一、给定一阶系统 $x' = x + u$，$x(0) = 1$，试求控制函数 $u(t)$，使性能指标达到极小值：

$$J = \int_0^2 \left(x^2 + u^2\right) dt$$

解：这是积分型最优控制问题，终端状态 $x(t_f)$自由，终端时刻固定 $t_f=2$，控制函数不受约束。

应用最小值原理求解，构造哈密顿函数：

$$H = x^2 + u^2 + \lambda\left(x + u\right) \tag{1}$$

为使性能泛函达到极小值，哈密顿函数需达到最小值，因为控制函数不受约束，且 H 关于 u 二次可微，所以

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0 \tag{2}$$

因此

$$u^* = -\frac{1}{2}\lambda \tag{3}$$

根据哈密顿函数写出协态方程：

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x - \lambda \\ \dot{x}(t) &= x + u \end{aligned} \tag{4}$$

将式(3)代入式(4)，可以得到

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2x \\ u &= \dot{x} - x \end{aligned} \tag{5}$$

所以解得：

$$\begin{aligned} x^* &= a_1 e^{\sqrt{2}t} + a_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ u^* &= a_1\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{\sqrt{2}t} - a_2\left(\sqrt{2} + 1\right)e^{-\sqrt{2}t} \end{aligned} \tag{6}$$

代入边界条件

$$
\begin{aligned}
&x(0)=1\\
&\lambda(2)=-2u^*(2)=0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
a_1&=\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2e^{4\sqrt{2}}}\approx 0.02\\
a_2&=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2e^{4\sqrt{2}}}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2e^{4\sqrt{2}}}\approx 0.98
\end{aligned}
\tag{8}
$$

因此，得到最优控制和最优轨迹分别为

$$
\begin{aligned}
&x^*(t)=0.02e^{\sqrt{2}t}+0.98e^{-\sqrt{2}t}\\
&u^*(t)=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}t}+\left(\sqrt{2}-1\right)e^{4\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2e^{4\sqrt{2}}}\approx 0.0083e^{\sqrt{2}t}-2.366e^{-\sqrt{2}t}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

二、某单位有资源 100 单位，拟分 4 个周期使用，在每周期有生产任务 A 和 B。若用资源 A，则每单位获利 10 元，资源回收率为 2/3；若用资源 B，则每单位获利 7 元，资源回收率 9/10。问每个周期应如何分配资源，才能使总收益最大？

解：假设在 k 阶段回收资源 x_k，以 u_k 投入 A，以 x_k-u_k 投入 B，则当前阶段可获得收益为：

$$r_k=10u_k+7\left(x_k-u_k\right)$$

状态转移方程为：

$$x_{k+1}=\frac{2}{3}u_k+\frac{9}{10}\left(x_k-u_k\right)$$

令 $f_k(x_k)$为第 k 个至第 4 个阶段的总收益，则递推公式为：

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \max\limits_{0 \le u_k \le x_k} \left\{ 10u_k + 7(x_k - u_k) + f_{k+1}\left[\frac{2}{3}u_k + \frac{9}{10}(x_k - u_k) \right] \right\}, \quad k = 1,2,3 \\ f_4(x_4) = \max\limits_{0 \le u_4 \le x4} \{ 10u_4 + 7(x_4 - u_4) \} \end{cases}$$

这是一个多阶段资源分配问题，由定理可知总在边界处取得最优值：

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \max\left\{ 10x_k + f_{k+1}\left(\frac{2}{3}x_k\right), 7x_k + f_{k+1}\left(\frac{9}{10}x_k\right) \right\} \\ f_4(x_4) = \max\{10x_4, 7x_4\} \end{cases}$$

利用逆序分解法求解，对于第 4 阶段

$$f_4(x_4) = \max\{10x_4, 7x_4\} = 10x_4$$

即 $u_4 = x_4$，第 4 阶段所有资源均分配给 A。

对于第 3 阶段：

$$f_3(x_3) = \max\left\{ 10x_3 + 10 \times \frac{2}{3}x_3, 7x_3 + 10 \times \frac{9}{10}x_3 \right\} = \frac{50}{3}x_3$$

即 $u_3 = x_3$，第 3 阶段所有资源均分配给 A。

对于第 2 阶段：

$$f_2(x_2) = \max\left\{ 10x_2 + \frac{50}{3} \times \frac{2}{3}x_2, 7x_2 + \frac{50}{3} \times \frac{9}{10}x_2 \right\} = 22x_2$$

即 $u_2 = 0$，第 2 阶段所有资源均分配给 B。

对于第 1 阶段：

$$f_1(x_1) = \max\left\{ 10x_1 + 22 \times \frac{2}{3}x_1, 7x_1 + 22 \times \frac{9}{10}x_1 \right\} = 26.8x_1$$

即 $u_1 = 0$，第 1 阶段所有资源均分配给 B。

因此，最优分配方案为 $u_1 = 0$，$u_2 = 0$，$u_3 = 81$，$u_4 = 54$，对应的状态为 $x_1 = 100$，$x_2 = 90$，$x_3 = 81$，$x_4 = 54$，即

- 第阶段 100 单位资源全部分配给 B，回收 90 单位资源；
- 第二阶段 90 单位资源全部分配给 B，回收 81 单位资源；

- 第三阶段 81 单元资源全部分配给 A，回收 54 单位资源；
- 第四阶段 54 单位资源全部分配给 A。

最大收益为 $f_1(100) = 2680$ 元。