardfejlen konvergerer med hastighed $1/\sqrt{n}$

Hvornår er n stor nok?

Hvornår kan man anvende de asymptotiske resultater
(hvornår er n stor nok)?

- Man kan ikke sige noget generelt om, hvornår n er stor nok.
- Det afhænger af u (hvor meget u afviger fra normalfordelingen).
- Næste gang skal vi se på simulationer, som kan hjælpe med at besvare dette spørgsmål.
- I de fleste praktiske økonometriske analyser med flere mio. observationer, antager folk at OLS er normalfordelt uden at blinke.

Asympotisk efficiens af OLS

Asympotisk efficiens af OLS

Efficiens drejer sig om at sammenligne variansen af estimatorer.

Definition af relativ efficiens (se appendix C-2e):

Hvis W_1 og W_2 er to konsistente estimatorer for parameteren θ, så er W_1 mere efficient end W_2, hvis der gælder $Avar(W_1) \leq Avar(W_2)$ for alle θ og $Avar(W_1) < Avar(W_2)$ for mindst et θ.

Asympotisk efficiens af OLS

Efficiens drejer sig om at sammenligne variansen af estimatorer.

Definition af relativ efficiens (se appendix C-2e):

Hvis W_1 og W_2 er to konsistente estimatorer for parameteren θ, så er W_1 mere efficient end W_2, hvis der gælder $Avar(W_1) \leq Avar(W_2)$ for alle θ og $Avar(W_1) < Avar(W_2)$ for mindst et θ.

Bemærk: Det er ikke altid at den ene estimator er mere efficient end den anden.

- Fx hvis $var(W_1) < Var(W_2)$ for $\theta < a$ og omvendt for $\theta > a$

Asymptotisk fordeling af OLS

Teorem 5.3: OLS estimatoren asymptotisk efficient

Under antagelse MLR.1-MLR.5 vil en hvilken som helst anden konsistente estimator $\tilde{\beta}$ have større asymptotisk varians end OLS estimatoren.

Det er ikke så overraskende, når OLS under MLR1-MLR.5 er BLUE for alle n.

Lagrange Multiplier (LM) test

Lagrange Multiplier (LM) test

Lagrange Multiplier (LM) testen er et alternativ til F-testen ved multiple lineære restriktioner.

Betragt en urestrikteret model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_{k-q} x_{k-q} + \beta_{k-q+1} x_{k-q+1} .. + \beta_k x_k + u.$$

Hypotese $H_0 : \beta_{k-q+1} = ... = \beta_k = 0.$

Lagrange Multiplier (LM) test

Lagrange Multiplier (LM) testen er et alternativ til F-testen ved multiple lineære restriktioner.

Betragt en urestrikteret model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_{k-q} x_{k-q} + \beta_{k-q+1} x_{k-q+1} .. + \beta_k x_k + u.$$

Hypotese $H_0 : \beta_{k-q+1} = ... = \beta_k = 0$.

Ideen bag LM-testen:

Hvis H_0 er opfyldt er residualerne ($\tilde{u}$) fra den restrikterede model (uden $x_{k-q+1}, ..., x_k$) ukorreleret med $x_{k-q+1}, ..., x_k$.

- Hvis $\beta_{k-q+1} = ... = \beta_k = 0$, så ligger $x_{k-q+1}, ..., x_k$ ikke i $\tilde{u}$.

Lagrange Multiplier (LM) test

Lagrange Multiplier (LM) testen er et alternativ til F-testen ved multiple lineære restriktioner.

Betragt en urestrikteret model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_{k-q} x_{k-q} + \beta_{k-q+1} x_{k-q+1} .. + \beta_k x_k + u.$$

Hypotese $H_0 : \beta_{k-q+1} = ... = \beta_k = 0$.

Ideen bag LM-testen:

Hvis H_0 er opfyldt er residualerne ($\tilde{u}$) fra den restrikterede model (uden $x_{k-q+1}, ..., x_k$) ukorreleret med $x_{k-q+1}, ..., x_k$.

- Hvis $\beta_{k-q+1} = ... = \beta_k = 0$, så ligger $x_{k-q+1}, ..., x_k$ ikke i $\tilde{u}$.

Fordelen ved LM-testen er at man ikke behøves at estimere den urestrikterede model.

Lagrange Multiplier (LM) test

Procedure:

1. Estimer den restrikterede model (modellen under H_0) med OLS:

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + ... + \tilde{\beta}_{k-q} x_{k-q} + \tilde{u}.$$

2. Udregn residualerne fra den restrikterede model $\tilde{u}$.
3. Regresser $\tilde{u}$ på $x_{k-q+1}, ..x_k$ og gem R^2.
4. Teststørrelsen er bestemt ved $LM = n \cdot R^2$. LM testet er asymptotisk $\chi^2_{(q)}$, hvor q er antallet af restriktioner.
5. Find den kritiske værdi eller p-værdien ved at benytte $\chi^2_{(q)}$ til at bestemme om H_0 kan afvises.

F-testet og LM testet er asymptotisk equivalente, men kan være forskellige i endelige (små) datasæt.

Opsummering

Opsummering

Nødvendige antagelser for at OLS er:

	Eksakt (lille n)	Asymptotisk (stor n)
MLR.1-MLR.4	Middelret	Konsistent
MLR.1-MLR.4'	Biased	Konsistent
MLR.1-MLR.5	BLUE	Efficient Normalfordelt
MLR.1-MLR.6	Normalfordelt	