

逻辑信号的误差分析

Error Analysis of Logic Signal

摘要：本文主要考虑基于两个逻辑信号重建一个逻辑信号的问题。本文给出了重建信号的误差的定义，讨论了基于两个逻辑信号重建一个逻辑信号的充分必要条件，给出了一种判定方法以及在符合判断条件下构造 0 误差的逻辑信号的方法，还简单讨论了不符合这种判定条件的情况，在这情况可能需要对时间信号、输入信号再建模或引入其他信号。

关键词：逻辑信号，信号重建，误差

1. s 误差代替信号的可构造性

设有时域上的逻辑信号 $A(t), B(t), P(t) \in \{0, 1\}$ ，若存在一个系统 F ，其输出一个时域上的信号 $F(t)$ ，称 $F(t)$ 为 $P(t)$ 的一个代替信号，且

$$e = |F(t) - P(t)|, \quad t \in [s, t]$$

为代替信号 $F(t)$ 在时域 $[s, t]$ 对逻辑信号 $P(t)$ 的误差。

特别地，对于 u 时刻，若可知 $P(u)$ 为 T 或为 F ，则称 $P(u)$ 为 P 在 $t=u$ 时刻的一个样本。 A 和 B 的样本的定义类似。

若有多个样本，称为一个样本集。

考虑样本集 D ，若存在样本 $A(u)=a, B(u)=b, P(u)=u$ ，则称 $u \in Q_{abp}$ 。特别地，由于 $u \in R$ ，故 Q_{abp} 是有序的。令 $Q_{abp}[I]$ 为 Q_{abp} 第 I 大的元素。记 $|Q_{abp}|$ 为 S_{abp} 。

在实际的情况中，我们通常无法直接使信号 P 直接作为 F 的输入，所以下文我们默认不讨论可以将信号 P 作为 F 的输入的情况。

设有常数 s ，若恒有 $e < s$ ，则称 $F(t) \in E(P, s)$ ，称 $F(t)$ 为逻辑信号 $P(t)$ 的 s 误差信号。 $E(P, s)$ 为逻辑信号 $P(t)$ 的 s 误差信号集。

特别地，若至少存在一个系统 F ，有 $F(t) \in E(P, s)$ ，即 $|E(P, s)| > 1$ ，则称 $P(t)$ 的 s 误差信号是可构造的。

特别地，若 A 和 B 为 F 的输入信号，则称 $F(t)$ 基于重构 $A(t)$ 和 $B(t)$ 。

特别地，若 t 也是 F 的输入，则称 $F(t)$ 是时敏的。

特别地，若 F 只涉及到对信号的加、减、乘、除和布尔运算，只额外引入了常数信号，则称 F 是可代数表达的。

为了方便，本文只考虑时间为整数值的情况，即 $t \in \mathbb{N}$ ，下文将简化信号 $P(t)$ 的表示为 $P[t]$ ，其他信号类似。

可以参考下图理解 A, B, P, F 的关系：

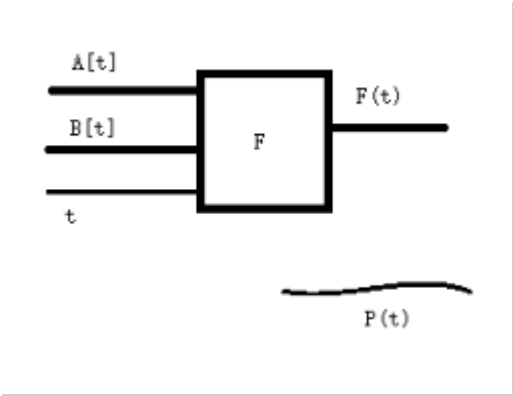


图 1 A, B, P, F 和 t

2.基于重构的信号

设有样本集 $A[u], B[u], P[u], t \in [0, N]$ 。需要注意， $A[t], B[t], P[t]$ 的性质应该视为独立存在的，即它不必然存在一个基于重构 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的代替信号。

