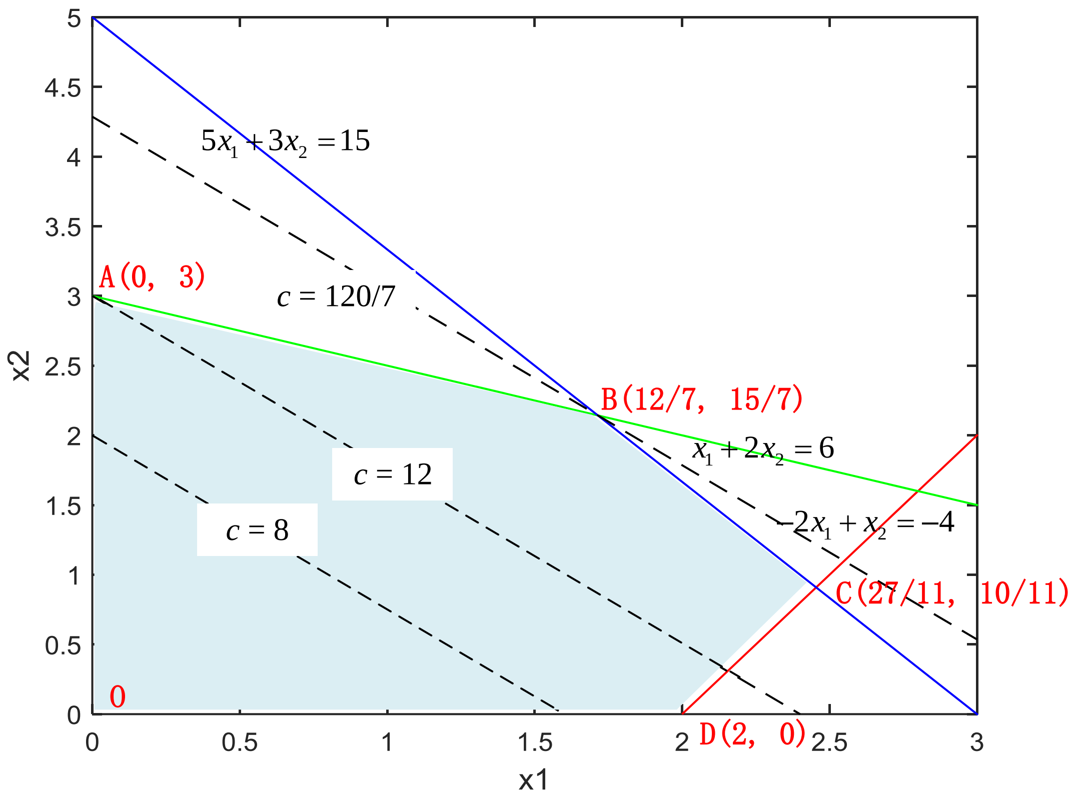
一、对该规划用图示法、基本可行解、单纯形方法、整数规划来求解。

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ s.t. \quad & -2x_1 + x_2 \ge -4 \\ & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

1、图示法

1）该规划的可行域 D 如下图所示，为下图中的凸多边形 OABCDO（淡蓝色区域）。



2）再以 c 为参数画出目标函数 $5x_1+4x_2=c$ 的等值线。目标函数 c 的值逐渐增加，等值线沿着目标函数的梯度方向平行移动。当移动到 B 点时，再移动就与可行域 D 不相交了，所以顶点 B 就是最优点，最优值为 120/7.

2、基本可行解

令

$$x_3=-2x_1+x_2+4$$

$$x_4=6-x_1-2x_2$$

$$x_5=15-5x_1-3x_2$$

则该题中线性规划的标准型为

$$\begin{aligned}
\min\quad & -5x_1-4x_2 \\
s.t.\quad & -2x_1+x_2-x_3=-4 \\
& x_1+2x_2+x_4=6 \\
& 5x_1+3x_2+x_5=15 \\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0
\end{aligned}$$

该线性规划有 5 个变量，3 个约束，因此最多有 10 个基解,如下所示：

(p_1, p_2, p_3)	(12/7, 15/7, 19/7, 0, 0)	非退化
(p_1, p_2, p_4)	(27/11, 10/11, 0, 19/11, 0)	非退化
(p_1, p_2, p_5)	(14/5, 8/5, 0, 0, -19/5)	不可行
(p_1, p_3, p_4)	(3, 0, -2, 3, 0)	不可行
(p_1, p_3, p_5)	(6, 0, -8, 0, -15)	不可行
(p_1, p_4, p_5)	(2, 0, 0, 4, 5)	非退化
(p_2, p_3, p_4)	(0, 5, 9, -4, 0)	不可行
(p_2, p_3, p_5)	(0, 3, 7, 0, 6)	非退化
(p_2, p_4, p_5)	(0, -4, 0, 14, 27)	不可行
(p_3, p_4, p_5)	(0, 0, 4, 6, 15)	非退化

