一、使用最速下降法、FR 共轭方向法、罚函数方法、多目标方法（自己增加一个目标）来求解。

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 \\ s.t. \quad & x_1^2 + x_1x_2 - 2 \le 0 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

1、最速下降法

最速下降法主要针对无约束非线性规划问题，因此先不考虑约束。

目标函数 $f(x)$的梯度向量和 Hessian 矩阵分别为：

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$G(x)$正定，因此，可得最速下降法的迭代公式为：

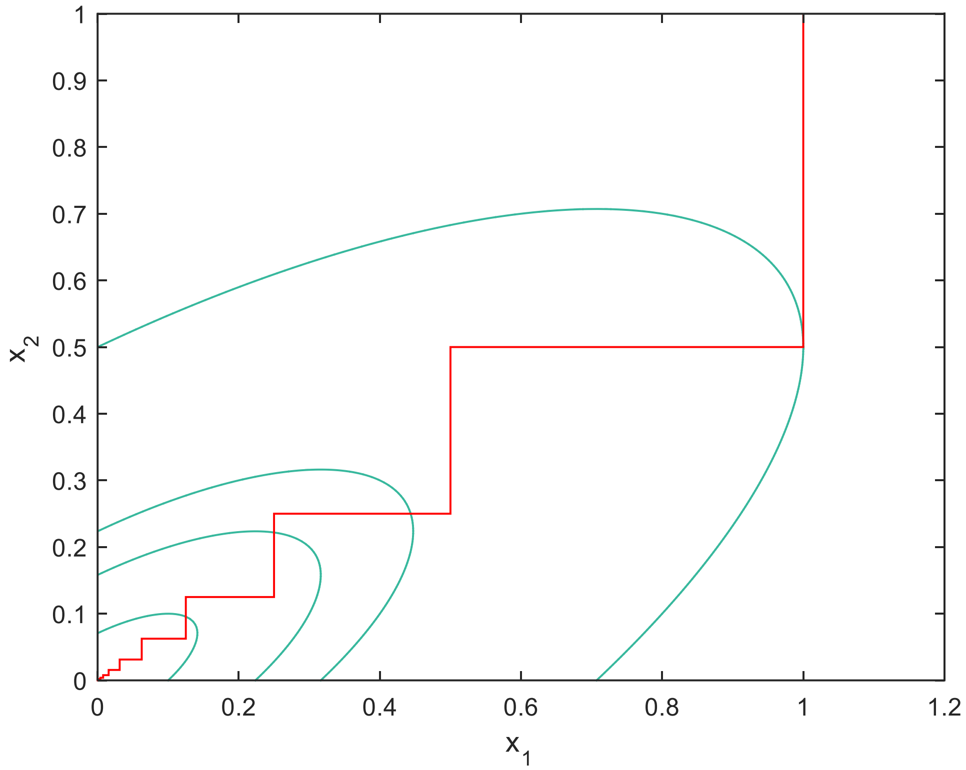
$$x_{k+1} = x_k - \frac{g_k^{\mathrm{T}} g_k}{g_k^{\mathrm{T}} G g_k} g_k$$

令初始值 $x_0 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$，终止准则为$\|g_k\| \le 10^{-12}$，利用 matlab 编程，经过 81 次迭代后停止，得到结果如下表所示:

k	x_k	$f(x_k)$	$g(x_k)$
0	$(1, 1)^{\mathrm{T}}$	1	$(0, 2)^{\mathrm{T}}$
1	$(1, 0.5)^{\mathrm{T}}$	0.5	$(1, 0)^{\mathrm{T}}$
2	$(0.5, 0.5)^{\mathrm{T}}$	0.25	$(0, 1)^{\mathrm{T}}$
3	$(0.5, 0.25)^{\mathrm{T}}$	0.125	$(0.5, 0)^{\mathrm{T}}$
4	$(0.25, 0.25)^{\mathrm{T}}$	0.0625	$(0, 0.5)^{\mathrm{T}}$
5	$(0.25, 0.125)^{\mathrm{T}}$	0.0313	$(0.25, 0)^{\mathrm{T}}$

