DM535 eksamenssæt – 13. juni 2013 reeksamen

Studiegruppe F
Section S7
DM535

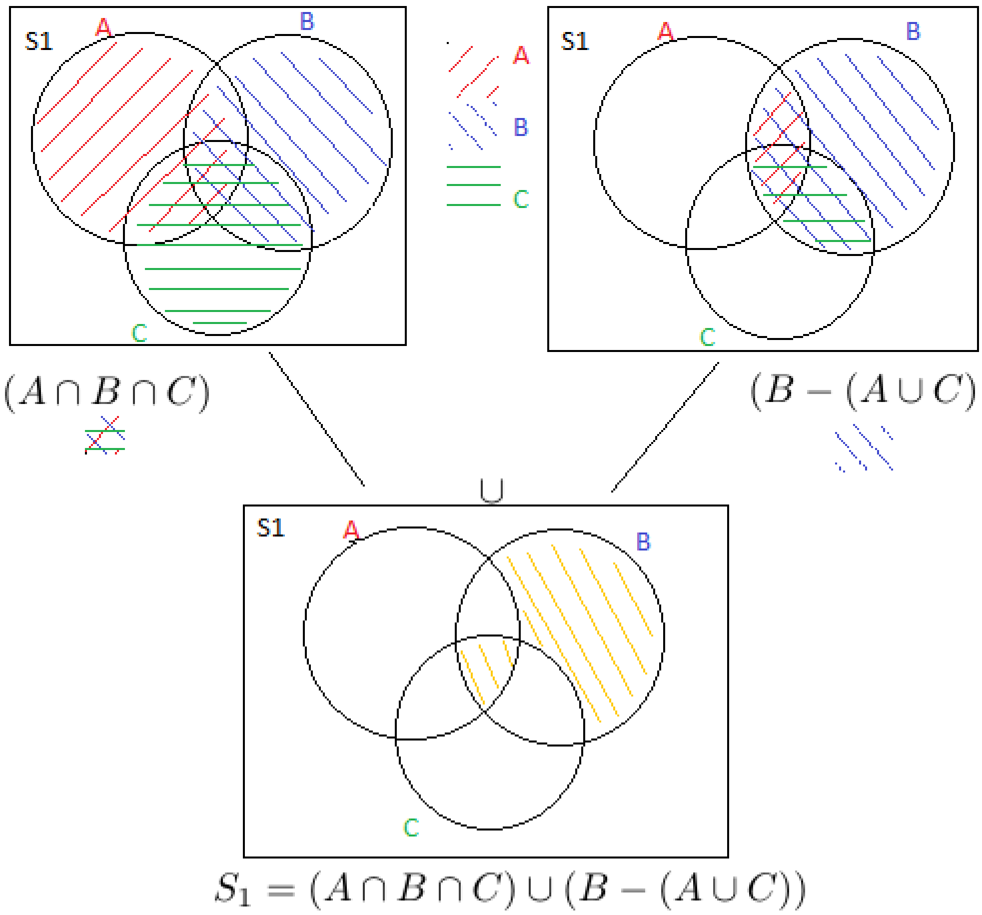
January 13, 2014

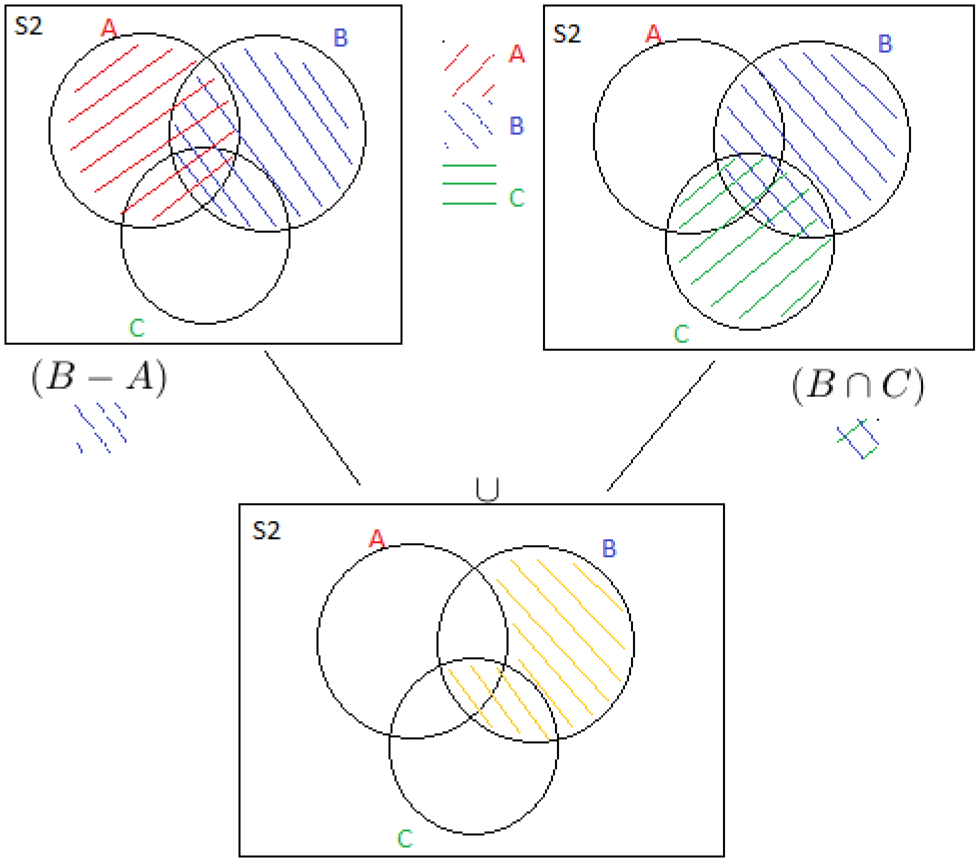
Contents

1 Opgave 1 - Mængder

a) Betragt de to mængder og afgør, om $S_1 = S_2$.

$S_1 = (A \cap B \cap C) \cup (B - (A \cup C))$
$S_2 = (B - A) \cup (B \cap C)$
Hvis vi indtegner vores to mængder i venn diagrammer kan vi sammenligne dem og derudfra konkludere at mængderne ikke er ens.





$$S_2 = (B - A) \cup (B \cap C)$$

b) Er følgende udsagn sandt?

Hvis A og B er tælleligt uendelige mængder, da er $A \cap B$ også tælleligt uendelig. Udsagnet er falsk, da fællesmængden af A og B ikke nødvendigvis er uendelig. Mængden er dog tællelig da snittet er en delmængde af både A og B. Hvis enten A er en delmængde af B, eller B en delmængde af A er mængden tælleligt uendelig. Men hvis A repræsenterer de lige tal og B de ulige tal, er fællesmængden 0, og dermed endelig.

2 Opgave 2 - Betragt Funktionerne

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved.

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = x - 1$$

a) Angiv $f \cdot g$

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (x^2 + 1) \cdot (x - 1) \\ &= x^3 - x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

b) Angiv $g \circ f$

$$\begin{aligned} g \circ f &= ((x^2+1)-1) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

c) Angiv $f \circ f$

$$\begin{aligned} f \circ f &= (x^2+1)^2+1 \\ &= x^4+2x^2+2 \end{aligned}$$

3 Opgave 3 - Kongruenssystem