因此，非退化的基本可行解共有 5 组（见上述红色字体），分别

代入目标函数中，得到最优解为(12/7, 15/7, 19/7, 0, 0)，最优值为-120/7，则原规划中的最大值为 120/7.

3、单纯形方法

1）以 x_3, x_4, x_5 为基变量，得到基可行解为（0, 0, 4, 6, 15）；

2）x_1 的价格系数为-5，x_2 的价格系数为-4，因此先增加 x_1；

3）x_1 的最大取值为 min(2, 6, 3) = 2，此时 $x_3 = 0$，则 x_3 “出基”；

4）根据 $-2x_1 + x_2 - x_3 = -4$，将原线性规划改写如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & -6.5x_2 + 2.5x_3 - 10 \\ s.t. \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ & 2.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 = 4 \\ & 5.5x_2 - 2.5x_3 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

此时基变量为 x_1, x_4, x_5，基可行解为（2, 0, 0, 4, 5）；

5）由于 x_2 的价格系数为负，再增加 x_2，x_2 的最大取值为 min(1.6, 10/11) = 10/11，此时 $x_5 = 0$，则 x_5 “出基”；

6）x_3, x_5 为非基变量，将原规划改写为：

$$\begin{aligned} \min \quad & -\frac{5}{11}x_3 + \frac{13}{11}x_5 - \frac{175}{11} \\ s.t. \quad & -2x_1 - \frac{6}{11}x_3 - \frac{2}{11}x_5 = -\frac{54}{11} \\ & \frac{7}{11}x_3 + x_4 - \frac{5}{11}x_5 = \frac{19}{11} \\ & 5.5x_2 - 2.5x_3 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

此时基变量为 x_1, x_2, x_4，基可行解为（27/11, 10/11, 0, 19/11, 0）；

7）x_3 可取的最大值为 min(9, 19/7) = 19/7，此时 $x_4 = 0$，则 x_4 “出基，基变量为 x_1, x_2, x_3，对应的线性规划转化为：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \frac{5}{7}x_4+\frac{6}{7}x_5-\frac{120}{7} \\
s.t.\quad & -2x_1+\frac{6}{7}x_4-\frac{4}{7}x_5=-\frac{24}{7} \\
& \frac{7}{11}x_3+x_4-\frac{5}{11}x_5=\frac{19}{11} \\
& x_2+\frac{5}{7}x_4-\frac{1}{7}x_5=\frac{15}{7} \\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0
\end{aligned}
$$

此时，目标函数中的非基变量的系数为正，因此目标函数的取值不能再减少，则最优解为(12/7, 15/7, 19/7, 0, 0)，最优值为-120/7，那么原规划中的最大值为 120/7.

4、整数规划方法

根据上述方法，若不考虑整数约束，该规划的最优解为(12/7, 15/7)，最优值为 120/7。

采用分支定界法。x_1, x_2 都不是整数，不妨先从 x_1 进行分枝，构造以下两个线性规划问题：

P1:
$$
\begin{aligned}
\max\quad & 5x_1+4x_2 \\
s.t.\quad & -2x_1+x_2\ge -4 \\
& x_1+2x_2\le 6 \\
& 5x_1+3x_2\le 15 \\
& x_1\le 1 \\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

P2:
$$
\begin{aligned}
\max\quad & 5x_1+4x_2 \\
s.t.\quad & -2x_1+x_2\ge -4 \\
& x_1+2x_2\le 6 \\
& 5x_1+3x_2\le 15 \\
& x_1\ge 2 \\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

分别解这两个线性规划问题，得到 P1 最优解为（1, 2.5），最优值为 15，P2 最优解为（2, 5/3），最优值为 50/3，P2 的最优值较大，因此再将 P2 划分为两个子问题：

P3:
$$\begin{aligned}\max\quad & 5x_1+4x_2\\ s.t.\quad & -2x_1+x_2\ge -4\\ & x_1+2x_2\le 6\\ & 5x_1+3x_2\le 15\\ & x_1\ge 2\\ & x_2\le 1\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

