

# EEE910 - Otimização Multiobjetivo

## Trabalho Computacional

José Geraldo Fernandes  
Escola de Engenharia  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, Brasil

Todo o código do trabalho foi desenvolvido em repositório Git.

### I. FORMULAÇÃO

O problema de gerenciamento ótimo da política de manutenção pode ser modelado com uma saída inteira, como na Equação 1. As funções  $M, F$  modelam o custo de manutenção total e o esperado por falha. As soluções  $x_i$  definem o plano de manutenção, nenhuma, intermediária e detalhada, adotado por cada máquina  $i$ .

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}) &= [M(\mathbf{x}), F(\mathbf{x})]^T \\ x_i &\in \{1, 2, 3\} \\ M(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N x_i - 1 \\ F(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N p(x_i) f_i \end{aligned} \quad (1)$$

O custo esperado por falha depende do custo de cada máquina  $f_i$  e da probabilidade  $p(x_i)$  que também é função da solução, como na Equação 2. Esse custo é inteiramente definido pelas constantes  $t_0, \Delta t, \eta, \beta$ , apenas a variável  $k$  depende da solução na forma da Equação 3.

$$p(x_i) = \frac{w(t_0 + k\Delta t) - w(t_0)}{1 - w(t_0)} \quad (2)$$

$$w(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right]$$

$$k(x_i) = \frac{-x_i + 5}{2} \quad (3)$$

### II. ALGORITMO

Como as funções objetivo parecem monotônicas e contraditórias uma solução intuitiva consegue justificar uma heurística útil. Aplicar manutenção em equipamentos caros e antigos, maior probabilidade de falha.

Para isso, basta ordenar os itens em ordem de importância, custo esperado de falha total em caso de nenhuma manutenção, e decidir o tamanho dos subconjuntos para cada reparo. A Figura 1 mostra a silhueta dessa métrica de importância.

Uma primeira solução inicial, para simplificar o problema, é considerar apenas as políticas extremas  $x_i \in \{1, 3\}$ . Os

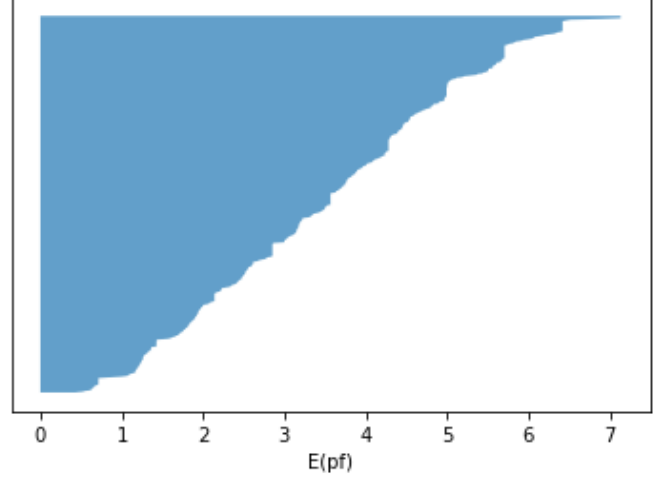


Figura 1. Silhueta do custo esperado por falha total dado nenhuma manutenção.

subconjuntos são definidos por uma constante  $\alpha \in [0, 1]$  que representa o percentual de aplicação de um tipo de política.

Como as soluções são dependentes apenas de um número real, basta escolher um tamanho de passo  $\delta$  e buscar em *grid* avaliando as funções objetivo.

Para buscar todas as soluções, que incluem manutenção intermediária, resta criar uma nova variável real  $\gamma$  com a mesma natureza.

Com essa heurística, o problema de otimização é definido como na Equação 4 mas com custo computacional quadrático.

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \gamma} \mathcal{L} &= [M, F]^T \\ \alpha, \gamma &\in [0, 1] \\ \alpha + \gamma &\leq 1 \end{aligned} \quad (4)$$

### III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Aplicou-se os dois algoritmos, chama-se *naive* o método com uma variável e composto o completo. Avaliou-se o índice de qualidade hipervolume (HV) e o número de soluções encontradas antes e depois da filtragem de solução dominadas,  $n^*$  e  $n$ . O tamanho do passo para variação foi de  $\delta = 1E - 2$ . A Tabela I mostra os resultados obtidos.

Tabela I  
RESULTADOS DE DESEMPENHO COM A HEURÍSTICA.

