

# Адаптивный рандомизированный алгоритм выделения сообществ в графах

Тимофей Проданов

Санкт-Петербургский государственный университет  
Кафедра информатики

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Граничин О. Н.  
Рецензент: Ерофеева В. А.

Санкт-Петербург  
2015

# Выделение сообществ в графах

Рассматриваются только невзвешенные неориентированные графы. **Сообщества** — тесно связанные группы узлов в графах. **Разбиение** на сообщества — разбиение множества узлов графа.

# Выделение сообществ в графах

Рассматриваются только невзвешенные неориентированные графы. **Сообщества** — тесно связанные группы узлов в графах. **Разбиение** на сообщества — разбиение множества узлов графа.

Целевая функция **модулярность**:

$$Q(G, P) = \sum_{i \in 1..K} (e_{ii} - a_i^2),$$

где

- $G$  — граф
- $P$  — разбиение на сообщества
- $K$  — количество сообществ
- $e$  — нормированная матрица смежности сообществ
- $a$  — вектор нормированных степеней сообществ

Задача выделения сообществ соответствует задаче максимизации модулярности.

Рандомизированный жадный алгоритм  $RG_k$ :

- Каждую итерацию рассматриваются  $k$  случайных сообществ
- У каждого из  $k$  сообществ исследуются все соседи
- Соединяется лучшая пара соседей

Рандомизированный жадный алгоритм  $RG_k$ :

- Каждую итерацию рассматриваются  $k$  случайных сообществ
- У каждого из  $k$  сообществ исследуются все соседи
- Соединяется лучшая пара соседей

Схема кластеризации основных групп графа  $CGGC$ :

1.  $s$  **начальных алгоритмов** создают множество разбиений на сообщества  $S$
2. Создаётся разбиение  $\tilde{P}$  — максимальное перекрытие  $S$
3. **Финальный алгоритм** выделяет сообщества на основе разбиения  $\tilde{P}$

Рандомизированный жадный алгоритм  $RG_k$ :

- Каждую итерацию рассматриваются  $k$  случайных сообществ
- У каждого из  $k$  сообществ исследуются все соседи
- Соединяется лучшая пара соседей

Схема кластеризации основных групп графа  $CGGC$ :

1.  $s$  **начальных алгоритмов** создают множество разбиений на сообщества  $S$
2. Создаётся разбиение  $\tilde{P}$  — максимальное перекрытие  $S$
3. **Финальный алгоритм** выделяет сообщества на основе разбиения  $\tilde{P}$

Итеративная схема  $CGGC_i$  повторяет шаги 1 и 2, пока это увеличивает модулярность.

В качестве **начальных** и **финального** алгоритмов можно использовать  $RG_k$ .

Одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация  
*SPSA*: На каждой итерации алгоритма

1. Выбирается **вектор возмущения**  $\Delta_n$ , каждая координата которого равна 1 или  $-1$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$
2. Рассчитываются новые аргументы функционала  
 $\theta_n^- \leftarrow \hat{\theta}_{n-1} - d\Delta_n$ ,  $\theta_n^+ \leftarrow \hat{\theta}_{n-1} + d\Delta_n$
3. Вычисляются значения функционала  
 $y_n^- \leftarrow f(\theta_n^-)$ ,  $y_n^+ \leftarrow f(\theta_n^+)$
4. Вычисляется следующая **оценка**  $\hat{\theta}_n \leftarrow \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Delta_n \frac{y_n^+ - y_n^-}{2d}$

Одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация *SPSA*: На каждой итерации алгоритма

1. Выбирается **вектор возмущения**  $\Delta_n$ , каждая координата которого равна 1 или  $-1$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$
2. Рассчитываются новые аргументы функционала  
 $\theta_n^- \leftarrow \hat{\theta}_{n-1} - d\Delta_n$ ,  $\theta_n^+ \leftarrow \hat{\theta}_{n-1} + d\Delta_n$
3. Вычисляются значения функционала  
 $y_n^- \leftarrow f(\theta_n^-)$ ,  $y_n^+ \leftarrow f(\theta_n^+)$
4. Вычисляется следующая **оценка**  $\hat{\theta}_n \leftarrow \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Delta_n \frac{y_n^+ - y_n^-}{2d}$

