DM535 eksamenssæt – 13. januar/12

Studiegruppe F
Section S7
DM535

January 13, 2014

Contents

1 Bijektion, invers, $f + g$, $g \circ f$ og $f \circ g$

$$f(x) = x^2 + x + 1$$
$$g(x) = 2x - 2$$

Er $f(x)$ en bijektion?

Funktionen $f(x)$ ikke er bijektiv, da funktionen ikke er injektiv og surjektiv.

Har $f(x)$ en invers funktion?

Da funktionen $f(x)$ ikke er bijektiv, kan den heller ikke have en invers.

Beregn $f + g$

$$(x^2 + x + 1) + (2x - 2) = x^2 + 3x - 1$$

Bergen $f \circ g$

$$(2x - 2)^2 + (2x - 2) + 1 = (4x^2 + 4 - 8x) + 2x - 1 = 4x^2 - 6x + 3$$

Beregn $g \circ f$

$$2(x^2 + x + 1) - 2 = (2x^2 + 2x + 2) - 2 = 2x^2 + 2x$$

2 Udsagn P og Q og negering

$$P : \exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x = y$$
$$Q : \forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x = y$$

Er udsagn P sandt?

Udsagn P er falsk, da udsagnet betyder, at vi for ét enkelt x tilhørende de naturlige tal, skal kunne få alle y tilhørende de naturlige tal. Hvis vi sætter $x = 1$ og $y \neq 1$ vil udsagnet ikke holde.

Er udsagn Q sandt?

Udsagn Q er sandt, da udsagnet betyder, at der for alle x, tilhørende de naturlige tal, eksisterer mindst ét y tilhørende de naturlige tal. Lad os tage et vilkårligt naturligt tal og kalde det vores y. Det vil her være muligt at sætte x til at være netop det helt samme naturlige tal.

Negering af P

$$P : \exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x = y$$
$$\neg P : \neg(\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x = y)$$

Ved brug af De Morgan's love for kvantorer, kan vi flytte negeringen forbi vores kvantorer. Så vi ved at $\neg(\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x = y)$ er ækvivalent med $\forall x \in \mathbb{N} : \neg(\forall y \in \mathbb{N} : x = y)$ som er ækvivalent med $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : \neg(x = y)$ som til sidst giver os, $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \neq y$.

3 Talteori, indbyrdes primiske og kongruensen

Hvilket par er indbyrdes primske?

(1) 15 og 16
(2) 15 og 20
(3) 15 og 30
For at finde det indbyrdes primske par, skal vi se hvilket par hvor kun -1 og 1 går op i begge tal. Dette er ret nemt da f.eks. 5 går op i begge tal i måde par nr. 2 og par nr. 3. Så det rigtige svar er par nr. 1.

Tal der går op i 15 = $\{1, 3, 5, 15\}$
Tal der går op i 16 = $\{1, 2, 4, 8, 16\}$

Angiv mindste positive heltal x som opfylder kongruensen

$$5x \equiv 1 \pmod 7$$

Det mindste heltal er 3 da

$$5(1) \equiv 5\,(mod\,7)$$
$$5(2) \equiv 3\,(mod\,7)$$
$$5(3) \equiv 1\,(mod\,7)$$

4 Binære relation

$$R = \{(a, b)|b = a^2 \vee a = b^2\}$$

Angiv samtlige elementer i R

Samtlige elementer i R: $\{(0, 0),\ (1, 1),\ (2, 4),\ (3, 9),\ (4, 2),\ (9, 3)\}$

Er R refleksiv?

For at R skulle være refleksiv, skal det gælde at:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R)$$

Dette er ikke tilfældet, da der mangler $\{(2, 2)\}$

Er R symetrisk?

Hvis R skulle være symetrisk, skal det gælde at:

$$\forall a \in A : \forall b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

Dette er tilfældet, da der i definationen på R, kun kan forekomme elementer, hvor (a,b) enten er ens, eller hvor (a,b) har en partner som er (b,a).

Er R transaktiv?)

For at R er transaktiv, skal det gælde at:

$$\forall a \in A : \forall b \in A : \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

R er ikke transaktiv, da følgende elementer mangler: $\{(2,2)\}$
R kunne også havde været transaktiv hvis elementerne $\{(4,2),\ (9,3)\} \vee \{(2,4,\ (3,9)\}$ ikke eksisterede.

Er R en ækvivalensrelation?)

For at R skulle være en ækvivalensrelation, skulle R både være refleksiv, symetrisk og transaktiv. Da R kun er symetrisk er dette ikke tilfældet.

5 Matrice

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Beregn A^2

$$\begin{bmatrix} (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \\ (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \end{bmatrix} A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

Vis at $A^n \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

Matricen kalder vi for $P(n)$

Basisskridt:

$P(1)$:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi antager at $P(n)$ gælder og, at $P(n) \to P(n+1)$
$P(n+1)$

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix}$$

Induktionsskridt:

Jeg vil nu vise at $P(n) \to P(n+1)$

$$\begin{aligned} A^n \cdot A &= A^{n+1} \\ \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^{n-1} & 2 \cdot 2^{n-1} \\ 2 \cdot 2^{n-1} & 2 \cdot 2^{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■