Angiv samtlige løsninger til nedenstående kongruenssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv 2(\text{mod} 3) \\ x &\equiv 3(\text{mod} 4) \\ x &\equiv 4(\text{mod} 5) \end{aligned}$$

$m = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$
$x \equiv 2(\text{mod} 3) = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59\}$
$x \equiv 3(\text{mod} 4) = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59\}$
$x \equiv 4(\text{mod} 5) = \{4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59\}$

$x = 59$ er en løsning
Løsningsmængden er $\{59 + 60k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -60, -1, 59, 119, 179, ...\}$

4 Opgave 4 - Matrice Induktionsbevis

a) Betragt matricerne $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
Beregn $A + B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

b) For ethvert $i \in \mathbb{N}$, lad $A_i = \begin{bmatrix} i & i+1 \\ i+2 & i+3 \end{bmatrix}$
Vis at alle tal i matricen $A_i + A_i + 1$ er positive ulige tal, for alle $i \in \mathbb{N}$
Vi viser ovenstående ved hjælp af induktion.
Vores basisskridt er at vise $i = 1$

$$A_1 + A_{1+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1+1 \\ 1+2 & 1+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+2 & 1+1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Vi kan se at alle tal i matricen er positive ulige tal og går dermed videre til vores induktionsskridt.
Vi antager $A_i = \begin{bmatrix} i & i+1 \\ i+2 & i+3 \end{bmatrix}$
Vi vil vise $A_i + A_{i+1}$ er positive ulige tal

