ELE075 - Sistemas Nebulosos
Lista de Exercícios 1

José Geraldo Fernandes
Escola de Engenharia
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, Brasil

I.

A. Involução

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A$$
$$\mu_{\overline{\overline{A}}} = 1 - \mu_{\overline{A}} = 1 - (1 - \mu_A)$$
$$\mu_{\overline{\overline{A}}} = \mu_A$$
$$\overline{\overline{A}} = A$$

B. Absorção

$$\mu_{A\cup(A\cap B)} = max(\mu_A, min(\mu_A, \mu_B))$$

Observando as duas possibilidades:

$$\mu_A = 0 \rightarrow$$
$$min(\mu_A, \mu_B) = \mu_A$$
$$max(\mu_A, min(\mu_A, \mu_B)) = max(\mu_A, \mu_A) = \mu_A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$\mu_A = 1 \rightarrow$$
$$max(\mu_A, min(\mu_A, \mu_B)) = \mu_A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

C. Contradição

$$\mu_{A\cap\overline{A}} = min(\mu_A, \mu_{\overline{A}})$$
$$\mu_{A\cap\overline{A}} = min(\mu_A, 1 - \mu_A)$$
$$\mu_{\emptyset} = 0$$

Observando as duas possibilidades:

$$\mu_A = 0 \rightarrow$$
$$\mu_{A\cap\overline{A}} = min(0, 1) = 0$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$\mu_A = 1 \rightarrow$$
$$\mu_{A\cap\overline{A}} = min(1, 0) = 0$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

D. De Morgan

$$\mu_{\overline{A\cup B}} = 1 - \mu_{A\cup B} = 1 - max(\mu_A, \mu B)$$
$$\mu_{\overline{A}\cap\overline{B}} = min(\mu_{\overline{A}}, \mu_{\overline{B}}) = min(1 - \mu_A, 1 - \mu_B)$$

Como a solução é um conjunto discreto e finito, pode-se comparar as possibilidades com o que se interessa comprovar, portanto tem-se:

μ_A	μ_B	$\mu_{\overline{A\cup B}}$	$\mu_{\overline{A}\cap\overline{B}}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

II.

A. Involução

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A$$
$$\mu_{\overline{\overline{A}}} = 1 - \mu_{\overline{A}} = 1 - (1 - \mu_A)$$
$$\mu_{\overline{\overline{A}}} = \mu_A$$
$$\overline{\overline{A}} = A$$

B. Absorção

$$\mu_{A\cup(A\cap B)} = max(\mu_A, min(\mu_A, \mu_B))$$

Observando as duas possibilidades:

$$\mu_A \leq \mu_B \rightarrow$$
$$min(\mu_A, \mu_B) = \mu_A$$
$$max(\mu_A, min(\mu_A, \mu_B)) = max(\mu_A, \mu_A) = \mu_A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$\mu_A > \mu_B \rightarrow$$
$$max(\mu_A, min(\mu_A, \mu_B)) = \mu_A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

C. Contradição

$$\mu_{A\cap\overline{A}} = min(\mu_A, \mu_{\overline{A}})$$

$$\mu_{A\cap\overline{A}} = min(\mu_A, 1-\mu_A)$$

$$\mu_\emptyset = 0$$

Basta um contra exemplo da forma $\mu_A(x_i) = i \neq 0$ para mostrar a inconsistência, suponha:

$$\mu_A(x_i) = 0.3$$

$$\mu_{A\cap\overline{A}}(x_i) = min(\mu_A(x_i), \mu_{\overline{A}}(x_i)) = 0.3 \neq 0$$

Se a equação não é válida para x_i em especial não pode ser generalizada.