…	…	…	…
80	$(9.0949\times10^{-13}, 9.0949\times10^{-13})^T$	8.2718×10^{-25}	$(0, 1.8190\times10^{-12})^T$
81	$(9.0949\times10^{-13}, 4.5475\times10^{-13})^T$	4.1359×10^{-25}	$(9.0949\times10^{-13}, 0)^T$

搜索过程如下图所示，两个相邻方向是正交的：



根据上述结果可以归纳出：$x_k=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2^{k/2}},\dfrac{1}{2^{k/2}}\right), & k=0,2,4,\cdots\\ \left(\dfrac{1}{2^{(k-1)/2}},\dfrac{1}{2^{(k+1)/2}}\right), & k=1,3,5,\cdots\end{cases}$

则可得到 x_k —> $x^*=(0, 0)^T$，代入约束中发现也满足约束，因此该问题最优解为$(0, 0)^T$，最优值为 0.

2、FR 共轭方向法

同样，主要针对无约束非线性规划问题，因此先不考虑约束。

目标函数 $f(x)$的梯度向量和 Hessian 矩阵分别为：

$$g(x)=\begin{pmatrix}2x_1-2x_2\\4x_2-2x_1\end{pmatrix}$$

$$G(x)=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&4\end{pmatrix}$$

$G(x)$正定，因此，采用 FR 共轭方法迭代 m ≤ 2 次收敛。

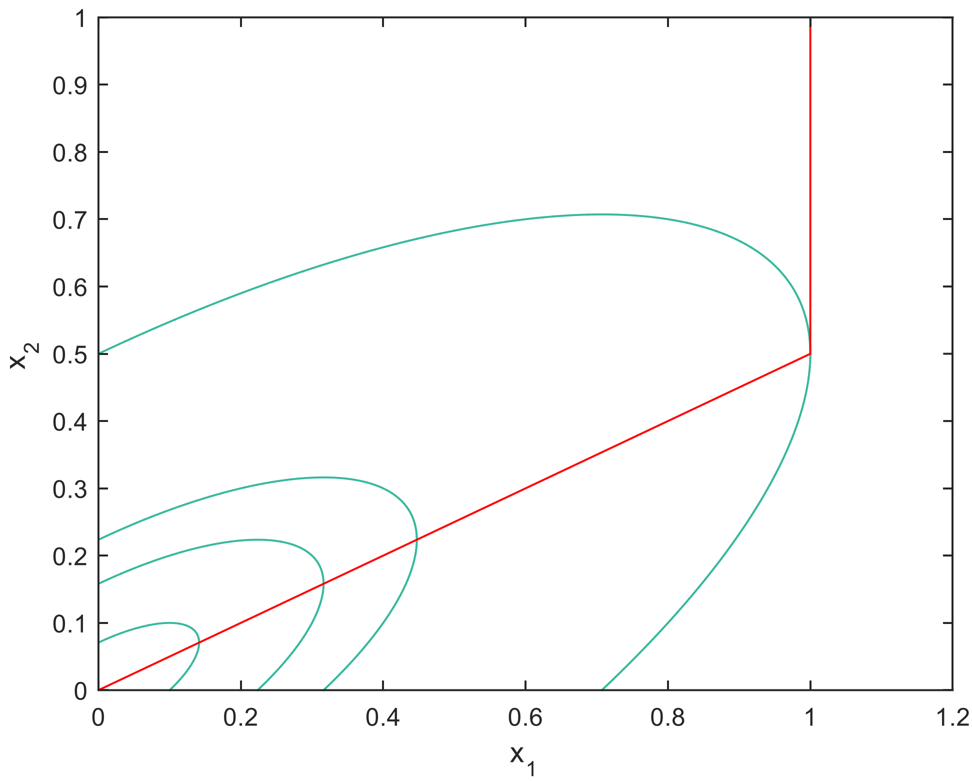
令初始值 $x_0=(1,1)^T$，$g_0=(0,2)^T\neq 0$，故取 $p_0=(0,-2)^T$，从 x_0 出发，沿 p_0 作一维精确搜索，即求 $\min f(x_0+\alpha p_0)=8\alpha^2-4\alpha+1$ 的极小点，得 $\alpha=0.25$，于是，$x_1=x_0+\alpha p_0=(1,0.5)^T$，$g_1=(1,0)^T$。