Método	HV	$n$	$n^*$
naive	0.620407	100	100
composto	0.622683	208	5044

Nota-se pelo índice de qualidade que o desempenho alcançou a demanda mesmo com uma estratégia de solução simples e intuitiva. Note também o número de soluções geradas pelo método. Enquanto o *naive* não gera soluções dominadas, o composto parece bastante ineficiente.

Mediu-se a evolução dessa geração para diferentes tamanhos de passo. As Figuras 2 e 3 mostram os resultados para o métodos *naive* e composto. De fato, o número de soluções não dominadas não acompanha o crescimento quadrático do método composto.

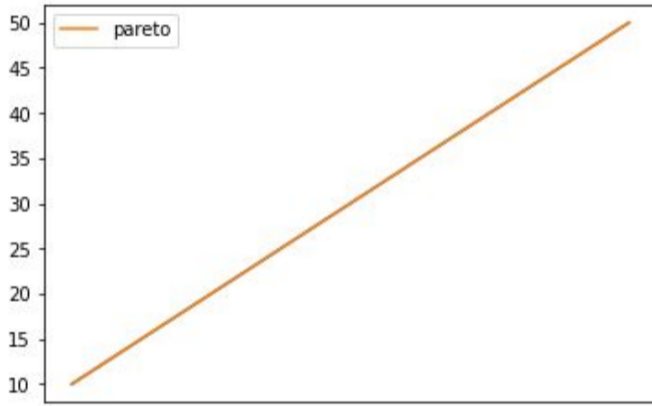


Figura 2. Número de soluções geradas, em azul, e filtradas, em laranja, para a heurística *naive*.

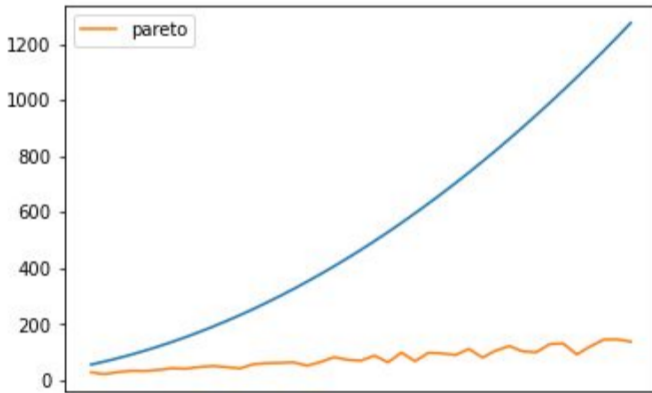


Figura 3. Número de soluções geradas, em azul, e filtradas, em laranja, para a heurística composta.

Finalmente, as Figuras 4 e 5 mostram o Pareto encontrado para as duas heurísticas, *naive* e composto. Apesar de mais

soluções, pouca diferença é notada no *plot* por *naive*.

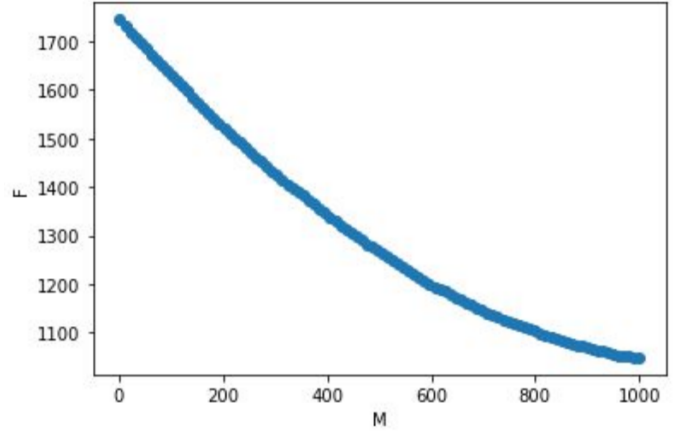


Figura 4. Pareto encontrado para a heurística *naive*.

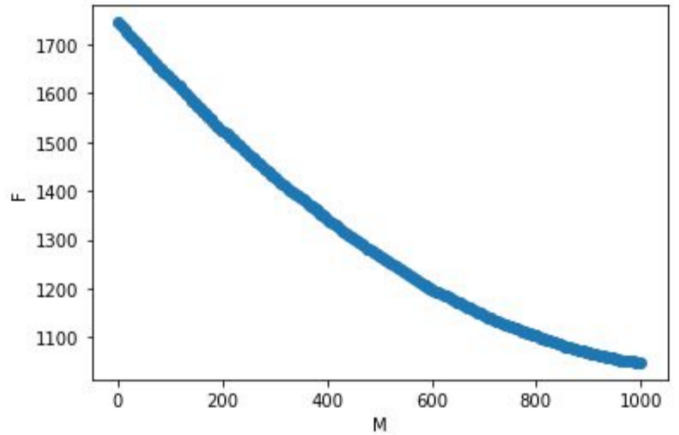


Figura 5. Pareto encontrado para a heurística composta.