Vores induktionsskridt er at vise at $A_i + A_{i+1}$ også gælder når $i = i + 1 \Rightarrow A_{i+1} + A_{i+2}$

$$\begin{aligned} A_{i+1} + A_{i+2} &= \begin{bmatrix} i+1 & i+1+1 \\ i+1+2 & i+1+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i+2 & i+3 \\ i+4 & i+5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2i+3 & 2i+5 \\ 2i+7 & 2i+9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi ved at alle tal $\in \mathbb{N}$ ganget med et lige til giver et lige tal. Dermed afgører konstanten i vores felter i $2x2$ matrice om resultatet er lige eller ulige. Da alle konstanter er ulige medfører dette er ulige tal uanset hvad i er. Vi har med induktion dermed bevist at: $A_i + A_{i+1}$ er positive ulige tal.
c) Hvilke af de seks nedenstående udsagn er ækvivalente med udsagnet, som skulle bevises i spørgsmål b?
Udsagn 5 og 6 er ækvivalent med udsanget i spørgsmål b.

5 Opgave 5 - Dobbeltsum

Beregn følgende dobbeltsum

$$\sum_{i=6}^{10} \sum_{j=1}^{i} j$$

Den indre sum kender vi en anden formel for og kan omskrives til

$$\sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2}$$

Den ydre sum kan vi omskrive til noget vi nemmere kan arbejde med

$$\sum_{i=6}^{10} = \sum_{i=1}^{10} - \sum_{i=1}^{5}$$

Vi får så at summen er

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{i(i+1)}{2} - \sum_{i=1}^{5} \frac{i(i+1)}{2}$$

Dette kan omskrives til

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} i$$

Ved opslag i tabel 2 afsnit 4.2 kan vi beregne summen til

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21)}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right) = \\ 192,5 + 27,5 - 27,5 - 7,5 = 185$$

6 Opgave 6 - Binære relationer

Spørgsmål a og b handler om binære relationer på mængden $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Hvilke relationer i Figur 1 er ækvivalensrelationer?
Definitionen på en ækvivalensrelation er at den skal være refleksiv, transitiv og symmetrisk
Figur a er ikke en ækvivalensrelation da den ikke er refleksiv, elementet $(1, 1)$ er der f.eks ikke.
Figur b er ikke en ækvivalensrelation da den ikke er refleksiv, elementet $(1, 1)$ er der f.eks ikke.
Figur c er en ækvivalensrelation da den er refleksiv, transitiv og symmetrisk.
Figur d er ikke en ækvivalensrelation da den ikke er refleksiv, elementet $(1, 1)$ er der f.eks ikke.
Figur e er ikke en ækvivalensrelation da den ikke er symmetrisk, f.eks er elementet $(1, 3)$ der men $(3, 1)$ er der ikke.
Figur f er ikke en ækvivalensrelation da den ikke er refleksiv, elementet $(1, 1)$ er der f.eks ikke.

b) Hvilke relationer i Figur 1 er partielle ordninger?
Definitionen på en Partielle ordninger er at den skal være refleksiv, transitiv og antisymmetrisk
Figur a er ikke en partiel ordning da den ikke er refleksiv, elementet $(1, 1)$ er der f.eks ikke.
Figur b er ikke en partiel ordning da den ikke er refleksiv, elementet $(1, 1)$ er der f.eks ikke.
Figur c er ikke en partiel ordning da den ikke er antisymmetrisk både $(1, 4)$ og $(4, 1)$ er repræsenteret. Figur d er ikke en partiel ordning da den ikke er refleksiv, elementet $(1, 1)$ er der f.eks ikke.
Figur e er ikke en partiel ordning da den ikke er transitiv. Man kan komme fra 1 til 5 og 5 til 4 men ikke fra 1 til 4.
Figur f er ikke en partiel ordning da den ikke er refleksiv, elementet $(1, 1)$ er der f.eks ikke.

c) Betragt nu følgende ækvivalensrelation på $\mathbb{Z}$

$$R = \{(a, b) \,|\, a + b \equiv 0 \pmod{2}\}$$

Angiv alle elementer i ækvivalensklassen for 3, d.v.s $[3]_R$.

$$[3]_R = [1]_R = [c]_R \text{ ,hvor c er et ulige tal i } \mathbb{Z}$$
$$[3]_R = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\} = \{n + 1 \,|n \in \mathbb{Z}\}$$