由 FR 公式可得：$\beta_0=\dfrac{g_1^T g_1}{g_0^T g_0}=0.25$

所以，$p_1=-g_1+\beta_0 p_0=(-1,-0.5)$

从 x_1 出发，沿 p_1 作一维精确搜索，即求 $\min f(x_1+\alpha p_1)=0.5\alpha^2-\alpha+0.5$ 的极小点，得 $\alpha=1$，于是，$x_2=x_1+\alpha p_1=(0,0)^T$，此时 $g_2=(0,0)^T$。因此，该问题最优解为$(0,0)^T$. 代入约束中发现也满足约束，因此该问题最优解为$(0,0)^T$，最优值为 0.

搜索过程如图所示，直接沿着椭圆的径向到达最优解。



3、罚函数方法

采用内罚函数法，构造增广目标函数为

$$P(x,r)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+r\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{-x_1^2-x_1x_2+2}\right)$$

令 $\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial P}{\partial x_2}=0$，可得 $\begin{cases} 2x_1-2x_2+r\left(-\frac{1}{x_1^2}+\frac{2x_1+x_2}{\left(-x_1^2-x_1x_2+2\right)^2}\right)=0 \\ 4x_2-2x_1+r\left(-\frac{1}{x_2^2}+\frac{x_1}{\left(-x_1^2-x_1x_2+2\right)^2}\right)=0 \end{cases}$ 无法直接得到最优解。

令 $x_0=(0.5,0.5)^{\mathrm{T}}$，$r_1=1$，$c=0.1$（需足够小，保证收敛），$\varepsilon=10^{-3}$，对于无约束问题，采用重新开始的 PRP 算法求解（其中一维搜索采用黄金分割法），利用 matlab 编程如下：

```
x(:, 1) = [0.5, 0.5]';
r(1) = 1;
c = 0.1;
eps = 1e-3;
k = 1;
while (r(k) * (1/x(1,k) + 1/x(2,k) + 1/(-x(1,k) ^2-x(1,k) * x(2,k) + 2))) > eps
    r(k + 1) = c * r(k);
    x(:, k + 1) = PRP(x(:, k), r(k+1));

    k = k + 1;
end
```

其中，PRP 方法程序如下：

```
function result = PRP(x, r)

k = 1;
g = gfun(x, r);
p = -g;
while g'*g > 1e-6
    alpha = minf(x, p, r);
    x = x + alpha * p;
    new_g = gfun(x, r);
    beta = new_g'*(new_g - g)/(g'*g);
    p = -new_g + beta * p;
    g = new_g;
    k = k + 1;
    if k == 3
        p = -g;
    end
end
result = x;
```

