4.1 群の作用

climax

2025 年 8 月 27 日

目次

1　群の作用

定義 1.1 (定義 4.1.1 群の作用)**.** G を群、X を集合とするとき、G の X への**左作用**とは、写像 $\phi : G \times X \to X$ であり、次の性質 (1), (2) を満たすものである。

1. $\phi(1_G, x) = x$
2. $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$

また、写像 $\phi : G \times X \to X$ が次の (1), (2') を満たすならば、**右作用**という。

(2') $\phi(h, \phi(g, x)) = \phi(hg, x)$

G の X への作用があるとき、G は X に**作用する**という。左作用なら、G は X に**左から作用する**という。右も同様。左作用のとき、$\phi(g, x)$ の代わりに $g \cdot x$ と書くと、(2) の性質は $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ となる。右作用のとき、$\phi(g, x)$ の代わりに $x \cdot g$ と書くと、(2') の性質は $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ となる。「・」なしで書くこともある。左作用の場合、$g \cdot x$ ではなく x^g と書くこともある。

■ノートによる補足　$x, y \in X, g \in G$ で $gx = y$ なら、g により x は y に移るという。このとき $g^{-1}y = g^{-1}gx = 1_G x = x$ より、g が x を y に移すなら、g^{-1} により y は x に移る。g による作用が、g^{-1} による作用の逆写像になるので、次の命題を得る。

命題 1.2 (命題 4.1.2)**.** 群 G が集合 X に作用すると、$g \in G$ に対して定まる写像 $\phi_g : X \to X$ *(*$x \mapsto gx$*)* は全単射である。（逆写像の存在と写像が全単射であることは同値）

例 1.3 (例 4.1.3 群の作用 1 (自明な作用))**.** G を群、X を集合とする。$g \in G, x \in X$ に対して、$gx = x$ と定義すると、明らかに左作用でも右作用でもある。この作用のことは**自明な作用**という。

例 1.4 (例 4.1.4 群の作用 2)**.** $G = \mathfrak{S}_n,\ X = \{1, \ldots, n\}$ とする。G は $X \to X$ の全単射全体より、$\sigma \in G, i \in X$ に対して $\sigma(i)$ を $\phi(\sigma, i) = \sigma(i)$ とすると、$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対し $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ より、これは左作用である。

例 1.5 (例 4.1.5 群の作用 3 (線形作用))**.** G を群、$\rho : G \to GL_n(\mathbb{R})$ を準同型とする。$g \in G$ に対し定まる写像 $\phi(g, \boldsymbol{x}) = \rho(g)\boldsymbol{x}$ を考える。（なお、$g \in G, \rho(g) \in GL_n(\mathbb{R}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$）

- ρ は準同型なので $\rho(1_G) = I_n$（$\leftarrow$ 命題 2.S.C）。よって $\phi(1_G, \boldsymbol{x}) = I_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
- また、$g, h \in G$ なら、行列に関して結合法則が成り立つので $\rho(g)(\rho(h)\boldsymbol{x}) = (\rho(g)\rho(h))\boldsymbol{x} = \rho(gh)\boldsymbol{x}$（$\rho$ は準同型）

よって、$(g, \boldsymbol{x}) \mapsto \rho(g)\boldsymbol{x}$ は左作用である。$\rho(g)$ は線形写像なので、このような作用のことを**線形作用**という。G が $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群なら、包含写像 $G \to GL_n(\mathbb{R})$ は準同型である。よって G は $\mathbb{R}^n$ に作用する。（$x \in \mathbb{R}^n$ に注意）

$O(n) = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_n\}$（直交群）$SO(n) = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_n, \det g = 1\}$（特殊直交群）$O(n)$ と $SO(n)$ が $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群であることは 2.3 で示した。このため、$O(n)$, $SO(n)$ は $\mathbb{R}^n$ に作用する。同様に準同型 $G \to GL_n(\mathbb{C})$ があれば、G は $\mathbb{C}^n$ に作用する。これも線形作用という。

■特に O(2) について考察する　$\theta \in \mathbb{R}$ に対し、$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は $SO(2)$ の元である。これが回転行列であることは周知の事実であろう。