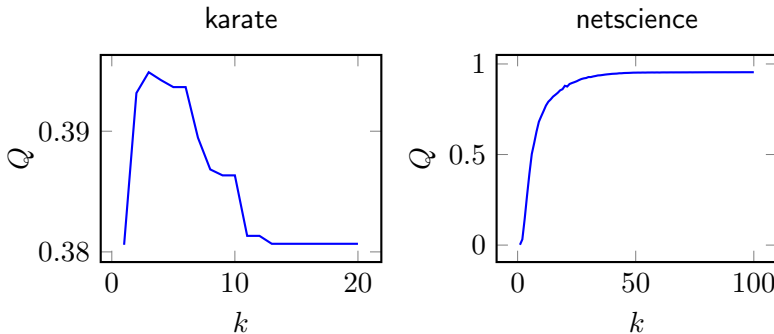
От выбора параметров  $RG_k$  и  $CGGC$  зависит качество их работы.

Остаётся открытым вопрос об адаптивных версиях алгоритмов, работоспособных на большем количестве задач.

В работе рассматривается применение алгоритма *SPSA* к  $RG$  и  $CGGC$  для решения этого вопроса.



Применимость *SPSA* обоснована теоретически для выпуклой усреднённой функции качества. Зависимость модулярности от параметра  $k$  в работе  $RG_k$  выглядит так:



Время растёт линейно от  $k$ , поэтому можно использовать функцию качества  $f(Q, k) = -\alpha(\ln Q - \beta \ln k)$

Предлагается адаптивный рандомизированный жадный алгоритм  $ARG$ . Два его последовательных шага при текущей оценке  $\hat{k}_{n-1}$  выглядят следующих образом:

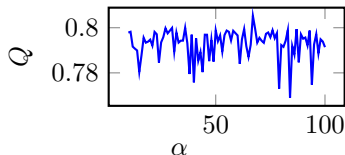
1. Вычисляются аргументы функционала  
 $k_n^- \leftarrow \max\{\hat{k}_{n-1} - d, 1\}$  и  $k_n^+ \leftarrow \hat{k}_{n-1} + d$
2. Выполняется  $\sigma$  итераций  $RG_k$  с параметром  $k = k_n^-$ ,  
медиана прироста модулярности равна  $\mu_n^-$
3. Выполняется  $\sigma$  итераций  $RG_k$  с параметром  $k = k_n^+$ ,  
медиана прироста модулярности равна  $\mu_n^+$
4. Вычисляются значения функционала  
 $y_n^- \leftarrow -\alpha(\ln \mu_n^- - \beta \ln k_n^-)$ ,  $y_n^+ \leftarrow -\alpha(\ln \mu_n^+ - \beta \ln k_n^+)$
5. Подсчитывается следующая оценка

$$\hat{k}_n \leftarrow \max \left\{ 1, \left[ \hat{k}_{n-1} - \frac{y_n^+ - y_n^-}{k_n^+ - k_n^-} \right] \right\}$$

# Параметры $ARG$

$ARG$  имеет пять параметров:

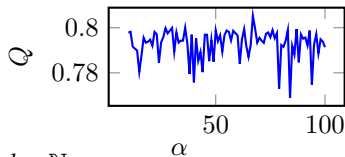
- $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



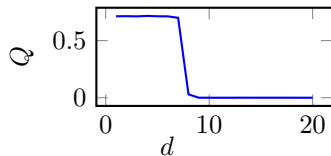
# Параметры ARG

ARG имеет пять параметров:

- $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



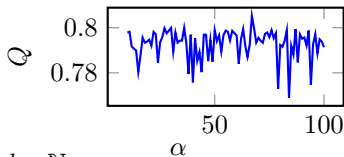
- $d \in \mathbb{N}$



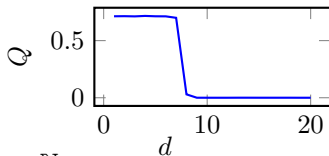
# Параметры ARG

ARG имеет пять параметров:

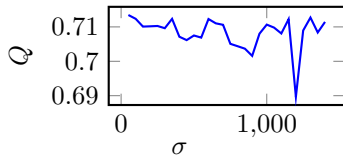
- $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



- $d \in \mathbb{N}$



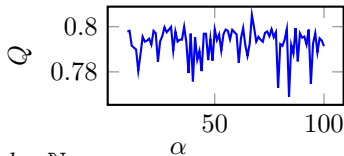
- $\sigma \in \mathbb{N}$



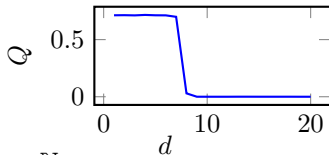
# Параметры ARG

ARG имеет пять параметров:

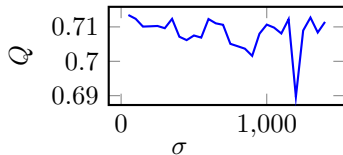
- $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



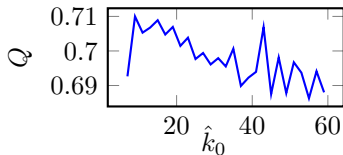
- $d \in \mathbb{N}$



- $\sigma \in \mathbb{N}$



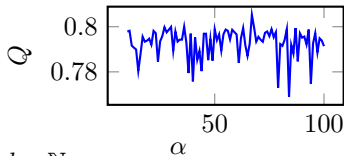
- $\hat{k}_0 \in \mathbb{N}$



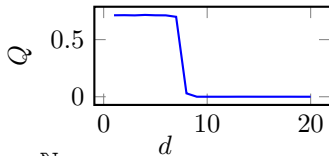
# Параметры ARG

ARG имеет пять параметров:

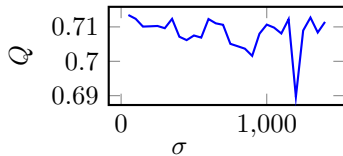
- $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



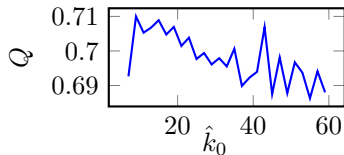
- $d \in \mathbb{N}$



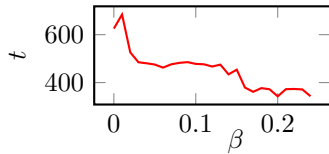
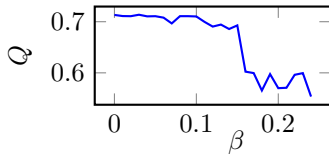
- $\sigma \in \mathbb{N}$