P4:
$$\begin{aligned}\max\quad & 5x_1+4x_2\\ s.t.\quad & -2x_1+x_2\ge -4\\ & x_1+2x_2\le 6\\ & 5x_1+3x_2\le 15\\ & x_1\ge 2\\ & x_2\ge 2\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

P3 的最优解为（2.4, 1），最优值为 16，因此 P1 不必再分解，P4 无可行解，舍弃。因此，再将 P3 划分为两个子问题：

P5：
$$\begin{aligned}\max\quad & 5x_1+4x_2\\ s.t.\quad & -2x_1+x_2\ge -4\\ & x_1+2x_2\le 6\\ & 5x_1+3x_2\le 15\\ & x_1\ge 2\\ & x_2\le 1\\ & x_1\le 2\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

P6：
$$\begin{aligned}\max\quad & 5x_1+4x_2\\ s.t.\quad & -2x_1+x_2\ge -4\\ & x_1+2x_2\le 6\\ & 5x_1+3x_2\le 15\\ & x_1\ge 2\\ & x_2\le 1\\ & x_1\ge 3\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

P5 的最优解为（2, 1），最优值为 14，P6 无可行解，舍弃，因此，该规划的最优整数解为（2, 1），最优值为 14.

二、举生活中例子，构建一个约束问题并以上述 4 种方面求解。

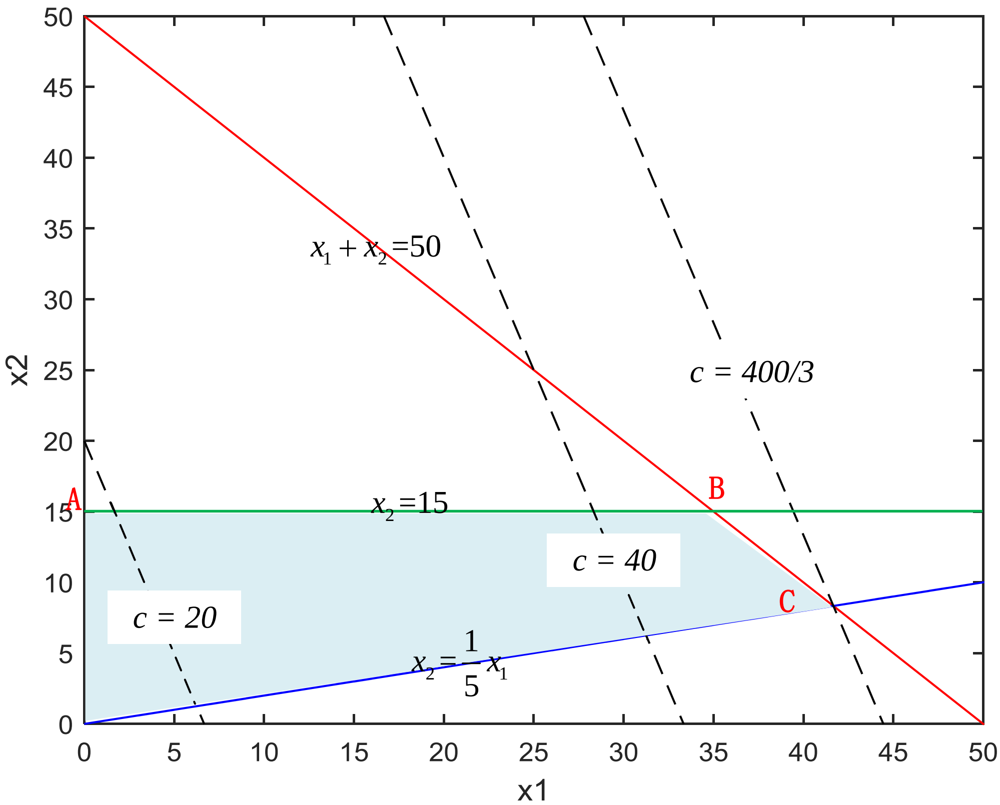
国庆放假 7 天，计划看书和娱乐总时长不超过 50 个小时，其中看书时长不小于 30 小时，娱乐时长不少于看书时长的 1/5，同时娱乐时长不能超过 15 个小时，看书使人得到的提升系数为 3/小时，娱乐使人得到的提升系数为 1/小时，那么该如何分配两者的时长，使人得到的提升最大化？

假设看书时长和娱乐时长分别为 x_1 和 x_2，对该问题建数学模型如下：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad 3x_1 + x_2 \\
&s.t. \quad x_1 + x_2 \le 50 \\
&\qquad\quad x_2 \ge \frac{1}{5}x_1 \\
&\qquad\quad x_2 \le 15 \\
&\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

1、图示法

1）该规划的可行域 D 如下图所示，为下图中的凸多边形 OABCO（淡蓝色区域）。



2）再以 c 为参数画出目标函数 $3x_1 + x_2 = c$ 的等值线。目标函数 c 的值逐渐增加，等值线沿着目标函数的梯度方向平行移动。当移动到 C 点时，再移动就与可行域 D 不相交了，所以顶点 C 就是最优点，最优值为 400/3.