補題 1.6 (補題 SO(2))**.** $SO(2)=\{R_\theta \mid \theta\in\mathbb{R}\}$

証明. $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SO(2)$ ならば ${}^tgg=I_2$ より $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。$a^2+c^2=1, b^2+d^2=1, ab+cd=0$。$a^2+c^2=1$ より $a=\cos\theta, c=\sin\theta$ となる $\theta\in\mathbb{R}$ が存在する。$ab+cd=0$ より $b=t\sin\theta, d=-t\cos\theta$ となる $t\in\mathbb{R}$ が存在する。$b^2+d^2=1$ より $t^2=1$ となり $t=\pm1$。$\det g=ad-bc=-t\cos^2\theta-t\sin^2\theta=-t$。$\det g=1$ より $t=-1$。よって $g=R_\theta$。

補題 1.7 (補題 4.1.9)**.** $\mathbb{R}^2$（平面）の回転はすべて $SO(2)$ の作用で得られることを主張している。

命題 1.8 (命題 4.1.8)**.** *1.* $g\in O(n)$ なら、$\det g=\pm1$

2. $[O(n):SO(n)]=2$

証明. (1) $g\in O(n)$ なら ${}^tgg=I_n$。両辺の行列式を考え、$\det({}^tgg)=\det(I_n)$ より $(\det g)^2=1$。よって $\det g=\pm1$。

(2) 行列式の値が-1 になる $O(n)$ の元として、$r=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}$ がある。(n=2 の場合は $r=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$) 準同型写像 $\det: O(n)\to\{\pm1\}$ は全射である。$\ker(\det)=SO(n)$ であるため ($\det g=1 \iff g\in SO(n)$)、準同型定理より $O(n)/SO(n)\cong \mathrm{Im}(\det)=\{\pm1\}$。よって $[O(n):SO(n)]=|O(n)/SO(n)|=|\{\pm1\}|=2$。

1.1 二面体群

整数 $n\geq 2$ を固定する。P_n を単位円に内接し、$(1,0)$ を一つの頂点とする正 n 角形とする。

$$D_n=\{g\in O(2)\mid gP_n=P_n\}$$

とおき、これを**二面体群**という。r と t を $r=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (4.19 で定義された元)、$t=R_{2\pi/n}=\begin{pmatrix}\cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n)\\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n)\end{pmatrix}$ とおく。

命題 1.9 (命題 4.1.10)**.** *1.* 関係式 $t^n=1, r^2=1, rtr=t^{-1}$ が成立。

2. $|D_n|=2n$, $D_n=\{1,t,\ldots,t^{n-1},r,rt,\ldots,rt^{n-1}\}$

3. rt^i $(i=0,\ldots,n-1)$ の位数は *2* である。

証明. (1) 最初の二つは明らか。$\theta\in\mathbb{R}$ なら、

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=R_{-\theta}=R_\theta^{-1}$$

$\theta=2\pi/n$ とすれば $rtr=t^{-1}$ が従う。

(3) 関係式 $rtr=t^{-1}$ の両辺に右から r を掛けると $rt=t^{-1}r$ を得る。一般に $rt^i=t^{-i}r$ が成り立つ。これを用いて位数を計算する。$(rt^i)^2=(rt^i)(rt^i)=r(t^ir)t^i=r(rt^{-i})t^i=(r^2)(t^{-i}t^i)=1\cdot t^0=1$ $rt^i\neq 1$ なので、位数は 2 である。

■ノートによる命題 4.1.10-(2) の証明の概略　P_n は正 n 角形の頂点の座標の集合と見なしてよい。t は角度 $2\pi/n$ の回転なので、$A_1=(1,0)$ とすると $A_1\to A_2\to\cdots\to A_n\to A_1$ となるため $tP_n=P_n$。r は平面の点を x 軸に対して対称に移すので $rP_n=P_n$。(n が奇数の場合も問題ない)

$g\in D_n$ で $\det g=-1$ なら、$\det(rg)=\det(r)\det(g)=(-1)(-1)=1$ より、$rg\in D_n\cap SO(2)$ である。$h=rg$ とおくと、$r^2=1$ なので $g=rh$ となり、行列式が-1 になる元は、r に何らかの要素をかけたものとなる。$R_\theta\in D_n\cap SO(2)$ なら、R_θ は P_n の頂点を P_n の頂点に移さねばいけないので、A_1 を別の頂点 A_{k+1} に