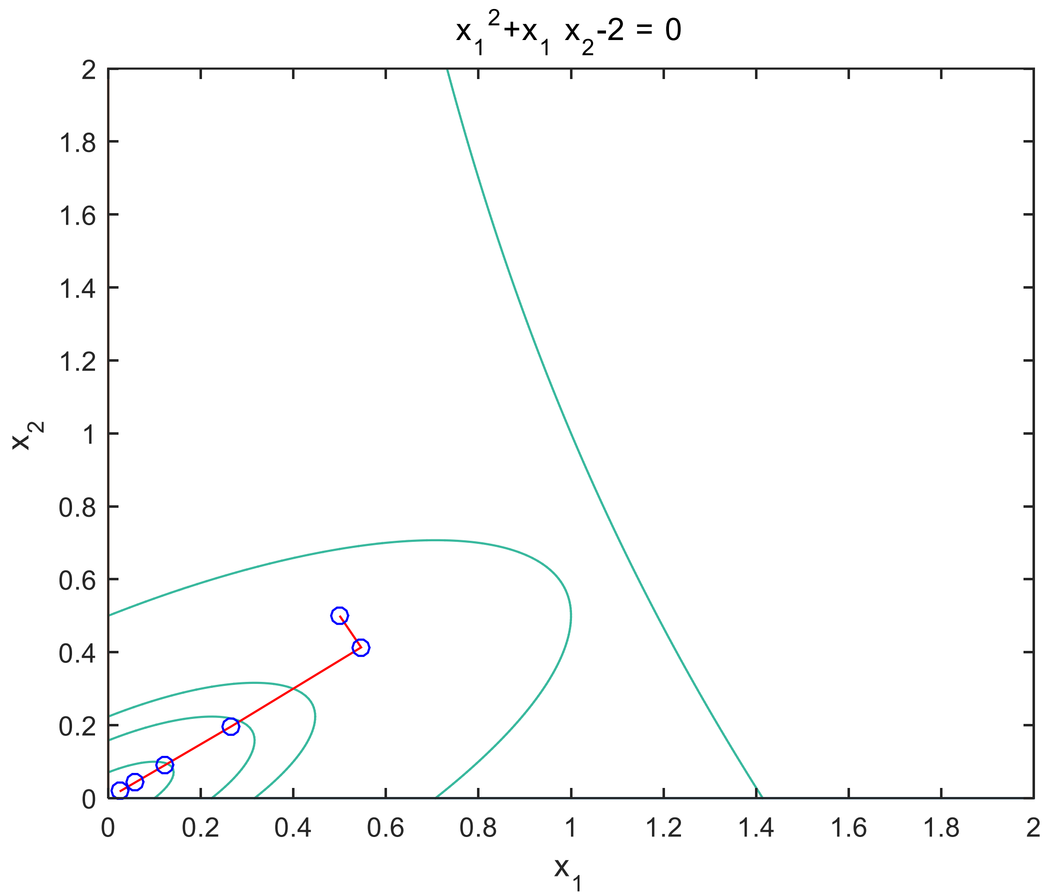
黄金分割法程序如下：

```
function [alpha] = minf(x, p, r)
a = 0;
b = 1;
eps = 1e-3;
x1 = a+0.382*(b-a);
x2 = a +0.618*(b-a);
f1 = fun(x + x1 * p, r);
f2 = fun(x + x2 * p, r);
while abs(b-a)>eps
    if f1>f2
        a = x1;
        x1 = x2;
        x2 = a +0.618*(b-a);
        f1 = f2;
        f2 = fun(x + x2 * p, r);
    else
        b = x2;
        x2 = x1;
        x1 = a+0.382*(b-a);
        f2 = f1;
        f1 = fun(x + x1 * p, r);
    end
end
alpha =(b+a)/2;
```

得到结果如下表所示：

k	x_k	$f(x_k)$	$r_k\tilde{B}(x_k)$
0	$(0.5, 0.5)^T$	0.25	4.667
1	$(0.5464, 0.4133)^T$	0.1885	0.4972
2	$(0.2666, 0.1972)^T$	0.0437	0.0935
3	$(0.1242, 0.0917)^T$	0.0095	0.0195
4	$(0.0576, 0.0426)^T$	0.0020	0.0041
5	$(0.0268, 0.0198)^T$	4.3939e-04	8.8484e-04