我们考虑形如 $Qabp$ 的全部可能的形式。由于 A, B, P 都为逻辑信号，故 $a, b, p \in \{T, F\}$ ，故而形如 $Qabp$ 的集合是有限的，他们只可能有 8 个，即：

A	B	P	Q
t	t	t	Qttt
t	t	f	Qttf
t	f	t	Qtft
t	f	f	Qtff
f	t	t	Qftt
f	t	f	Qftf
f	f	t	Qfft
f	f	f	Qfff

表 1 形如 $Qabp$ 的集合

考虑对于集合 $Qabt$ ， $Qabf$ ，或者 $Sabf=0$ ，或者 $Sabt=0$ ，则说明当 $A[t]=a$ ， $B[t]=b$ 的

时候， $P[t]$ 的值是唯一的，称 $ab \rightarrow p$ 或 $ab \rightarrow \neg p$ 相容于样本集 D 。否则，在 $u \in Q_{abt}$ 的时候， $A[t]$ 为 a ， $B[t]$ 为 b ， $P[t]$ 为 t ，但当 $u \in Q_{abf}$ 的时候， $A[t]$ 为 a ， $B[t]$ 为 b ， $P[t]$ 为 f ，称 $ab \rightarrow p$ ， $ab \rightarrow \neg p$ 在样本集 D 上不完备的。

考虑对于所有形如 Q_{abp} 的集合，我们总能判断这三种情况之一：（1） $ab \rightarrow p$ 相容于样本集，（2） $ab \rightarrow \neg p$ 相容于样本集 D ，（3） $ab \rightarrow p$ ， $ab \rightarrow \neg p$ 在样本集 D 上不完备的。

若只存在情况（1）和情况（2），显然，这意味着当 $A[t]=a, B[t]=b$ 的时候， $P[t]$ 一定为 t 或者 f 。为此，我们可以构造如下的式子：

$$\begin{aligned} X[t] = & ((Sttf=0) \wedge A[t] \wedge B[t]) \vee \\ & ((Stff=0) \wedge A[t] \wedge \neg B[t]) \vee \\ & ((Sftf=0) \wedge \neg A[t] \wedge B[t]) \vee \\ & ((Sfff=0) \wedge \neg A[t] \wedge \neg B[t]) \end{aligned}$$

……式子 (i)

显然 $X[t] = P[t]$ 。

由于 S_{abp} 在样本确定后既是唯一的常数，显然 $X[t]$ 是一个基于重构 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的代替信号。由此我们可以知道，下列命题：

$$\text{对于样本集 } D, a, b \in \{T, F\}, S_{abf} = 0, \text{ 或者 } S_{abt} = 0$$

……命题 (i)

是基于重构 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的 $P[t]$ 的代替信号的充分条件。由 $X[t]$ （包括常数项的因式还可以化简），我们即可构造一个这样的信号。

我们考虑存在情况（3）。这就意味着，当 t 不同的时候，即使 $A[t]$ 和 $B[t]$ 的值均为 a 和 b ，相对没有改变，但 $P[t]$ 可能是 T ，也可能是 F 。由于代数表达式的封闭性，我们可以知道，若不涉及时间对 t 的处理，且没有其他的独立输入信号，不可能构造基于重构 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的 $P[t]$ 的代替信号。由此命题 (i) 也是存在构造基于重构 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的 $P[t]$ 的代替信号的必要条件。

由此，在不引入其他信号的情况下，命题 (i) 是存在基于重构 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的 $P[t]$ 的代替信号的充分必要条件。式子 (i) 是一个构造这样的代替信号的一个方法。