移す。$R_\theta A_1 = A_{k+1} = R_{2\pi k/n} A_1$ より、$R_\theta = t^k$ $(0 \le k \le n-1)$ である。$1, t, \ldots, t^{n-1}$ はすべて違う元であり、$\det(t^i) = 1$, $\det(rt^i) = -1$ より、t^i と rt^j は同値でない。よって D_n の元は $2n$ 個である。

1.2 置換表現

群 G が有限集合 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ に左から作用するとする。このとき $g \cdot x_i = x_{\rho(g)(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおく。これは $\{1, \ldots, n\}$ の置換 $\rho(g)$ を引き起こし、写像 $\rho : G \to \mathfrak{S}_n$ を定める。

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \rho(g)(1) & \ldots & \rho(g)(n) \end{pmatrix}$$

命題 1.10 (命題 4.1.12)**.** $\rho : G \to \mathfrak{S}_n$ は群の準同型である。

証明. $g, h \in G, i = 1, \ldots, n$ に対し、$(gh) \cdot x_i = g \cdot (h \cdot x_i) = g \cdot x_{\rho(h)(i)} = x_{\rho(g)(\rho(h)(i))} = x_{(\rho(g)\rho(h))(i)}$ 一方で、$(gh) \cdot x_i = x_{\rho(gh)(i)}$。$\rho(g)$ と $\rho(h)$ は置換なので、$(\rho(g)\rho(h))(i) = \rho(g)(\rho(h)(i))$ と同じ。よって $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ である。上の G の X への作用により定まるものを**置換表現**という。

定理 1.11 (定理 4.1.13 (Cayley))**.** G が位数 n の有限群なら、G から $\mathfrak{S}_n$ への単射準同型が存在する。

証明. G の G 自身への左からの作用を考える。命題 4.1.12 より置換表現 $\rho : G \to \mathfrak{S}_G$ が定まる。$g, x \in G$ とすると、$g \cdot x_i = x_{\rho(g)(i)}$ より、$\rho(g)(x) = gx$ と作用を積として定義している。$\ker(\rho)$ は $\rho(g)$ が恒等置換になるような g の集合であり、これを満たすのは 1_G のみである。(なぜなら、$\rho(g)$ が恒等置換なら、すべての $h \in G$ に対し $gh = h$ となる。$h = 1_G$ とすれば $g1_G = 1_G$ より $g = 1_G$ となる。) よって $\ker(\rho) = \{1_G\}$ となり、ρ は単射。

例 1.12 (例 4.1.14)**.**
1. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ において、$x_1 = \bar{0}, x_2 = \bar{1}, x_3 = \bar{2}$ とする。$g = \bar{1}$ とすると、$g + x_1 = x_2, g + x_2 = x_3, g + x_3 = x_1$ となる。よって $\rho(\bar{1}) = (123) \in \mathfrak{S}_3$ である。
2. $G = \mathfrak{S}_3$ とし、$x_1 = 1, x_2 = (12), x_3 = (13), x_4 = (23), x_5 = (123), x_6 = (132)$ とおく。$g = (12), h = (23)$ とする。

■S3 の積の表と置換表現の例 $G = \mathfrak{S}_3$ の積の表（一部）

$\circ$	1	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	1	(132)	(123)	(23)	(13)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	1

$g = (12)$ の置換表現 $\rho(g)$

x	1	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
gx	(12)	1	(132)	(123)	(23)	(13)

これは置換 (12)(36)(45) に対応する。

$h = (123)$ の置換表現 $\rho(h)$

x	1	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
hx	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	1

これは置換 (156)(234) に対応する。

例 1.13 (例 4.1.15 (群の作用 5))**.** H を群 G の部分群、$X = G/H$ とする。$g \in G, xH \in G/H$ に対して、$g \cdot (xH) = (gx)H$ と定義すれば、これは well-defined になり、G の G/H への左作用になる。

証明. [well-defined であることの証明] $g \in G, xH \in G/H$ に対し、$\forall y \in xH,\ gy \in (gx)H$ を示せばよい。

$y \in xH$ より $\exists h \in H, y = xh$。$gy = g(xh) = (gx)h$。$(gx)h \in \{(gx)h' \mid h' \in H\} = (gx)H$ より示された。

■作用に関して $\phi : G \times G/H \to G/H, \phi(g, x) = gx \in X$ $g \cdot (xH) = (gx)H$ $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = g_1 \cdot (g_2 x)H = (g_1 g_2 x)H = (g_1 g_2)xH$ この作用を G の G/H への**自然な作用**という。