D. De Morgan

$$\mu_{\overline{A\cup B}} = 1 - \mu_{A\cup B} = 1 - max(\mu_A, \mu B)$$

$$\mu_{\overline{A}\cap\overline{B}} = min(\mu_{\overline{A}}, \mu_{\overline{B}}) = min(1-\mu_A, 1-\mu_B)$$

Observando as duas possibilidades:

$$\mu_A \leq \mu_B \rightarrow$$

$$\mu_{\overline{A\cup B}} = 1 - \mu_A$$

$$\mu_{\overline{A}\cap\overline{B}} = 1 - \mu A = \mu_{\overline{A\cup B}}$$

$$\mu A > \mu_B \rightarrow$$

$$\mu_{\overline{A\cup B}} = 1 - \mu_B$$

$$\mu_{\overline{A}\cap\overline{B}} = 1 - \mu B = \mu_{\overline{A\cup B}}$$

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$$

III.

$$N(a) = \frac{1-a}{1+sa}, s \in (-1, -\infty)$$

A. Limite

$$N(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$N(1) = \frac{1-1}{1+s} = 0$$

B. Monotonicidade

$$\frac{1-a}{1+sa} \geq \frac{1-b}{1+sb}$$

Como $a, b \in [0, 1]$, tem-se:

$$1+sa, 1+sb > 0 \rightarrow$$

$$(1-a)(1+sb) \geq (1-b)(1+sa)$$

$$1+sb-a-sab \geq 1+sa-b-sab$$

$$sb-a \geq sa-b$$

$$a+sa \leq b+sb$$

$$a(1+s) \leq b(1+s)$$

$$1+s \neq 0$$

$$a \leq b$$

C. Involução

$$N(N(a)) = \frac{1-\frac{1-a}{1+sa}}{1+s\frac{1-a}{1+sa}}$$

$$N(N(a)) = \frac{\frac{1+sa-1+a}{1+sa}}{\frac{1+sa+s-sa}{1+sa}}$$

$$N(N(a)) = \frac{a(s+1)}{s+1}$$

$$N(N(a)) = a$$

IV.

$$S(a, b) = a+b-ab$$

A. Limite

$$S(0, 0) = 0+0-0 = 0$$

$$S(a, 0) = a+0-0 = a$$

$$S(0, a) = 0+a-0 = a = S(a, 0)$$

B. Monotonicidade

Para $b = c$ tem-se:

$$cd-ab = d(c-a) = b(c-a)$$

Pensando b, c como atenuadores da soma de c, a tem-se os limites:

$$b(c-a) \leq cd-ab \leq d(c-a) \leq c-a$$

$$cd-ab \leq c-a \leq c-a+(d-b)$$

$$cd-ab \leq c+d-(a+b)$$

$$a+b-ab \leq c+d-cd$$

C. Comutatividade

$$S(a,b) = a + b - ab$$

$$S(b,a) = b + a - ba = S(a,b)$$

D. Associatividade

$$S(a, S(b,c)) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)$$

$$S(a, S(b,c)) = a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

$$S(S(a,b), c) = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c$$

$$S(S(a,b), c) = a + b - ab - ac - bc + abc = S(a, S(b,c))$$

V.

$$S(a,b) = min(1, a + b)$$

A. Limite

$$S(0,0) = min(1, 0 + 0) = 0$$

$$S(a,0) = min(1, a + 0) = a$$

$$S(0,a) = min(1, 0 + a) = a = S(a,0)$$

B. Monotonicidade

$$a \leq c$$

$$b \leq d$$

$$a + b \leq c + d$$

$$min(1, a + b) \leq min(1, c + d)$$

$$S(a + b) \leq S(c + d)$$

C. Comutatividade

$$S(a,b) = min(1, a + b)$$

$$S(b,a) = min(1, b + a) = S(a,b)$$

D. Associatividade

$$S(a, S(b,c)) = min(1, a + min(1, b + c))$$

$$S(S(a,b), c) = min(1, min(1, a + b) + c)$$

Observando as possibilidades, 0 e 1 representam verdadeiro e falso:

$b+c>1$	$a+b>1$	$S(a,S(b,c))$	$S(S(a,b),c)$
0	0	$min(1,a+b+c)$	$min(1,a+b+c)$
0	1	$min(1,a+b+c)=1$	$min(1,1+c)=1$
1	0	$min(1,a+1)=1$	$min(1,a+b+c)=1$
1	1	$min(1,a+1)=1$	$min(1,1+c)=1$