#### IV. DECISÃO

Para tomada de decisão minimizou-se um funcional simples da soma ponderada. Como ambas funções objetivo são custos pareceu-se natural operar dessa forma.

O funcional  $U$  adotado é como na Equação 5. O parâmetro real  $\tau > 1$  é um fator de prioridade dado ao custo de manutenção por falha por um raciocínio contextual. Apesar da função  $F$  precificar a ocorrência de falha em várias dimensões, presumivelmente, alguns fatores comuns são dificilmente modelados. Um exemplo mais claro é acidentes de trabalho, é razoável admitir que está fenômeno está ligado com a falha de equipamentos e são polarizados em baixa probabilidade de ocorrência e alto custo. Enquanto isso, o custo de manutenção  $M$  é facilmente modelado, justificando, em conjunto, a prioridade.

$$U(x) = M(x) + \tau F(x) \quad (5)$$

Escolheu-se, arbitrariamente,  $\tau = 1.25$  e encontrou-se a solução  $(\alpha, \gamma) = (0.574, 0)$ .

O resultado nulo da variável  $\gamma$  foi uma surpresa e era consistente com diversas escolhas de  $\tau$ , independente da arbitrariedade.

Para investigar esse fenômeno verificou-se a densidade das políticas nas soluções do pareto na heurística composto. As Figuras 6 e 7 mostram o histograma antes e após filtragem de solução dominadas.

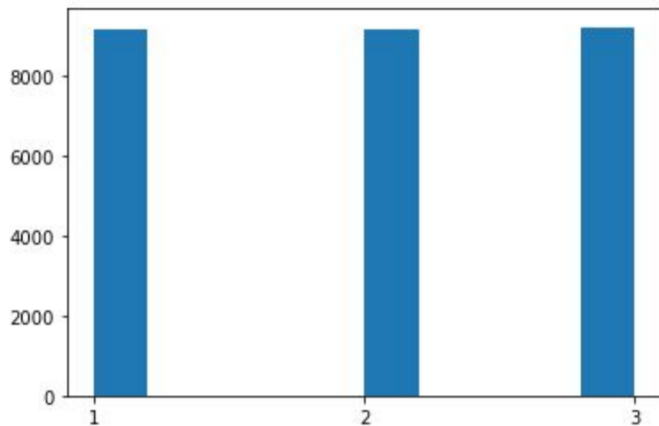


Figura 6. Histograma das políticas em todas as soluções geradas.

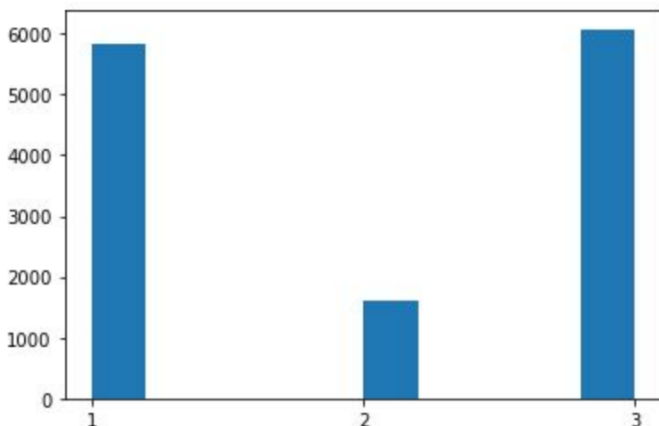


Figura 7. Histograma das políticas apenas em soluções não dominadas.

De fato, mesmo a heurística encontrando soluções com adoção de manutenção intermediária sua concentração é muito baixa em soluções no pareto.

Apesar dessa característica colocar em dúvida a aplicação da heurística, se essa negligencia soluções com natureza determinada, pode ser, também, apenas uma característica do problema, facilmente moldado nas constantes. Um estudo informal indica a segunda hipótese.

Um último ponto relevante é que esse fenômeno explicita ainda mais que a heurística *naive* é suficiente, ou até preferível,

na solução do problema. Já que: tem o custo computacional mais baixo, linear; eficiência na geração de soluções; e, a política de manutenção intermediária ser pouco inteligente.