搜索过程如下图所示：



4、多目标方法

增加目标：max $3x_2 - x_1$

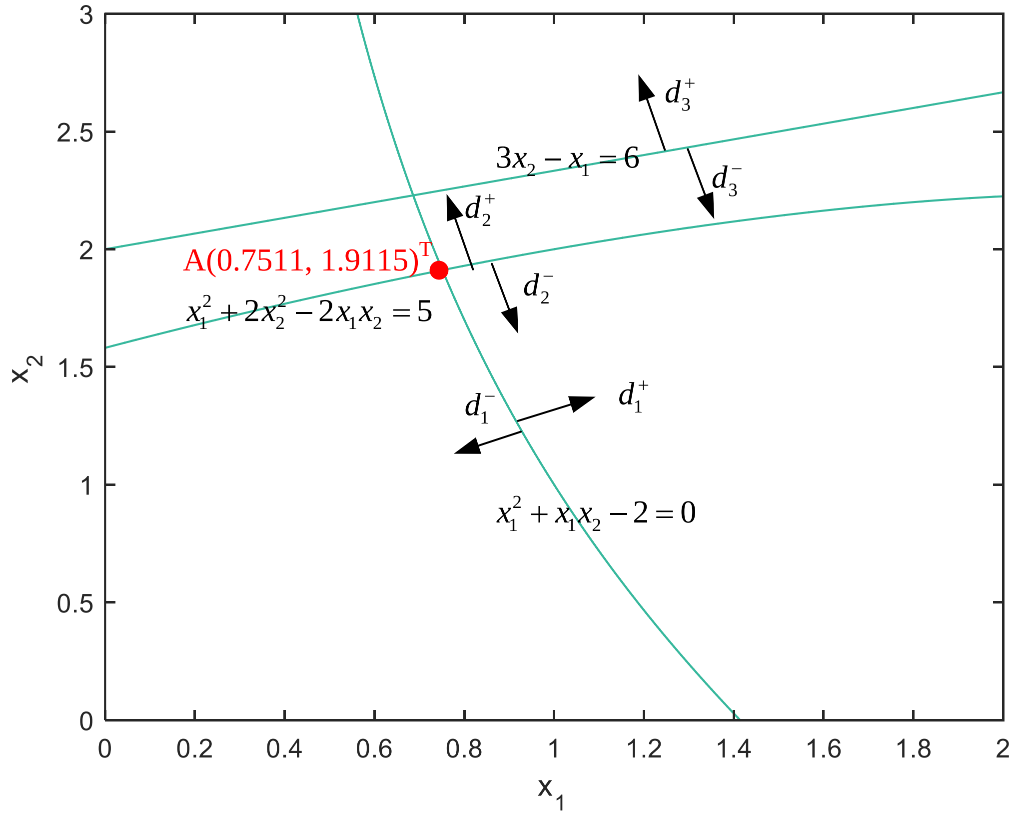
采用目标规划法，为目标设定期望值：

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 \le 5$$
$$3x_2 - x_1 \ge 6$$

增加正负偏差变量，建立目标规划函数如下（将硬约束设为第一优先级，将问题原本的目标设为第二优先级，新加的目标设为第三优先级）：

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^- \\
s.t. \quad & x_1^2 + x_1 x_2 - 2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
& x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5 \\
& 3x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\
& x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, \quad i = 1,2,3
\end{aligned}$$

根据目标规划函数作图如下：



按照优先级进行多阶段求解：

1）只取第一优先级为目标函数

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = d_1^+ \\
s.t. \quad & x_1^2 + x_1x_2 - 2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
& x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5 \\
& 3x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\
& x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

从上图可以看出最优目标函数值为 $z = d_1^+ \ = 0$

2）只取第二优先级为目标函数，将上次求解结果的目标值变为约束：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z = d_2^+ \\
s.t.\quad & x_1^2 + x_1x_2 - 2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
& x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5 \\
& 3x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\
& d_1^+ = 0 \\
& x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0,\quad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

从上图可以看出最优目标函数值为 $z = d_2^+$ = 0，交点 A 为(0.7511, 1.9115)^T

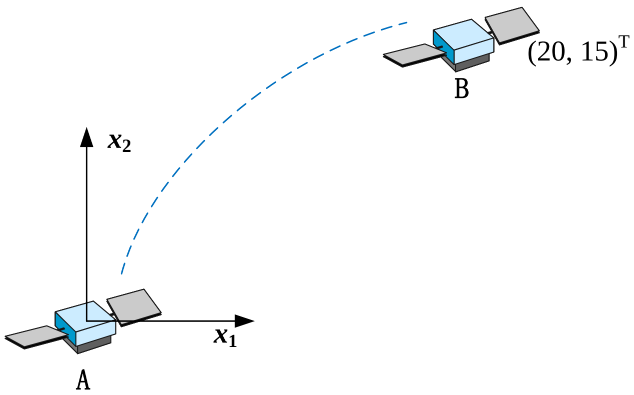
3）只取第三优先级为目标函数，将上次求解结果的目标值变为约束：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z = d_3^- \\
s.t.\quad & x_1^2 + x_1x_2 - 2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
& x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5 \\
& 3x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\
& d_1^+ = 0 \\
& d_2^+ = 0 \\
& x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0,\quad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

根据上图可以求出最优目标函数值为 $z = d_3^-$ = 1.0166，达到交点处。综上所述，可以得到最优解为(0.7511, 1.9115)^T.