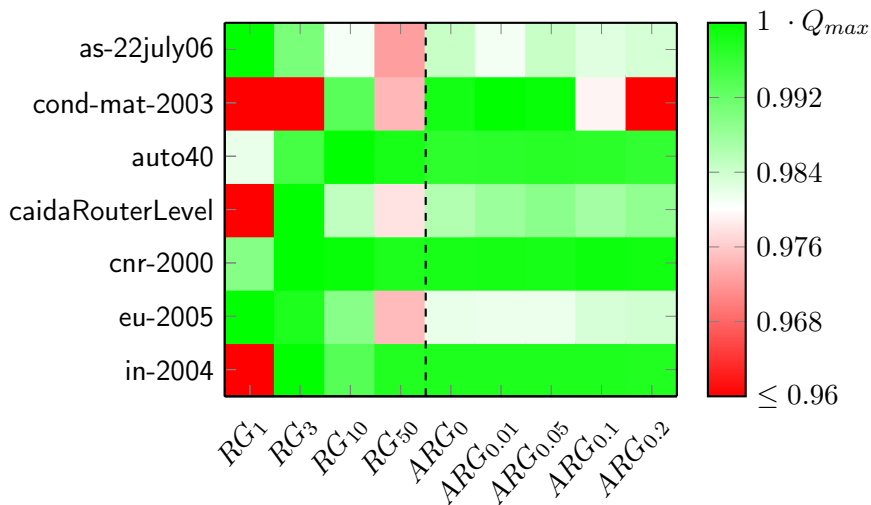


- $\hat{k}_0 \in \mathbb{N}$



- $\beta \geq 0 \in \mathbb{R}$







Если начальные алгоритмы дают плохой результат в схеме *CGGC*, то и окончательный результат будет плохим. По модулярности одного разбиения нельзя сказать, хорошее разбиение или плохое. Запускать  $RG_k$  с разными параметрами для проверки качества разбиения не выгодно. Поэтому имеет смысл запускать более стабильный *ARG*.

**Таблица:** Модулярность разбиений, полученных в результате работы *CGGC* с начальным алгоритмом  $A_{init}$  и финальным алгоритмом  $A_{final}$  на трёх графах

$A_{init}$ $A_{final}$	$RG_3$		$RG_{10}$		$ARG$	
	$RG_3$	$RG_{10}$	$RG_3$	$RG_{10}$	$RG_3$	$RG_{10}$
$G_1$	0.16840	0.71155	0.44934	0.74794	0.42708	0.74872
$G_2$	0.80628	0.80645	0.80633	0.80645	0.80628	0.80647
$G_3$	0.84078	0.85372	0.84031	0.84448	0.83671	0.85279

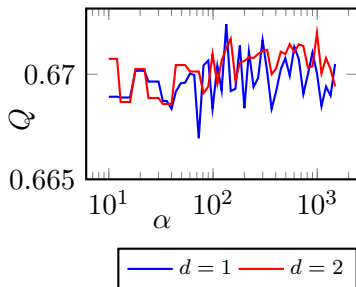
Схема *ACGGC*:

1.  $n \leftarrow n + 1$
2. Вычисляются аргументы функционала  
 $k_n^- \leftarrow \max\{1, \hat{k}_{n-1} - d\}$  и  $k_n^+ \leftarrow \hat{k}_{n-1} + d$
3.  $RG_{k_n^-}$  и  $RG_{k_n^+}$  создают разбиения  $P_n^-$  и  $P_n^+$ , они записываются в множество  $S$ , их модулярности  $Q_n^-$  и  $Q_n^+$
4. Вычисляются значения функционала  
 $y_n^- \leftarrow f(Q_n^-, k_n^-)$ ,  $y_n^+ \leftarrow f(Q_n^+, k_n^+)$
5. Рассчитывается следующая оценка:

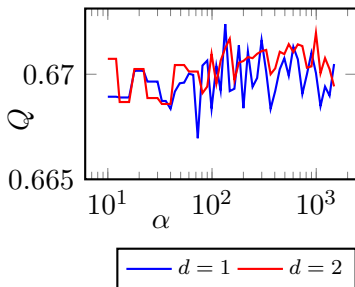
$$\hat{k}_n \leftarrow \max \left\{ 1, \left[ \hat{k}_{n-1} - \frac{y_n^+ - y_n^-}{k_n^+ - k_n^-} \right] \right\}$$

6. При  $n \neq l$  — переход на 1 шаг, иначе переход на 7 шаг
7. В зависимости от  $r \in (0, 1]$  выбирается несколько хороших разбиений из  $S$ , которые формируют максимальное перекрытие  $\tilde{P}$
8. Финальный алгоритм выделяет сообщества на основе  $\tilde{P}$

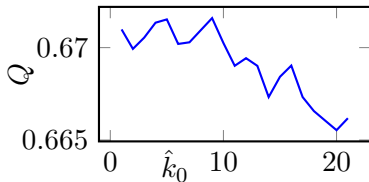
- $d \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