例 1.14. $G = \mathfrak{S}_3, H = \langle (12) \rangle$ なら、G/H の完全代表系として $\{x_1 = 1, x_2 = (123), x_3 = (132)\}$ ととる。$g = (12)$ としたときの置換表現をみる。

- $(12) \cdot x_1 = (12) \in x_1 H$
- $(12) \cdot x_2 = (132)(12) \in x_3 H$
- $(12) \cdot x_3 = (123)(12) \in x_2 H$

$gH = H$, $g(123)H = (12)(123)H = (13)H = (132)H$ $g(132)H = (12)(132)H = (23)H = (123)H$ より $\rho((12)) = (23)$。同様に $\rho((123)) = (123)$。

例 1.15 (例 4.1.16 (群の作用 6))**.** G を群、$X = G$ とする。$g \in G, h \in X$ とするとき、$Ad(g)(h) = ghg^{-1}$ と定義する。$g_1, g_2, h \in G$ なら $Ad(g_1 g_2)(h) = g_1 g_2 h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = Ad(g_1)(Ad(g_2)(h))$。$G \times X$ から X への写像を $(g, x) \mapsto Ad(g)(x)$ と定義すると、上の考察より左作用になる。この作用のことを**共役による作用**という。アーベル群の場合、$g \cdot x = gxg^{-1} = gg^{-1}x = x$ より自明な作用になる。

例 1.16. $G = \mathfrak{S}_3$ として、$\sigma = (13)$ なら、$Ad(\sigma)(1) = 1$, $Ad(\sigma)((12)) = (13)(12)(13) = (23)$, $Ad(\sigma)((13)) = (13)$, $Ad(\sigma)((23)) = (13)(23)(13) = (12)$, $Ad(\sigma)((123)) = (132)$, $Ad(\sigma)((132)) = (123)$ より、$1, (12), (13), (23), (123), (132)$ の順番に番号をつけて置換表現 ρ によると、$\rho(\sigma) = (24)(56)$ となる。

例 1.17 (例 4.1.17 (群の作用 7))**.** G を群、X を G から C への関数全体の集合とする。$g \in G, f \in X$ とするとき、$g, f \in X$ を $(gf)(h) = f(hg)$ と定義する。$g_1, g_2 \in G$ なら、$(g_1(g_2 f))(h) = (g_2 f)(hg_1) = f((hg_1)g_2) = f(h(g_1 g_2)) = ((g_1 g_2)f)(h)$ なのでこれは左作用である。$g(f)(h) = f(gh)$ とすれば右作用。また $(g \cdot f)(h) = f(hg^{-1})$ とすれば右作用。$(g_1 \cdot (g_2 \cdot f))(h) = (g_2 \cdot f)(hg_1^{-1}) = f((hg_1^{-1})g_2^{-1}) = f(h(g_2 g_1)^{-1}) = ((g_2 g_1) \cdot f)(h)$ $(g \cdot f)(h) = f(g^{-1}h)$ ならば左作用。(1 行目と同じ)

■注意 4.1.18 **第一同型定理の応用の可能性** $\phi : H \to G$ を準同型とする。定理 2.10.1 より $H/\ker(\phi) \cong \mathrm{Im}(\phi) \subset G$ は部分群である。部分群の存在だけで非自明な情報が得られていることがある。例えば G の位数は n で K の位数は m も決定していたとする。このとき、G は G/K へ左からの積で作用する。$(g, aK) = (ga)K$。この作用で置換表現 $\rho : G \to \mathfrak{S}_l$ が定まる。$|G/K| = n/m$ (ラグランジュの定理) m が大きくて $l! < n$ なら ρ は単射ではない。一方、G の G/K への作用は推移的なので、$n \neq m$ でなければ $Im(\rho) \neq \{1_{\mathfrak{S}_l}\}$。したがって $\ker(\rho) \subset G$ は非自明な正規部分群。

証明. [補足：推移性の証明] $a, b \in G$, $(gA)K = bK$ を示したい。$g = ba^{-1}$ とすればよい。$ba^{-1} \in G$ より $g \in G$。よって $x \in G/K$、$Gx = G/K$ が成立。

証明. [補足：推移性と核] 推移性が満たされることにより、$\ker(\rho) \neq G$ が言える。異なる 2 つの剰余類 aK, bK があれば、aK を bK へと動かす元 g が必ず存在するというのが推移性だが、$\ker(\rho) = G$ ならば推移性は満たされない。($\forall g \in G, g \cdot (aK) = aK$ より推移性を満たさない)

