2023～2024 学年第二学期一调考试 · 高一数学

参考答案、提示及评分细则

1. B　∵O是正$\triangle ABC$的中心，向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$分别是以三角形的中心和顶点为起点和终点的向量，
∴O到三个顶点的距离相等$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{CO}|$，但向量$\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO},\overrightarrow{CO}$不是相同向量，也不是共线向量，也不是起点相同的向量. 故选 B.

2. C　由题意知$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=2\times 2^2-3=5$. 故选 C.

3. B　∵$AB=\sqrt{7},AC=2,C=120°$，
∴由余弦定理$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos C$可得：$BC^2+2BC-3=0$，
∴解得：$BC=1$，或-3(舍去)，
∴由正弦定理可得：$\sin A=\dfrac{BC\cdot\sin C}{AB}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. 故选 B.

4. B　因为$\overrightarrow{AB}=(1,-1),\overrightarrow{DC}=(2,-2),\overrightarrow{BC}=(-2,-2),\overrightarrow{DA}=(3,1)$，则$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$，$AB\perp BC$，$CD\perp BC$，$BC\neq AD$，所以四边形$ABCD$为直角梯形. 故选 B.

5. D　∵$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，∴$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=3$，$\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=3$，设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角为$\theta$，$1+4\cos\theta+4=3$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，又∵$\theta\in[0,\pi]$，∴$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$. 故选 D.

6. C　由题意知$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DP}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 故选 C.

7. A　设塔AB的高度为h，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，因为$\angle ACB=45°$，所以$BC=h$；在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，因为$\angle ADB=30°$，所以$BD=\sqrt{3}h$；在$\triangle BCD$中，$\angle BCD=60°$，$BC=h$，$BD=\sqrt{3}h$，根据余弦定理可得$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos 60°$，即$(\sqrt{3}h)^2=h^2+140^2-2h\times 140\times\dfrac{1}{2}$，解得$h=70$或$h=-140$(舍去). 故选 A.

8. B　因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=4$，$|\boldsymbol{c}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$，且$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，$(\lambda\in\mathbf{R},\mu\in\mathbf{R})$，所以$\boldsymbol{c}^2=(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})^2=\lambda^2\boldsymbol{a}^2+\mu^2\boldsymbol{b}^2+2\lambda\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=16\lambda^2+16\mu^2-16\lambda\mu=4$，所以$(2\lambda-u)^2+3u^2=1$，令$2\lambda-u=\cos\theta$，$\sqrt{3}u=\sin\theta$，所以$2\lambda+\mu=\cos\theta+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{3}\sin(\theta+\varphi)$，其中$\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，所以$2\lambda+\mu\in\left[-\dfrac{\sqrt{21}}{3},\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right]$，即$2\lambda+\mu$的取值范围是$\left[-\dfrac{\sqrt{21}}{3},\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right]$. 故选 B.

9. AC　因为$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,3)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,1)$，所以$\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0)$，所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}|\boldsymbol{a}|$，故 A 正确；
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-1\times 2+1\times(-2)=-4\neq 0$，故 B 错误；
因为$(-1)\times(-2)-1\times 2=0$，所以$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，故 C 正确；
$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-2+0}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{3\pi}{4}$. 故 D 错误. 故选 AC.

10. BC　由题意可知：$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$可以看成一组基底向量，根据平面向量基本定理可知：A，D 正确，B 不正确；
对于 C，当$\lambda_1=\lambda_2=\mu_1=\mu_2=0$时，则$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\mu_1\boldsymbol{e}_2=\lambda_2\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$，
此时任意实数λ均有$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\mu_1\boldsymbol{e}_2=\lambda(\lambda_2\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2)$，故 C 不正确. 故选 BC.

11. AC　由题意知$\overrightarrow{AB}=(-1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,-1)$，所以$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m(-1,2)+n(-2,1)=(-m-2n,2m+n)$，若$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}=m+2n-2m-n=n-m=0$，故A正确；

$\overrightarrow{PA}=(-1+m+2n,1-2m-n)$，$\overrightarrow{PB}=(-2+m+2n,3-2m-n)$，$\overrightarrow{PC}=(-3+m+2n,2-2m-n)$，所以$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(-6+3m+6n,6-6m-3n)=\mathbf{0}$，所以$m=n=\frac{2}{3}$，所以$2m+n=2$，故B错误；

因为$\overrightarrow{PB}=(-2+m+2n,3-2m-n)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,-1)$，所以$3m+3n=5$，故C正确；

因为$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AC}$方向上的投影向量是$(2,-1)$，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot(2,-1)$，所以$-2(1-m-2n)+2m+n-1=-5$，即$4m+5n=-2$，故D错误.故选AC.