二、举生活中例子，构建一个约束最优问题并以最速下降、罚函数、多目标方法求解。

如下图所示，航天器 A 逼近航天器 B，航天器 B 相对于航天器 A 的坐标为(20, 15)^T，航天器 A 可以通过喷气从 x_1 和 x_2 两个方向逼近航天器 B。假设移动单位距离消耗燃料 10，总燃料量 200，如何运动离航天器 B 的距离最近？



我们构建非线性规划模型如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x)=(x_1-20)^2+(x_2-15)^2 \\ s.t. \quad & x_1+x_2\le 20 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

1、最速下降法

最速下降法主要针对无约束非线性规划问题，因此先不考虑约束。

目标函数 $f(x)$的梯度向量和 Hessian 矩阵分别为：

$$g(x)=\begin{pmatrix} 2x_1-40 \\ 2x_2-30 \end{pmatrix}$$

$$G(x)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$G(x)$正定，因此，可得最速下降法的迭代公式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{g_k^T g_k}{g_k^T G g_k} g_k$$

令初始值 $x_0=(0,0)^T$，经过 1 次迭代即可得到最优解为$(20, 15)^T$.

把 g(x)和 G(x)代入迭代公式，可以发现：

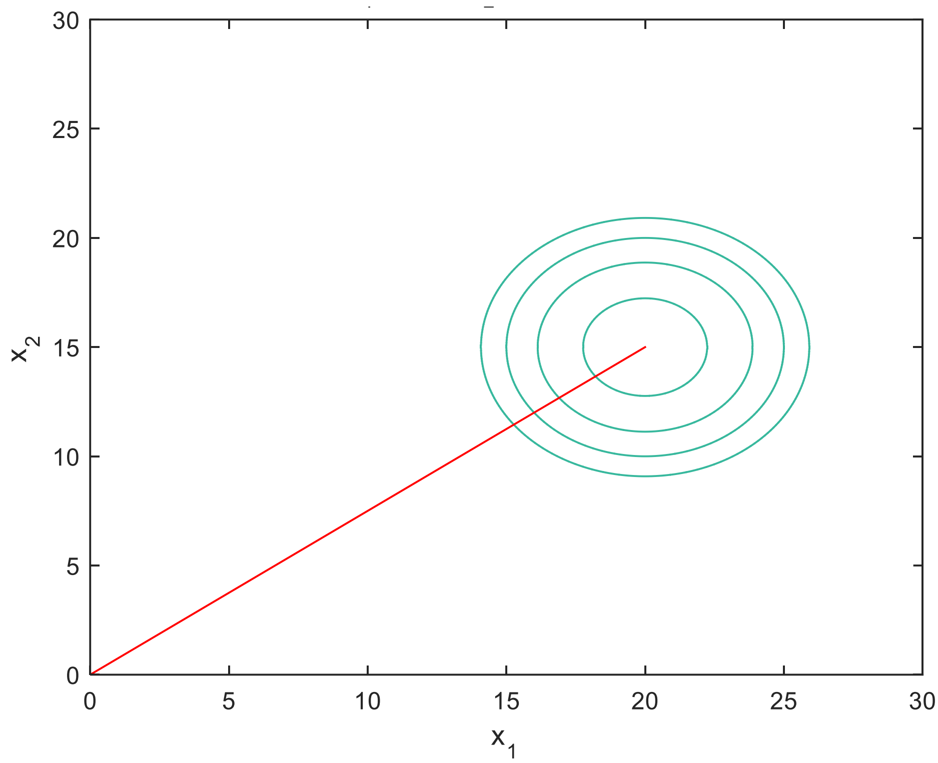
$$x_{k+1}=x_k-\frac{g_k^T g_k}{g_k^T G g_k} g_k = x_k - \frac{1}{2} g_k = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

