逻辑信号的误差分析

Error Analysis of Logic Signal

摘要：本文主要考虑基于两个逻辑信号重建一个逻辑信号的问题。本文给出了重建信号的误差的定义，讨论了基于两个逻辑信号重建一个逻辑信号的充分必要条件，给出了一种判定方法以及在符合判断条件下构造0误差的逻辑信号的方法，还简单讨论了不符合这种判定条件的情况，在这情况可能需要对时间信号、输入信号再建模或引入其他信号。

关键词：逻辑信号，信号重建，误差

### s误差代替信号的可构造性

设有时域上的逻辑信号A(t), B(t), P(t) ∈ {0, 1}，若存在一个系统F，其输出一个时域上的信号F(t) ，称 F(t) 为 P(t) 的一个代替信号，且

e = | F(t) - P(t) |， t ∈ [s, t]

为代替信号 F(t) 在时域 [s, t] 对逻辑信号 P(t) 的误差。

特别地，对于u时刻，若可知 P(u) 为 T 或 为 F，则称 P(u) 为 P 在 t=u 时刻的一个样本。A和B的样本的定义类似。

若有多个样本，称为一个样本集。

考虑样本集 D，若存在样本 A(u)=a, B(u)=b, P(u)=u ，则称 u ∈ Qabp。特别地，由于 u ∈ R，故Qabp是有序的。令 Qabp[I] 为 Qabp 第 I 大的元素。记 |Qabp| 为 Sabp。

在实际的情况中，我们通常无法直接使信号P直接作为F的输入，所以下文我们默认不讨论可以将信号P作为F的输入的情况。

设有常数 s，若恒有 e < s ，则称 F(t) ∈ E(P, s)，称 F(t) 为逻辑信号 P(t) 的 s误差信号。E(P, s) 为逻辑信号 P(t) 的 s误差信号集。

特别地，若至少存在一个系统F，有 F(t) ∈ E(P, s)，即 |E(P,s)| > 1，则称 P(t) 的 s误差信号是可构造的。

特别地，若 A 和 B 为 F的输入信号，则称 F(t) 基于重构 A(t) 和 B(t) 。

特别地，若 t 也是 F的输入，则称 F(t) 是时敏的。

特别地，若 F 只涉及到对信号的加、减、乘、除和布尔运算，只额外引入了常数信号，则称F是可代数表达的。

为了方便，本文只考虑时间为整数值的情况，即 t ∈ N，下文将简化信号P(t)的表示为P[t]，其他信号类似。

可以参考下图理解A,B,P,F的关系：



图1 A,B,P,F和t

### 2.基于重构的信号

设有样本集 A[u], B[u], P[u], t ∈ [0, N] 。需要注意，A[t]，B[t]，P[t] 的性质应该视为独立存在的，即它不必然存在一个基于重构 A(t) 和 B(t) 的代替信号。

我们考虑形如 Qabp 的全部可能的形式。由于A，B，P都为逻辑信号，故 a，b，p ∈ {T, F} ，故而形如 Qabp 的集合是有限的，他们只可能有 8 个，即：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | P | Q |
| t | t | t | Qttt |
| t | t | f | Qttf |
| t | f | t | Qtft |
| t | f | f | Qtff |
| f | t | t | Qftt |
| f | t | f | Qftf |
| f | f | t | Qfft |
| f | f | f | Qfff |

表1 形如 Qabp 的集合

考虑对于集合 Qabt ，Qabf，或者 Sabf = 0，或者 Sabt = 0，则说明当 A[t]=a， B[t]=b 的时候，P[t] 的值是唯一的，称 ab→p 或 ab→¬p 相容于样本集 D。否则，在 u ∈ Qabt的时候，A[t]为a，B[t]为b，P[t] 为 t，但当 u ∈ Qabt的时候，A[t]为a，B[t]为b，P[t] 为 f，称 ab→p ， ab→¬p 在样本集 D上不完备的。

考虑对于所有形如Qabp的集合，我们总能判断这三种情况之一：（1）ab→p 相容于样本集，（2）ab→¬p 相容于样本集 D，（3）ab→p ， ab→¬p 在样本集 D上不完备的。