12. ACD　由题意可知$b^2+c^2-12=b^2+c^2-a^2=bc$，利用余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$，故A正确；

由上述可知，$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，且易知$b^2+c^2-12=bc\geqslant 2bc-12$，解出$12\geqslant bc$，当且仅当$b=c=2\sqrt{3}$时取等号，此时$S=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=3\sqrt{3}$，故B错误；

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，对$\angle ADB$和$\angle ADC$利用余弦定理，$\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{2BD\cdot AD}=-\frac{CD^2+AD^2-AC^2}{2CD\cdot AD}$，化简后有$AD^2=3+\frac{bc}{2}$，由上述知，$bc$的最大值为12，因此$AD$最大为3，故C正确；

利用正弦定理，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=4$，则$b=4\sin B$，$c=4\sin C$，于是$\triangle ABC$的周长$L=2\sqrt{3}+4\sin B+4\sin C=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，由于是锐角三角形，因此$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$解出$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，则$L\in(6+2\sqrt{3},6\sqrt{3}]$，故D正确.故选ACD.

13. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　因为$\boldsymbol{a}=(3,6)$，所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$，所以与向量$\boldsymbol{a}$平行的单位向量为$\frac{\boldsymbol{a}}{3\sqrt{5}}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$或$\frac{\boldsymbol{a}}{-3\sqrt{5}}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

14. $\frac{17\pi}{4}$　因为$\triangle ABC$的面积为$a^2+b^2-c^2$，所以$a^2+b^2-c^2=\frac{1}{2}ab\sin C$，即$\frac{1}{4}\sin C=\cos C$，又$\sin^2C+\cos^2C=1$，$\sin C>0$，所以$\sin C=\frac{4\sqrt{17}}{17}$，设$\triangle ABC$的外接圆的半径为$r$，所以$2r=\frac{c}{\sin C}=\sqrt{17}$，解得$r=\frac{\sqrt{17}}{2}$，所以$\triangle ABC$的外接圆的面积为$\pi r^2=\frac{17\pi}{4}$.

15. 3　记$AC\cap BD=O$，又$AE\perp BD$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EO}=0$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\cdot 2\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO})=2\overrightarrow{AE}^2+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EO}=2\overrightarrow{AE}^2=18$，解得$|\overrightarrow{AE}|=3$.

16. $(2\sqrt{3},4]$　因为$a=2\sqrt{3}$，$A=\frac{2\pi}{3}$，由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以$12=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc\geqslant(b+c)^2-\frac{1}{4}(b+c)^2=\frac{3}{4}(b+c)^2$，

当且仅当$b=c=2$时等号成立.

$\therefore(b+c)^2\leqslant 16$，又$b+c>0$，

$\therefore b+c\leqslant 4$，又因为$b+c>a=2\sqrt{3}$，

所以 $2\sqrt{3}<b+c\leqslant 4$，即 $b+c$ 取值范围为 $(2\sqrt{3},4]$.

17. 解：(1)因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2,4)-2(m,1)=(2-2m,2)$， …… 2 分

且 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，所以 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2-2m+2\times 2=0$， …… 4 分

解得 $m=3$； …… 6 分

(2)因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,4)-(3,1)=(-1,3)$，$2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=2(3,1)-3(1,2)=(3,-4)$，

所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，$|2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}|=5$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})=3\times(-1)+3\times(-4)=-15$， …… 8 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-15}{\sqrt{10}\times 5}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. …… 10 分

18. 解：(1)因为向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}a,b)$ 与 $\boldsymbol{n}=(3\cos A,\sin B)$ 平行，所以 $\sqrt{3}a\sin B-3b\cos A=0$， …… 1 分

由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A\sin B-3\sin B\cos A=0$， …… 2 分

又 $\sin B\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\sin A-3\cos A=0$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$， …… 4 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$； …… 5 分

(2)由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2cb\cos A$，所以 $7=b^2+2^2-2b$，解得 $b=3$ 或 $b=-1$(舍)， …… 7 分

所以△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$， …… 9 分

设△ABC 内切圆的半径为 r，

所以 $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=\dfrac{1}{2}\times(2+3+\sqrt{7})r=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，解得 $r=\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$. …… 12 分

19. 解：(1)由题意知 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，由于 F 是 AB 边的中点，因此 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$， …… 2 分

因此 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AC}|^2=-\dfrac{3}{2}$； …… 5 分

(2)不妨设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in(0,1)$，因此 $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$， …… 7 分

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(-\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC})=-\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{\lambda}{3}|\overrightarrow{AC}|^2+\dfrac{2\lambda-1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+\lambda+(2\lambda-$

$1)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=(\sqrt{3}+1)\lambda-2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{7+\sqrt{3}}{4}$， …… 10 分

解出 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，故 F 是线段 AC 靠近 A 处的四等分点. …… 12 分

20. 解：(1)因为 $\dfrac{b-a}{c}=\dfrac{\sin C-\sin A}{\sin B+\sin A}$，由正弦定理得 $\dfrac{b-a}{c}=\dfrac{c-a}{b+a}$，所以 $a^2+c^2-b^2=ac$， …… 2 分

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$， …… 4 分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$； …… 5 分

(2)因为 $a^2+c^2-b^2=ac$，所以 $a^2+c^2=ac+4$.