1.3 軌道と安定化群

定義 1.18 (定義 4.1.19)**.** 群 G が集合 X に作用するとする。

1. $x \in X$ のとき $G \cdot x = \{gx \mid g \in G\}$ と書き、x の G による**軌道**という。

2. $x \in X$ があり、$G \cdot x = X$ となるとき、この作用は**推移的**であるという。すなわち X は G の**等質空間**という。
3. $x \in X$ のとき、$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ と書き、x の**安定化群**という。

例 1.19 (例 4.1.20 (軌道・安定化群 1)). $G = SO(2) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}, X = \mathbb{R}^2$ G は行列としての積により X に作用する。$\mathbb{R}^2$ の元は $[x,y]^T$ と表す。正の実数 a に対し、$R_\theta[a,0]^T = [a\cos\theta, a\sin\theta]^T$ より、$[a,0]$ の軌道は半径 a の円である。$[a,0]$ の安定化群は $G_{[a,0]} = \{R_{2m\pi} \mid m \in \mathbb{Z}\}$。また、$a > 0$ を固定すれば、G は $C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$ に作用し、C_a は G の等質空間。

命題 1.20 (命題 4.1.21). G が集合 X に作用し、$x, y \in X, g \in G$ で $gx = y$ なら、$G_y = gG_xg^{-1}$。

証明. $h \in G_y$ なら $hy = y$。$h \in G \cdot x = gx$ より $Gy = Gx$。$y = gx$ より逆写像を考えると $x = g^{-1}y$。$h \in G_y \iff hy = y \iff hgx = gx \iff g^{-1}hgx = x \iff g^{-1}hg \in G_x \iff h \in gG_xg^{-1}$ よって $G_y = gG_xg^{-1}$。

命題 1.21 (命題 4.1.22). G が集合 X に作用し、$x, y \in X$ で $(G \cdot x) \cap (G \cdot y) \neq \emptyset$ なら、$G \cdot x = G \cdot y$。$G_x \cong G_y$ である。

証明. $z \in (G \cdot x) \cap (G \cdot y)$ なら、$z = g_1x = g_2y$ となる $g_1, g_2 \in G$ が存在。$y = g_2^{-1}g_1x$ より、命題 4.1.21 より $G \cdot x = G \cdot y$。$g = g_2^{-1}g_1$ とし、$G_y = gG_xg^{-1}$。写像 $\phi : G_x \to G_y$ を $\phi(h) = ghg^{-1}$ とする。$\phi(h_1h_2) = g(h_1h_2)g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = \phi(h_1)\phi(h_2)$ より ϕ は準同型。$h \mapsto g^{-1}hg$ が ϕ の逆写像なので、ϕ は同型である。

系 1.22 (系 4.1.23). 群 G が集合 X に作用したとき、$x, y \in X$ で $y = gx$ なら $x \sim y$ と定義すると、$\sim$ は X 上の同値関係である。この同値関係による剰余類は X 上の軌道と *1* 対 *1* に対応する。

証明. $\sim$ が同値関係になることを示す。

- **反射律**: 命題 4.1.2 より $y = 1 \cdot x$ は明らか。$G \cdot x = G \cdot x$
- **対称律**: $y = gx$ なら $x = g^{-1}y$。$G \cdot y = G \cdot x$
- **推移律**: $y = gx, z = hy$ から $z = h(gx) = (hg)x$。$G \cdot z = G \cdot x$

よって同値関係は示された。$G \cdot x = G \cdot y$ のとき、$y \in G \cdot x$ であり、'h=g' とすると 'y=gx'。このとき $y \sim x$ より、$h = g^{-1}$ とすれば $x = hy$ なので $y \sim x$ は $x \in G \cdot y$ と同値。したがって y の同値類は $G \cdot x$ と一致する。同じ軌道に属することが同値関係なので、$x \sim G \cdot x$ のとき、x はこの軌道の代表元であるという。また各軌道の代表元を一つずつ集めた集合を軌道への完全代表系という。

命題 1.23 (命題 4.1.24 (軌道・安定化群定理)). G が集合 X に作用する。$x \in X$ であるとき、集合 $G \cdot x$ と G/G_x は対応 $gG_x \mapsto gx$ により *1* 対 *1* に対応する。さらに $|G| < \infty$ なら、これは $|G \cdot x| = |G|/|G_x|$ に等しい。