Note que nos casos em que há divergência o resultado é o mesmo já que $a + b + c > 1$.

$$S(S(a,b), c) = S(a, S(b,c))$$

VI.

$$T(a,b) = ab$$

A. Limite

$$T(0,0) = 0 * 0 = 0$$

$$T(a,1) = a * 1 = a$$

$$T(1,a) = 1 * a = a = T(a,1)$$

B. Monotonicidade

$$a \leq c$$

$$b \leq d$$

$$ab \leq cb \leq cd$$

$$T(a,b) \leq T(c,d)$$

C. Comutatividade

$$T(a,b) = ab$$

$$T(b,a) = ba = T(a,b)$$

D. Associatividade

$$T(a, T(b,c)) = T(a, bc) = abc$$

$$T(T(a,b), c) = T(ab, c) = abc = T(a, T(b,c))$$

VII.

$$T(a,b) = max(0, a + b - 1)$$

A. *Limite*

$$T(0,0) = max(0, 0 + 0 - 1) = 0$$
$$T(a,1) = max(0, a + 1 - 1) = a$$
$$T(1,a) = max(0, 1 + a - 1) = a = T(a,1)$$

B. *Monotonicidade*

$$a \leq c$$
$$b \leq d$$
$$a + b \leq c + d$$
$$max(0, a + b - 1) \leq max(0, c + d - 1)$$
$$T(a + b) \leq T(c + d)$$

C. *Comutatividade*

$$T(a,b) = max(0, a + b - 1)$$
$$T(b,a) = max(0, b + a - 1) = T(a,b)$$

D. *Associatividade*

$$T(a, T(b,c)) = max(0, a + max(0, b + c - 1) - 1)$$
$$T(T(a,b), c) = max(0, max(0, a + b - 1) + c - 1)$$

Observando as possibilidades, 0 e 1 representam verdadeiro e falso:

$$(i)(b + c > 1, a + b > 1) = (0,0) \rightarrow$$
$$T(a, T(b,c)) = max(0, a - 1) = 0$$
$$T(T(a,b), c) = max(0, c - 1) = 0 = T(a, T(b,c))$$

$$(ii)(b + c > 1, a + b > 1) = (0,1) \rightarrow$$
$$T(a, T(b,c)) = max(0, a - 1) = 0$$
$$T(T(a,b), c) = max(0, a + b + c - 2)$$
$$b + c < 1 > a$$

Em especial:

$$b + c + a < 1 + 1$$
$$b + c + a - 2 < 0$$
$$T(T(a,b), c) = max(0, a + b + c - 2) = 0 = T(a, T(b,c))$$

$$(iii)(b + c > 1, a + b > 1) = (1,0) \rightarrow$$
$$T(a, T(b,c)) = max(0, a + b + c - 2)$$
$$T(T(a,b), c) = max(0, c - 1) = 0$$

Analogamente:

$$a + b < 1 > c$$
$$a + b + c < 1 + 1$$
$$a + b + c - 2 < 0$$
$$T(a, T(b,c)) = max(0, a + b + c - 2) = 0 = T(a, T(b,c))$$

$$(iv)(b + c > 1, a + b > 1) = (1,1) \rightarrow$$
$$T(a, T(b,c)) = max(0, a + b + c - 2)$$
$$T(T(a,b), c) = max(0, a + b + c - 2) = T(a, T(b,c))$$

VIII.

$$T(a,b) = ab$$
$$N(a) = 1 - a$$
$$S(a,b) = a + b - ab$$

$$N(S(N(a), N(b))) = N(S(1 - a, 1 - b))$$
$$N(S(N(a), N(b))) = N((1 - a) + (1 - b) - (1 - a)(1 - b))$$
$$N(S(N(a), N(b))) = N(1 - a + 1 - b - (1 - a - b + ab))$$
$$N(S(N(a), N(b))) = N(1 - ab)$$
$$N(S(N(a), N(b))) = 1 - (1 - ab) = ab = T(a,b)$$