2、基本可行解

令

$$x_3=-x_1-x_2+50$$

$$x_4=-\frac{1}{5}x_1+x_2$$

$$x_5=15-x_2$$

则该题中线性规划的标准型为

$$\begin{aligned}
\min\quad & -3x_1-x_2\\
s.t.\quad & x_1+x_2+x_3=50\\
& \frac{1}{5}x_1-x_2+x_4=0\\
& x_2+x_5=15\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0
\end{aligned}$$

该线性规划有 5 个变量，3 个约束，因此最多有 10 个基解,如下所示：

(p_1, p_2, p_3)	(75, 15, -30, 0, 0)	不可行
(p_1, p_2, p_4)	(35, 15, 0, 8, 0)	非退化
(p_1, p_2, p_5)	(125/3, 25/3, 0, 0, 20/3)	非退化
(p_1, p_3, p_4)		无解
(p_1, p_3, p_5)	(0, 0, 50, 0, 15)	退化
(p_1, p_4, p_5)	(50, 0, 0, -10, 15)	不可行
(p_2, p_3, p_4)	(0, 15, 35, 15, 0)	非退化
(p_2, p_3, p_5)	(0, 0, 50, 0, 15)	退化
(p_2, p_4, p_5)	(0, 50, 0, 50, -35)	不可行
(p_3, p_4, p_5)	(0, 0, 50, 0, 15)	退化

因此，非退化的基本可行解共有 3 组（见上述红色字体），分别代入目标函数中，得到最优解为(125/3，25/3，0，0，20/3)，最优值为

-400/3，则原规划中的最大值为 400/3.

3、单纯形方法

1）以 x_3, x_4, x_5 为基变量，得到基可行解为（0, 0, 50, 0, 15）;

2）x_1 的价格系数为-3，x_2 的价格系数为-1，因此先增加 x_1;

3）x_1 的最大取值为 $\min(50, 0) = 0$，此时 $x_4 = 0$，则 x_4“出基”;

4）根据 $\frac{1}{5}x_1 - x_2 + x_4 = 0$，将原线性规划改写如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & -16x_2 + 15x_4 \\ s.t. \quad & 6x_2 + x_3 - 5x_4 = 50 \\ & \frac{1}{5}x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

此时基变量为 x_1, x_3, x_5，基可行解为（0, 0, 50, 0, 15）;

5）由于 x_2 的价格系数为负，再增加 x_2，x_2 的最大取值为 min(50/6, 15) = 25/3，此时 $x_3 = 0$，则 x_3“出基”;

6）x_3, x_4 为非基变量，将原规划改写为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{8}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{400}{3} \\ s.t. \quad & 6x_2 + x_3 - 5x_4 = 50 \\ & \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{25}{3} \\ & x_2 + x_5 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

此时基变量为 x_1, x_2, x_5，基可行解为（125/3, 25/3, 0, 0, 20/3）。此时，目标函数中的非基变量的系数为正，因此目标函数的取值不能再减少，则最优解为(125/3, 25/3, 0, 0, 20/3)，最优值为-400/3，那么原规划中的最大值为 400/3.

4、整数规划方法

根据上述方法，若不考虑整数约束，该规划的最优解为(125/3, 25/3)，最优值为 400/3。

x_1, x_2 都不是整数，不妨先从 x_1 进行分枝，构造以下两个线性规划问题：

P1:
$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \le 50 \\
& x_2 \ge \frac{1}{5} x_1 \\
& x_2 \le 15 \\
& x_1 \le 41 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

P2:
$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \le 50 \\
& x_2 \ge \frac{1}{5} x_1 \\
& x_2 \le 15 \\
& x_1 \ge 42 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

分别解这两个线性规划问题，得到 P1 最优解为（41, 9），最优值为 132，P2 无解，因此，该规划的最优整数解为（41, 9），最优值为 132.