証明. $g_1, g_2 \in G$ とする。$g_1x = g_2x \iff g_2^{-1}g_1x = x \iff g_2^{-1}g_1 \in G_x \iff g_1 \in g_2G_x$ よって、$g_1G_x = g_2G_x$。$y \in gG_x$、$gy = gx$ となり代表元によらない。よって $\phi(gG_x) = gx$ と定義すれば、$G/G_x \to G \cdot x$ へ well-defined な写像となる。ラグランジュの定理より $|G/G_x| = |G|/|G_x|$。$|G \cdot x| = |G/G_x|$ より従う。

例 1.24 (例 4.1.25 (軌道・安定化群 2)). 群 G が G 自身への左からの積による作用を考える。$g \in G$ なら $g \cdot 1 = g$ より $g \in G \cdot 1$。よって $G = G \cdot 1$。この作用は推移的である。単位元 1 の安定化群は $\{1\}$。

例 1.25 (例 4.1.26 (軌道・安定化群 3)). $G = \mathfrak{S}_n$ への作用を考える。$\sigma = (in)$ なら $\sigma(n) = i$ よりこの作用

は推移的である。n の安定化群は $H=\{\sigma\in\mathfrak{S}_n \mid \sigma(n)=n\}$ よって $Y=\{1,\dots,n-1\}$ への置換を引き起こすので、$G_n\cong\mathfrak{S}_{n-1}$ とみなせる。よって $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-1}$ は $\{1,\dots,n\}$ と 1 対 1 に対応する。（命題 4.1.24 より G/G_n は $G\cdot n$ と 1 対 1 に対応する）

1.4 正規化群・中心化群と共役類

定義 1.26 (定義 4.1.27)**.** H を群 G の部分群とする。

1. $N_G(H)=\{g\in G \mid gHg^{-1}=H\}$
2. $Z_G(H)=\{g\in G \mid \forall h\in H, gh=hg\}$
3. $Z(G)=Z_G(G)$ と定義する。

$N_G(H)$, $Z_G(H)$ をそれぞれ H の**正規化群**、**中心化群**という。また、$Z(G)$ を G の**中心**という。$x\in G$ で $H=\langle x\rangle$ のとき、$Z_G(H)$ の代わりに $Z_G(x)$ とも書き、x の中心化群という。次に $N_G(H), Z_G(H)$ が G の部分群になることを示す。

証明. [部分群の証明] $N_G(H)$ **の証明**
　$1gHg^{-1}=H$ より $g\in N_G(H)$。$g\in N_G(H)$ の時、$g^{-1}\in H$? $g^{-1}(gHg^{-1})g=H$ より逆元について閉じている。$x,y\in N_G(H)$ の時、$H=y^{-1}Hy$、$H=x^{-1}Hx=x^{-1}(y^{-1}Hy)x=(yx)^{-1}H(yx)$ より積について閉じている。よって $N_G(H)$ は部分群。
　$Z_G(H)$ **の証明** $g=1$ のとき $1h=h1$ より $1_G\in Z_G(H)$。$g\in Z_G(H)$ の時、$\forall h\in H, ghg^{-1}=h$ より $h=g^{-1}hg$ となり逆元について閉じている。$x,y\in Z_G(H)$ の時、$\forall h\in H, xhx^{-1}=h$ より $yxhx^{-1}y^{-1}=yhy^{-1}=h$ となり積について閉じている。
　また定義より $Z_G(H)$ は $N_G(H)$ の部分群である。

■ノートによる補足　なお、H が有限群なら、$|gHg^{-1}|=|H|<\infty$ である。よって、$gHg^{-1}\subset H$ なら $gHg^{-1}=H$ である。しかし H が無限集合の時、例えば $G=GL_2(\mathbb{R})$ で、$H=\{n(u)=\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid u\in\mathbb{Z}\}$, $g=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とすると、$gn(u)g^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2u\\ 0 & 1\end{pmatrix}=n(2u)$ より、$gHg^{-1}=\{n(2u) \mid u\in\mathbb{Z}\}\subset H$ だが $g\notin N_G(H)$。$Z_G(H), Z(G)$ の代わりに、$C_G(H), C(G)$ などの記号を使う流儀もある。G がアーベル群なら $Z(G)=G$（定義より明らか）である。なお、$g,x\in G, gxg^{-1}=x$ なら、任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して $(gxg^{-1})^n=gx^ng^{-1}=x^n$。よって、$Z_G(x)=\{g\in G \mid gxg^{-1}=x\}$ である。