因为 D 是线段 AC 的中点，所以 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，

所以 $\overrightarrow{BD}^2=\left[\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\right]^2=\dfrac{1}{4}(a^2+c^2+ac)=1+\dfrac{1}{2}ac$， …… 7 分

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin A$，$c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$，

所以 $ac=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin C=\frac{16}{3}\sin A\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8}{3}\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{4}{3}$， …………………… 9 分

又$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$， ………… 10 分

所以 $ac\in\left(\frac{8}{3},4\right]$，所以$\overrightarrow{BD}^2\in\left(\frac{7}{3},3\right]$，

所以 $BD\in\left(\frac{\sqrt{21}}{3},\sqrt{3}\right]$，即 BD 的长的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{21}}{3},\sqrt{3}\right]$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)在$\triangle DAC$中，由余弦定理得 $AC^2=DA^2+DC^2-2DA\cdot DC\cos\angle ADC=3$，即 $AC=\sqrt{3}$.

因为 $AD=CD=1$，$\angle ADC=120°$，所以$\angle DAC=30°$，

又$\angle DAB=90°$，所以$\angle BAC=\angle BAD-\angle DAC=60°$. ………………………… 2 分

在$\triangle ABC$中，由正项定理得$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，

所以 $\sin\angle ABC=\frac{AC\sin\angle BAC}{BC}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，………………………… 4 分

又 $BC=\frac{3\sqrt{2}}{2}>\sqrt{3}=AC$，所以$\angle ABC<60°$，所以$\angle ABC=45°$；………………………… 5 分

(2)设 $BC=m(m>0)$，所以 $BA=2m$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC}=\frac{m^2+4m^2-3}{4m^2}=\frac{5m^2-3}{4m^2}$.

所以$\triangle ABC$的面积 $S=\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC=\frac{1}{2}m\cdot 2m\sqrt{1-\left(\frac{5m^2-3}{4m^2}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{-9\left(m^2-\frac{5}{3}\right)^2+16}$，

………………………… 8 分

所以 $S_{\max}=1$，此时 $m^2=\frac{5}{3}$，………………………… 9 分

又$\triangle DAC$的面积 $S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}DA\cdot DC\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

所以四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为 $S_{\max}+S_{\triangle DAC}=1+\frac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=2c^2\sin A$，得 $b=4$，………………………… 1 分

在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{1+16-13}{2\times1\times4}=\frac{1}{2}$，又$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore$可得 $A=\frac{\pi}{3}$，………………………… 2 分

$\because D$为 BC 的中点，$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\therefore|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\times\left(1+16+2\times1\times4\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{21}{4}$，………………………… 4 分

$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{\sqrt{21}}{2}$，

在$\triangle BAD$中，$\cos\angle BAD=\frac{1+\frac{21}{4}-\frac{13}{4}}{2\times1\times\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$；………………………… 5 分

(2)由(1)可知：$|AD|^2=\frac{1}{4}(17+8\cos\angle BAC)$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}+2\cos\angle BAC$，

$\because \sin\angle BAD=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，$D$ 为 BC 的中点，$\therefore \cos\angle BAD=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

$\therefore \cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AD}|}=\frac{\sqrt{21}}{7}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}+2\cos\angle BAC}{\frac{1}{2}\sqrt{17+8\cos\angle BAC}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

解得 $\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，…………………………………………………………………………………… 7 分

设 $AE=x(0<x\leqslant 1)$，$AF=y(2\leqslant y<4)$，

则$\sqrt{6}S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\times xy\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{4}xy$，……………………………………………………………… 8 分

设$\overrightarrow{AG}=\mu\overrightarrow{AE}+(1-\mu)\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}=\mu x\overrightarrow{AB}+\frac{y(1-\mu)}{4}\overrightarrow{AC}$，

则$\begin{cases}\frac{\lambda}{2}=\mu x,\\ \frac{\lambda}{2}=\frac{y(1-\mu)}{4},\end{cases}$解得 $\mu=\frac{y}{4x+y}$，

故$\overrightarrow{AG}=\frac{y}{4x+y}\overrightarrow{AE}+\frac{4x}{4x+y}\overrightarrow{AF}$，……………………………………………………………………… 10 分

$\therefore \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AG}\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})=\left(\frac{y}{4x+y}\overrightarrow{AE}+\frac{4x}{4x+y}\overrightarrow{AF}\right)\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})$

$=\frac{4x}{4x+y}\overrightarrow{AF}^2-\frac{y}{4x+y}\overrightarrow{AE}^2+\frac{y-4x}{4x+y}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{\frac{9}{2}xy^2-3x^2y}{4x+y}$，

$\therefore m=\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}xy}=\frac{\sqrt{2}(3y-2x)}{4x+y}$，

令 $\frac{y}{x}=t$，$t\geqslant 2$，则 $m=\frac{\sqrt{2}(3y-2x)}{4x+y}=\sqrt{2}\times\frac{3t-2}{t+4}=\sqrt{2}\left(3-\frac{14}{t+4}\right)\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $t=2$ 时取等号，

所以 m 的最小值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………………………………………………… 12 分