3.时敏的基于重构的信号

考虑存在情况（3），我们仍然可以构造下列式子：

$$\begin{aligned} X'[t] = & (Ltt[t] \wedge A[t] \wedge B[t]) \vee \\ & (Ltf[t] \wedge A[t] \wedge \neg B[t]) \vee \end{aligned}$$

$$(Lft[t] \wedge \neg A[t] \wedge B[t]) \vee \\ (Lff[t] \wedge \neg A[t] \wedge \neg B[t])$$

……式子 (ii)

其中:

$$Lab[t] = T, \text{ if } t \in Q_{abt} \\ F, \text{ otherwise}$$

容易证明, $X'[t] = P[t]$ 。注意, 在这个式子 (ii) 可以处理情况 (3), 即 $ab \rightarrow p$, $ab \rightarrow \neg p$ 在样本集 D 上不完备的情况。

但这里有一个问题, 即当我们希望通过 $X'[t]$ 预测 $P[t]$, 当时间已经大于 N , $Lab[t]$ 已经没有定义。

这里的关键在于, $Lab[t]$ 的设计。例如, 下面这个函数可以等效地实现 $Lab[t]$ 在 $[0, N]$:

$$Vab[t] = \prod_I (1 - Q_{abt}[I]) \\ Lab'[t] = T, \text{ if } Vab[t] = 0 \\ F, \text{ otherwise}$$

这个函数在 $t > N$ 的时候仍然可以计算, 但我们知道这也没有什么实际意义。但从 $Vab[t]$ 来看, 我们可以看到, 只从时间 t 来看到 $ab \rightarrow p$, $ab \rightarrow \neg p$ 在样本集 D 上的不完备, 我们看到的是当 t 在一个样本外面的时候, $Vab'[t]$ 越靠近两端为 T 的时间, 越接近 0 , 否则越远离 0 。

有一些特殊的情况或许可以有助于我们考虑时敏情况。例如:

$$Q_{abt} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

这种情况可以令

$$Vab[t] = t \bmod 2 \\ Lab'[t] = T, \text{ if } Vab[t] = 0 \\ F, \text{ otherwise}$$

这样子, 可以使得 $t > N$ 的时候, $X'[t]$ 仍然有定义, 但这可能并不正确。在某种程度上, 我们在这里剥离了逻辑信号本身, 将逻辑信号转化为了 $Vab[t]$ 的建模的问题。

4.总结

从上面我们可以发现：（1）一个逻辑信号能否由另外两个逻辑信号重建、表示，与特定类型的样本的数量有关；（2）将一个逻辑信号由另外两个逻辑信号重建、表示，在比较复杂的情况，可能需要涉及逻辑信号的分解，并且需要对作为输入的逻辑信号再建模，甚至引入时间信号、其他信号。

本文讨论了基于两个逻辑信号重建一个逻辑信号，而使得这个重建后的逻辑信号与另一个信号尽可能接近的问题。本文给出了不引入时敏信号或其他信号的情况下，可以重建一个这样的信号的充分必要条件，及其构造方法。这个充分必要条件与一些类型的样本的数量为 0 有关。当这个充分必要条件不成立的时候，本文给出另外一个方法，可以将信号的重建分为多个信号的逻辑析取，但需要对这些个别的信号进行额外的分别建模。本文主要讨论了析取的情况，经由改写为合取的情况，还可以得到一些其他的结论。

松兰堡文档许可证

SONGLANBAO Documentation License

这个文档中所阐述、记载、声称的内容为全体人类知识的一部分。作者同意阅读、分析、研究、编辑、批注、翻译、印刷、展示、公开、赠送、传播这个文档或者这个文档的副本的相关活动，无论是对一个组织内部的还是面向社会大众的，无论是纸质文件、数字文件或其他形式。作者保留相关著作权利，未经作者同意不得用于不限制范围的消费者的销售，但不对印刷份数少于 25 份的情况进行追究。作者不承诺此文档已经达到某种学术水准、文字水准。作者保留销毁、修改、更新、再版、解释或变更相关许可的权利。

开始于 2023 年 5 月