定義 1.27 (定義 4.1.28 共役類)**.** 群 G の元 x,y に対し、$g\in G$ があり $y=gxg^{-1}$ となるとき、y は x に**共役**であるという。x と共役である元の集合を x の**共役類**といい、$C(x)$ と書く。y が x に共役であることは、G の G 自身への共役による作用（例 4.1.16）で y が x の軌道にあることを意味する。（$g\cdot x=gxg^{-1}$ と考えればよい。）よって系 4.1.23 より、$x,y\in G$ が共役であるというのは G 上の同値関係であり、共役類はその同値類である。

定義 1.28 (定義 4.1.29)**.** G を有限群とする。

1. $x\in G$ なら、$|C(x)|=[G:Z_G(x)]=|G|/|Z_G(x)|$ である。また $C(x)=\{x\}$ であることと、x が G の中心 $Z(G)$ の元であることは同値である。
2. **(類等式)** 等式 $|G|=\sum|C(x)|$ が成り立つ。ただし、和はすべての共役類を重複なく数えるとする。

証明. 例 4.1.16 で解説した、群 G の G への共役による作用を考える。$x\in G$ に対し、$Ad(g)(x)=x$ であることは $gxg^{-1}=x$ であることと同値である。したがってこの作用に関する安定化群は $Z_G(x)$ であり、また x

の軌道は x の共役類である $\{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ である。したがって命題 4.1.24 より $|C(x)| = [G : Z_G(x)]$ が従う。$C(x) = \{x\}$ はすべての g に対し $gxg^{-1} = x$ であることと同値なので、$x \in Z(G)$ と同値である。G は同値類の直和なので、類等式が従う。

■上の定理による制約　G が有限群なら、類等式に次の制約を受けることがわかる。

1. 類等式の右辺には 1 が少なくとも 1 回現れる。
2. 類等式の右辺に現れる数はすべて $|G|$ の約数。
3. 類等式の右辺に現れる 1 の数は $|G|$ の約数である。
4. (3) は $|C(x)| = 1$ は $x \in Z(G)$ と同値より類等式の 1 の数 $|Z(G)|$ は $|G|$ の約数であることからわかる。

$|C(x)| = 1$ である元の数 $|Z(G)|$ は $|G|$ を分かる。

■類等式の可能性　$C(x) \sim g$ を用いて調べることを自明な考察と呼ぶことにしよう。例えば $|G| = 3$ なら $3 = 1 + 2$ は (4) が成立しないので自明な考察では類等式ではありえない。

例 1.29 (問 4.1.30)**.** G を位数 4 の群とするとき、次の等式の中で、自明な考察により類等式でないことがわかるのはどれか？ (1) 4=1+1+1+1, (2) 4=1+1+2, (3) 4=2+2, (4) 4=1+3, (5) 4=4

証明. (3),(5) は $|Z(G)| = 1$ が現れない。(4) では 3 が 4 の約数でないので類等式ではない。一方で証明は自明な命題 4.4.4 より、位数 4 の群は可換になることがわかる。従って類等式は (1) のみになる。

例 1.30 (例 4.1.31 (共役類))**.** $G = \mathfrak{S}_3$ のとき G への共役による作用を考える。$x = (12)$ とすると、$G_x = Z_G(x)$、x は自分自身と可換なので、$(12) \in Z_G(x)$ である。よって $\langle(12)\rangle \subset Z_G(x)$ である。$|Z_G(x)|$ は $|G| = 6$ の約数なので、$Z_G(x) = \langle(12)\rangle$ または $Z_G(x) = G$ である。$Z_G(x) = G$ なら、x は G のすべての元と可換であるが、(12) は (123) と可換でない。これは矛盾なので、$Z_G(x) = \langle(12)\rangle$ である。よって $|C(x)| = 6/2 = 3$ なので、$C(x) = \{(12), (13), (23)\}$ である。$Z(G) \subset Z_G(x)$ だが、(12) は (123) と可換ではないので、$(12) \notin Z(G)$ より $Z(G) = \{1\}$。