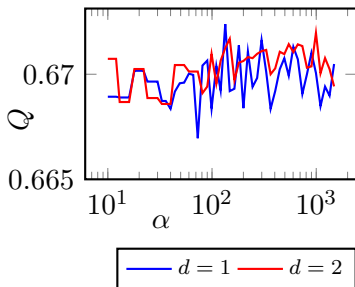
- $d \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



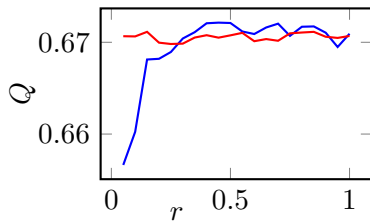
- $\hat{k}_0 \in \mathbb{N}$



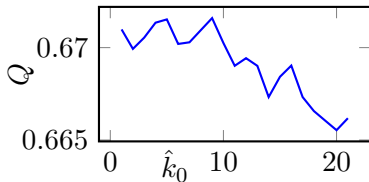
- $d \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



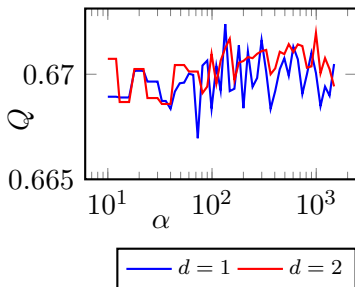
- $r \in (0, 1]$



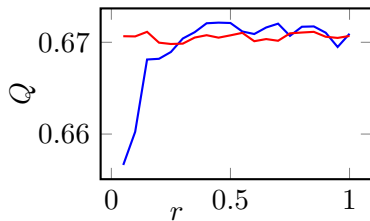
- $\hat{k}_0 \in \mathbb{N}$



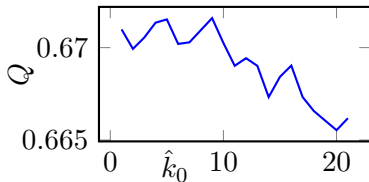
- $d \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$



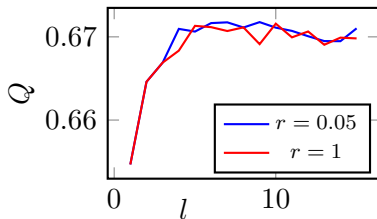
- $r \in (0, 1]$



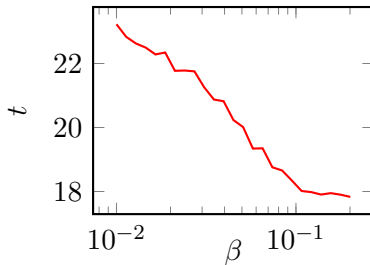
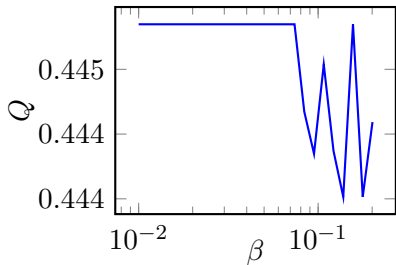
- $\hat{k}_0 \in \mathbb{N}$