因此，无论初值为多少，均可 1 次迭代到达最优解$(20, 15)^T$。

代入约束中发现并不满足约束，最速下降法无法解决带约束的非

线性规划方法。

搜索过程如下图所示：

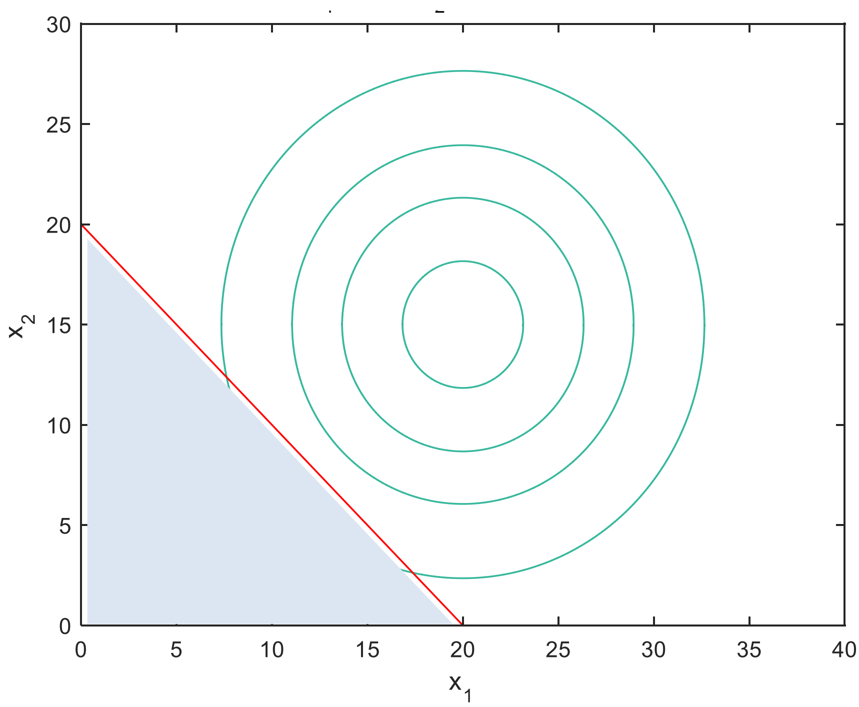


2、罚函数方法

采用外罚函数法，构造增广目标函数为

$$P(x,r)=(x_1-20)^2+(x_2-15)^2+\sigma\left((\min(x_1,0))^2+(\min(x_2,0))^2+\left(\min(20-(x_1+x_2),0)^2\right)\right)$$

如下图所示，当 x 在可行域外时，$x_1>0$，$x_2>0$，$20-(x_1+x_2)<0$，



则惩罚函数为：

$$P(x,r)=(x_1-20)^2+(x_2-15)^2+\sigma\left(20-(x_1+x_2)\right)^2$$

令 $\dfrac{\partial P}{\partial x_1}=\dfrac{\partial P}{\partial x_2}=0$， 可得 $\begin{cases}2x_1-40-2\sigma\left(20-(x_1+x_2)\right)=0\\2x_2-30-2\sigma\left(20-(x_1+x_2)\right)=0\end{cases}$， 求解出

$$x_1=\frac{25\sigma+20}{2\sigma+1},x_2=\frac{15\sigma+15}{2\sigma+1}$$

令 σ 趋向于∞，则可得最优解为$(12.5, 7.5)^T$.