若只存在情况（1）和情况（2），显然，这意味着当A[t]=a,B[t]=b的时候，P[t]一定为t或者f。为此，我们可以构造如下的式子：

X[t] = ((Sttf=0) ∧A[t]∧B[t]) ∨

((Stff=0) ∧A[t]∧¬B[t])∨

((Sftf=0) ∧¬A[t]∧B[t])∨

((Sfff=0) ∧¬A[t]∧¬B[t])

……式子（i）

显然 X[t] = P[t] 。

由于 Sabp 在样本确定后既是唯一的常数，显然X[t] 是一个基于重构 A(t) 和 B(t) 的代替信号。由此我们可以知道，下列命题：

对于样本集D，a，b ∈ {T, F }，Sabf = 0，或者 Sabt = 0

……命题（i）

是基于重构 A(t) 和 B(t)的P[t]的代替信号的充分条件。由X[t]（包括常数项的因式还可以化简），我们即可构造一个这样的信号。

我们考虑存在情况（3）。这就意味着，当t不同的时候，即使A[t]和B[t]的值均为a和b，相对没有改变，但P[t]可能是T，也可能是F。由于代数表达式的封闭性，我们可以知道，若不涉及时间对t的处理，且没有其他的独立输入信号，不可能构造基于重构 A(t) 和 B(t)的P[t]的代替信号。由此命题（i）也是存在构造基于重构 A(t) 和 B(t)的P[t]的代替信号的必要条件。

由此，在不引入其他信号的情况下，命题（i）是存在基于重构 A(t) 和 B(t)的P[t]的代替信号的充分必要条件。式子（i）是一个构造这样的代替信号的一个方法。

### 3.时敏的基于重构的信号

考虑存在情况（3），我们仍然可以构造下列式子：

X’[t] = (Ltt[t] ∧A[t]∧B[t]) ∨

(Ltf[t] ∧A[t]∧¬B[t])∨

(Lft[t] ∧¬A[t]∧B[t])∨

(Lff[t]∧¬A[t]∧¬B[t])

……式子（ii）

其中：

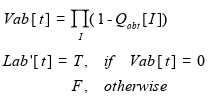
Lab[t] = T, if t ∈ Qabt

F, otherwise

容易证明，X’[t] = P[t] 。注意，在这个式子（ii）可以处理情况（3），即 ab→p ， ab→¬p 在样本集 D上不完备的情况。

但这里有一个问题，即当我们希望通过X’[t] 预测P[t]，当时间已经大于N，Lab[t]已经没有定义。

这里的关键在于，Lab[t]的设计。例如，下面这个函数可以等效地实现Lab[t]在[0,N]：

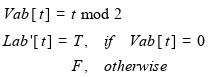


这个函数在 t>N 的时候仍然可以计算，但我们知道这也没有什么实际意义。但从Vab[t]来看，我们可以看到，只从时间t来看到ab→p ， ab→¬p 在样本集 D上的不完备，我们看到的是当t在一个样本外面的时候，Vab‘[t]越靠近两端为T的时间，越接近0，否则越远离0。

有一些特殊的情况或许可以有助于我们考虑时敏情况。例如：

Qabt = {0, 2, 4, 6...}

这种情况可以令



这样子，可以使得 t > N 的时候，X‘[t] 仍然有定义，但这可能并不正确。在某种程度上，我们在这里剥离了逻辑信号本身，将逻辑信号转化为了 Vab[t] 的建模的问题。

### 4.总结

从上面我们可以发现：（1）一个逻辑信号能否由另外两个逻辑信号重建、表示，与特定类型的样本的数量有关；（2）将一个逻辑信号由另外两个逻辑信号重建、表示，在比较复杂的情况，可能需要涉及逻辑信号的分解，并且需要对作为输入的逻辑信号再建模，甚至引入时间信号、其他信号。

本文讨论了基于两个逻辑信号重建一个逻辑信号，而使得这个重建后的逻辑信号与另一个信号尽可能接近的问题。本文给出了不引入时敏信号或其他信号的情况下，可以重建一个这样子的信号的充分必要条件，及其构造方法。这个充分必要条件与一些类型的样本的数量为0有关。当这个充分必要条件不成立的时候，本文给出另外一个方法，可以将信号的重建分为多个信号的逻辑析取，但需要对这些个别的信号进行额外的分别建模。本文主要讨论了析取的情况，经由改写为合取的情况，还可以得到一些其他的结论。