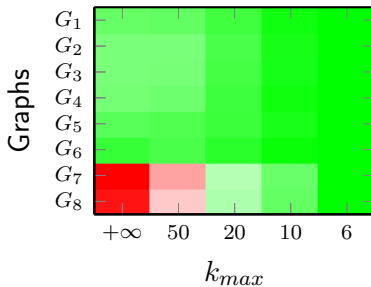
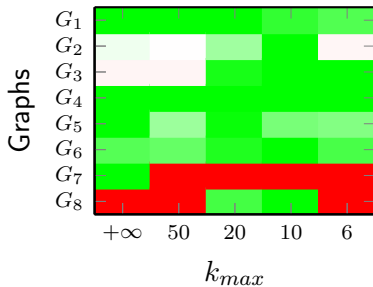
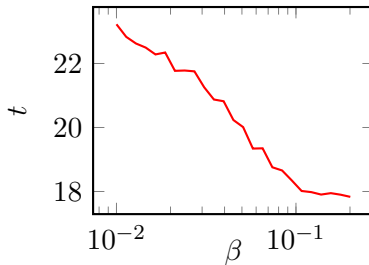
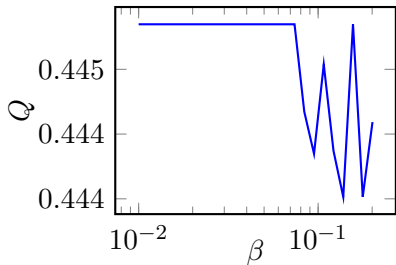
- $l \in \mathbb{N}$



Два механизма снижения времени работы:



Два механизма снижения времени работы:





**Таблица:** Модулярность разбиений, полученных ACGGC и CGGC на тестовых графах

	<i>ACGGC<sup>I</sup></i>	<i>ACGGC<sup>II</sup></i>	<i>CGGC<sup>10</sup><sub>10</sub></i>	<i>CGGC<sup>10</sup><sub>3</sub></i>	<i>CGGC<sup>3</sup><sub>10</sub></i>
karate	0.417242	0.417406	0.415598	0.396532	0.405243
dolphins	0.524109	0.523338	0.521399	0.523338	0.522428
chesapeake	0.262439	0.262439	0.262439	0.262439	0.262370
adjnoun	0.299704	0.299197	0.295015	0.292703	0.290638
polbooks	0.527237	0.527237	0.527237	0.526938	0.526784
football	0.603324	0.604266	0.604266	0.599537	0.599026
celegans	0.439604	0.438584	0.435819	0.436066	0.432261
jazz	0.444739	0.444848	0.444871	0.444206	0.444206
netscience	0.907229	0.835267	0.724015	0.708812	0.331957
email	0.573333	0.573409	0.571018	0.572667	0.567423
polblogs	0.424107	0.423208	0.422901	0.421361	0.390395
pgpGiantCompo	0.883115	0.883085	0.882237	0.882532	0.880340
as-22july06	0.671249	0.670677	0.666766	0.669847	0.665260
cond-mat-2003	0.744533	0.750367	0.751109	0.708775	0.413719
caidaRouterLevel	0.846312	0.855651	0.851622	0.858955	0.843835
cnr-2000	0.912762	0.912783	0.912500	0.912777	0.912496
eu-2005	0.938292	0.936984	0.935510	0.936515	0.936420
in-2004	0.979844	0.979771	0.979883		

**Таблица:** Модулярность работы четырёх итеративных алгоритмов на небольших тестовых графах

	$ACGGCi^I$	$ACGGCi^{II}$	$CGGCi$	combined
karate	0.417242	0.417406	0.417242	0.417242
dolphins	0.525869	0.525869	0.525869	0.525869
chesapeake	0.262439	0.262439	0.262439	0.262439
adjnoun	0.303731	0.303504	0.303571	0.303970
polbooks	0.527237	0.527237	0.527237	0.527237
football	0.604266	0.604407	0.604429	0.604407
celegans	0.446964	0.446836	0.445442	0.447234
jazz	0.444871	0.444871	0.444871	0.444871
netscience	0.908845	0.888422	0.725781	0.907443
email	0.576778	0.577000	0.576749	0.577110
polblogs	0.424025	0.422920	0.423281	0.423996

В рамках работы

- Проанализированы современные методы выделения сообществ
- Предложен алгоритм  $ARG$ , дающий более стабильные результаты, чем  $RG$
- Описано возможное применение  $ARG$
- Представлены схемы  $ACGGC$  и  $ACGGCi$ , показывающие более хорошие и стабильные результаты, чем  $CGGC$  и  $CGGCi$
- Описан механизм снижения времени работы  $ACGGC$

Вопросы?