3、多目标方法

增加目标：$\max x_2-x_1$

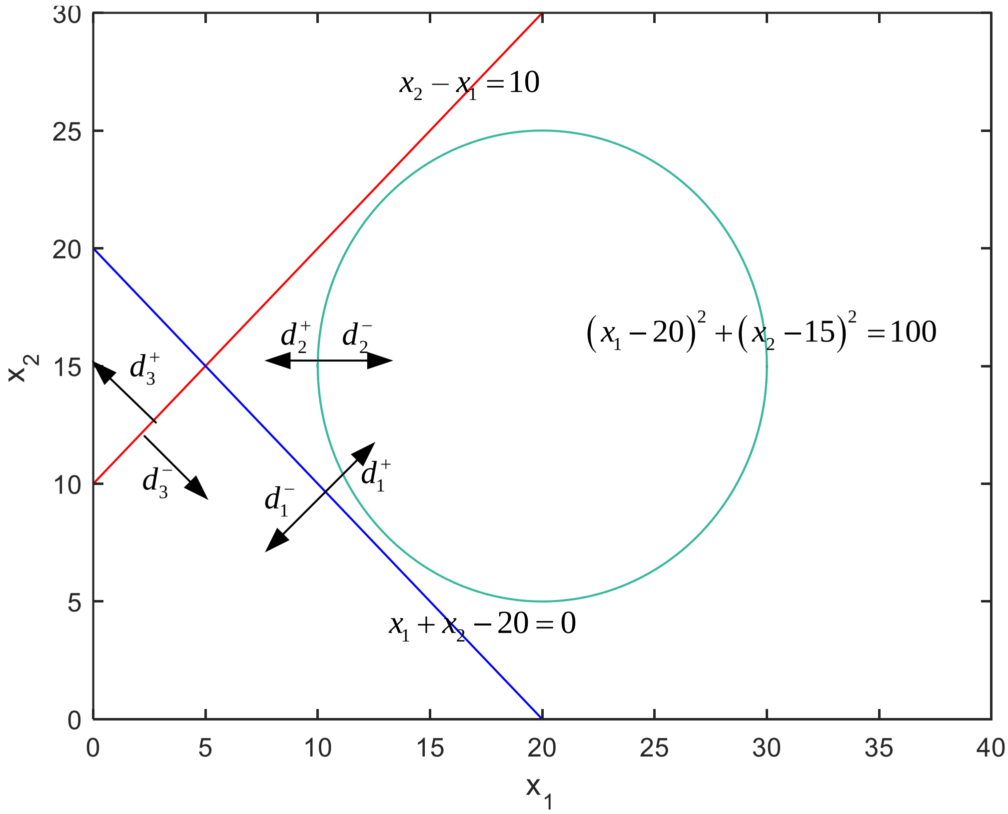
采用目标规划法，为目标设定期望值：

$$(x_1-20)^2+(x_2-15)^2\le 100$$
$$x_2-x_1\ge 10$$

增加正负偏差变量，建立目标规划函数如下（将硬约束设为第一优先级，将问题原本的目标设为第二优先级，新加的目标设为第三优先级）：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^- \\
s.t.\quad & x_1 + x_2 - 20 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
& (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 15)^2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \\
& x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10 \\
& x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

根据目标规划函数作图如下：



按照优先级进行多阶段求解：

1）只取第一优先级为目标函数

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z = d_1^+ \\
s.t.\quad & x_1 + x_2 - 20 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
& (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 15)^2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \\
& x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10 \\
& x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

从上图可以看出最优目标函数值为 $z = d_1^+ \ = 0$

2）只取第二优先级为目标函数，将上次求解结果的目标值变为

约束：

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = d_2^+ \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 - 20 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
& (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 15)^2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \\
& x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10 \\
& d_1^+ = 0 \\
& x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1,2,3
\end{aligned}$$

从上图可以看出相切时最优目标函数值为 $z = d_2^+ = 12.5$，交点 A 为 $(12.5, 7.5)^T$

3）只取第三优先级为目标函数，将上次求解结果的目标值变为约束：

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = d_3^- \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 - 20 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
& (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 15)^2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \\
& x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10 \\
& d_1^+ = 0 \\
& d_2^+ = 12.5 \\
& x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1,2,3
\end{aligned}$$

求出最优目标函数值为 $z = d_3^- = 5$

综上所述，可以得到最优解为 $(12.5, 7.5)^T$.